« Ä Ì - I

1. þÂó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¢ý «ÊôÀ¨¼ì ¸ÕòÐ¸û

1.1 Óý Û ¨Ã

¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õð¸Ç¢ý (Rigid bodies) þÂº¡ÂÉ, ¾ðÀ¦ÅôÀ, þÂì¸ ¿¢¨Ä¸¨Çô ÀüÈ¢ «È¢Å¢ìÌõ «È¢×òÐ¨È§Â þÂüÀ¢Âø ¬Ìõ (Physics). þÂì¸¿¢¨Ä¸¨Ç Å¨ÃÂÚìÌõ ÀÌ¾¢ þÂó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¡Ìõ (Mechanics). þÂó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¢ø ¦À¡Õð¸Ç¢ý þÂì¸õ (Motion), þÂì¸õ ¿¢¸úÅ¾üÌ¡¢Â Å¢¨º (force), Å¢¨º¡¢É¡ø ¦À¡Õð¸û ¦ºöÂìÜÊÂ §Å¨Ä(work), ¦À¡Õð¸Ç¢ý ¾¢Èý, ¬üÈø ¬¸¢Â¨Å ÀüÈ¢ì ÜÈôÀÎ¸¢ýÈÉ. þÂó¾¢ÃÅ¢Âø §¸¡ðÀ¡Î¸¨Çô ÀÂýÀÎò¾¢ ¦À¡È¢Â¢Âø Å¢É¡ì¸Ùì ÌÈò ¾÷×¸¡ ï õ ÀÌ¾¢§Â ¦À¡È¢Â¢ÂÖìÌ¡¢Â þÂó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¡Ìõ.

¦À¡ÐÅ¡¸ þÂó¾¢ÃÅ¢Â¨Ä ¿¢¨ÄÂ¢Âø (statics) ÁüÚõ þÂì¸Å¢Âø (Dynamics) ±É þÕÅ¨¸¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸Ä¡õ. ¿¢¨ÄÂ¡É ¦À¡Õð¸Ç¢ý ÁÐ ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸¨Çô ÀüÈ¢ì ÜÚÅÐ ¿¢¨ÄÂ¢Âø. ¦À¡Õð¸¨Ç þÂí¸¢¼î ¦ºöÔõ Å¢¨º¸¨Çô ÀüÈ¢Ôõ ÁüÚõ þÂì¸õ ±ùÅ¢¾õ¾¢ø ¿¢¸ØÁ ±ýÀ¨¾ô ÀüÈ¢Ôõ «È¢Å¢ìÌõ ÀÌ¾¢ þÂì¸Å¢ÂÄ¡Ìõ.

1.2 þÂó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¢ý «ÊôÀ¨¼ «Ä Ì¸Ùõ (units) À¡¢Á¡½í¸Ùõ (Dimensions)

¦À¡Õð¸Ç¢ý Àø§ÅÚ ¾ý¨Á¸¨Ç «ÇÅ¢Îž¡ø ãÄÁ¡¸§Å¡ «øÄÐ ±ñ ½¢ì¨¸Â¢ý_ãÄÁ¡¸§Å¡ ¯½÷ò¾ÓÊÔõ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸ ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢Çõ, «¸Äõ, ¯ÂÃõ, ÀÕÁý, ±¨¼ «¾ý ¾¢ ñÁõ ¬¸¢ÂÅü¨È «ÇÅ¢ðÎì ÜÈÓÊÔõ. ¦À¡Õð¸¨Çò ¾ÃôÀÎò¾¢ì ÜÚÅ¾üÌ _«Ç¨Å¸û ¦À¡¢Ð þý¢Â¨ÁÂ¡¾¾Å¡Ìõ. ¦À¡Õð¸Ç¢ý ¾ý¨Á¸¨Ç ¯öòÐ½Ã «Ç¨Å¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢üÌõ ¾É¢òÐÅõ ¯ûÇÐ ¸üÀ¨ ÉÂ¡¸ ´Õ À¡¢Á¡½ò¨¾ þ¨ ½ôÀÐ ÅÆì¸õ.

´Õ ¦À¡Õû ÀÃÅ¢¾¢É «ÇÅ¢Îõ ¾ý¨Á¸¨Çô ¦ÀüÈ¢Õì¸ìÜÎõ. ´ù¦Å¡ýÈ¢ý ¾ý¨Á¨Â «ÇÅ¢ÎÅ¾üÌ «ò¾ý¨ÁÂ¢ý ´Õ º¢ÚÀÌ¾¢¨Â «ÊôÀ¨¼ «ÇÅ¡¸ì ¦¸¡ñ Î (basic unit) «ùÅÊôÀ¨¼Â¢ø «ò¾ý¨ÁÂ¢ý «Ç¨Å Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ. «ùÅÊôÀ¨¼ «Ç× «ò¾ý¨ÁÂ¢ý «ÊôÀ¨¼ «Ä Ì ±Éì ¸Õ¾ôÀÎõ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸ ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢Ç¨¾ «¾üÌ ¾Ìó¾ «ÊôÀ¨¼ «ÇÅ¡É "´Õ ¦ºýÊÁ£ð¼÷" «øÄÐ "µ÷ «Ê" ±ýÈ «Ä¸¡ø ¸½ì¸¢¼ ÓÊÔõ.

þÂó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¢ø þ¼õ¦ÀÚõ Ã¡º¢¸û (Quantities) «øÄÐ ¾ý¨Á¸û (Qualities) ¬¸¢Â ´ù¦Å¡ýÈ¢ý ¾É¢ò¾ «Ç¨Å §Áü¦¸¡ûÇÐ þÂÄ¡¾ ¦ºö¨¸Â¡Ìõ. ¬úó¾ ¬Ã¡öîº¢¸Ç¢ý «ÊôÀ¨¼Â¢ø ¸¢¨¼ì¸ô¦ÀüÈ ¿¢Çõ (length), ¿¢¨È(Mass), ¸¡Äõ(Time) ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý «ÊôÀ¨¼ «Ä Ì¸Ç¢ý Å¡¢Â¡¸ ÁüÈ Ã¡º¢¸¨Ç «Ç¦¼¼ÓÊÔõ. ±É§Å ¿¢Çõ, ¿¢¨È, ¸¡Äõ ¬¸¢Â ã ýÚ Ã¡º¢¸Ùõ «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢¸û (Fundamental Quantities) ±É×õ ÁüÈ¨ÅÂ¡ Ã¡º¢¸Ùõ «ÅüÈ¢ý ÅÆ¢Å¡õ Ã¡º¢¸¦ÇÉ×õ (Derived Quantities) ¸Õ¾ôÀÎõ.

þõ ãýÚ «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢ «Ä Ì¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢ý «ÊôÀ¨¼ À¡¢Á¡½ò¨¾(basic dimension)´ý¦ÈÉì ¦¸¡ ñ Î (unity) ÁüÈ «ÇÅ¢Îõ Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½í¸¨Çì ¸½ì¸¢¼ ÓÊÔõ. ÁüÈ¨Å Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½í¸û «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½í¸Ç¢ø º¡÷ÒÐ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎÅ¾¡ø «Å¨È ÅÆ¢Å¡¨ «øÄÐ þÃñ¼¡õ¿¢¨Ä À¡¢Á¡½í¸û (Derived or secondary Dimensions)±É ìÜÚÅ÷.

Ã¡º¢¸¨Ç «ÇÅ¢ð Î ì ÜÚÅ¾¢ø þÕÅ¨¸Â¡É Ó¨È¸û ¦À¡ÐÅ¡¸ô ÀÂýÀÎò¾ôÀð Î ÅÕ¸¢ýÈÉ. ¦Áð¡¢ì Ó¨È (Metric system) ±ýÀÐ ´ýÚ, Áü¦È¡ýÚ À¢¡¢ð¼¡ý Ó¨È (British system).

¦Áð¡¢ì Ó¨ÈÂ¢ø ¿¦Çõ, ¿¢¨È, ¸¡Äõ ¬¸¢ÂÅü¨È «ÇÅ¢¼ô ÀÂýÀÎò¾ôÀÎõ «ÊôÀ¨¼ «Ä Ì ¸û Ó¨È§Â ¦ºýÊÁ£ð¼÷ (¦º.Á£.), ¸¢Ã¡õ (¸¢), Å¢É¡Ê (Å¢) ¬¸¢Â¨Å¸Ç¡ Ìõ. À¢¡¢ð¼¡ý Ó¨ÈÂ¢ø «ÅüÈ¢ý «Ä Ì ¸û Ó¨È§Â «Ê («), À× ñ Î (À×), Å¢É¡Ê (Å¢) ¬¸¢Â¨Å¸Ç¡ Ìõ.

1.3 ÀÊò¾Ã «Ä Ì ¸û (Standard units)

ÅÆì¸Á¡¸ ¦Áð¡¢ì Ó¨ÈÂ¢ø ÀÂýÀÎò¾ôÀÎõ ¿¦Çõ, ¿¢¨È, ¸¡Äõ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ÀÊò¾Ã «Ä Ì ¸û Ó¨È§Â Á£ð¼÷ (Á£), ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ (¸¢.¸¢), Å¢É¡Ê (Å¢) ¬ Ìõ. «ùÅ¡§È À¢¡¢ð¼¡ý Ó¨ÈÂ¢ø ¦¸ƒõ (¦¸), À× ñ Î (À×), Å¢É¡Ê (Å¢) ±ýÀÉÅ¡ Ìõ.

¦Áð¡¢ì Ó¨ÈÂ¢ø À¡¡¢Í ì Ì (Paris) «Õ¸¢ø ¦ºù§Ã (Sevres) ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø $0°C$ ¦ÅôÀ¿¢¨ÄÂ¢Âø ¸ñ¸¡½¢ì¸ôÀð Î ÅÕõ À¢Ç¡ðÊÉõ þ¡¢ÊÂõ ¯§Ä¡¸ì ¸Ä¨ÅÂ¡Ä¡É ¸õÀ¢ (bar) ´ýÈ¢Ö ûÇ þÕ¿¢¨ÄÂ¡É ÌÈ¢¸Ù ì¸¢¨¼§ÂÔûÇ ¦¾¡¨Ä× (distance) ´Õ Á£ð¼÷ (Á£) ±É ×õ, «§¾ þ¼ò¾¢ø ¨Åì¸ôÀð Î ûÇ À¢Ç¡ðÊÉõ - þ¡¢ÊÂõ ¯§Ä¡¸ì ¸Ä¨ÅÂ¡Ä¡É ¯Õ¨Çì¸ðÊ ´ýÈ¢ý ¿¢¨È ´Õ ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ (¸¢.¸¢) ±É×õ Å¨ÃÂÚì¸ôÀð Î ûÇÉ. Á£ð¼¡¢ý áüÈ¢ø ´ÕÀÌ¾¢§Â ¦ºýÊÁ£ð¼Ã¡ Ìõ. ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡Á¢ý ¬Â¢Ãò¾¢ø ´ÕÀÌ¾¢§Â ¸¢Ã¡Á¡ Ìõ.

À¢¡¢ð¼¡ý Ó¨ÈÂ¢ø þÄ ñ ¼ý Á¡¿¸¡¢ø Å÷ò¾¸ì Ì Ø «ÖÅÄ¸ò¾¢ø $62°F$ ¦ÅôÀ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åì¸ôÀð Îô À¡Ð¸¡ì¸ôÀð Î ÅÕõ ¦Å í¸Äì¸õÀ¢ ´ýÈ¢ø À¾¢ì¸ôÀð Î ûÇ þÕ ¾í¸ Ó¨É¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Î¸Ù ì Ì þ¨¼§ÂÔûÇ ¦¾¡¨Ä× ´Õ ¦¸ƒõ ±É×õ, «§¾þ¼ò¾¢ø ¨Åì¸ôÀð Î ûÇ À¢Ç¡ðÊÉì¸ðÊ ´ýÈ¢ý ¿¢¨È ´ÕÀ× ñ Î ±É×õ Å¨ÃÂÚì¸ôÀð Î ûÇÉ. ¦¸ƒò¾¢ý ãýÈ¢ø ´ÕÀÌ¾¢ «ÊÂ¡ Ìõ.

þÕÓ¨È¸Ç¢Öõ ¸¡Äò¾¢ý ÀÊò¾Ã «Ä Ì º¡º¡¢ »¡Â¢Ú ¿¡Ç¡ Ìõ.(Mean solar day) »¡Â¢Ú ¿¡û ±ýÀÐ ¸¾¢ÃÅý Å¡ý Ó¸ð¨¼ (Horizon), «Îò¾Îò¾Ð þÕÓ¨È ¸¼ôÀ¾ü¸¢¨¼§ÂÔûÇ ¸¡Ä«ÇÅ¡ Ìõ. »¡Â¢Ú ¿¡Ç¢ý 1/86400 À Ì ¾¢§Â ´Õ Å¢É¡ÊÂ¡ Ìõ.

1.4 ¿¢¨È (Mass)

´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È ±ýÀÐ «ô¦À¡ÕÇ¢ø «¼í¸¢ÔûÇ ¾¢½¢Å¢ý (matter) «Ç¨Å Ì ÈÈ¢ì Ìõ. ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼(weight) ±ýÀÐ «ô¦À¡ÕÇ¢ýÁ£Ð ¦ºÂüÀÎõ ÒÅ¢Â¢÷ôÒ Å¢¨º¨Â (gravitational force) ÌÈ¢ì Ìõ. ÒÅ¢Â¢÷ôÒ Å¢¨º ÒÅ¢Â¢ý§Áø þ¼ò¾¢ü¸¢¼õ Á¡ÚÀÎõ. ¬¾Ä¡ø ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼Ôõ þ¼ò¾¢ü¸¢¼õ §ÅÚÀÎõ. ¬É¡ø ´Õ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È ±øÄ¡ þ¼í¸Ç¢Öõ ´§Ã Á¡¾¢ÃÀÅ¡¸ þÕì Ìõ.

¦À¡Õð¸Ç¢ý þÕ Á¡ÚÀ¡¼¡É ¦ºÂø¸Ç¢Ä¢ÕóÐ Å¨ÃÂÚì¸ôÀð¼ ¦À¡Õ ñ¨ÁÂ¢ý «øÄÐ ¾¢½¢Å¢ý À ñ¨À§Â ¿¢¨È ±É ìÜÚÅÐ ÅÆì¸õ.

Ó¾Ä¡õ ¦ºÂ¨Ä ¬Ã¡öó¾¢¼, º¢¿¢¨ÄÂ¢Ö ûÇ Ò ûÇ¢¸Ç¢Ä¢ÕóÐ ´§Ã Á¡¾¢Ã¢Â¡É þÕ ¾Õ Ì ÎÕ ¸¨Çò(Springs) ¦¾¡í¸Å¢¼×õ. ¦ÅùÅÚ ãÄô ¦À¡Õð¸Ç¡ÉÐõ ¯ÕÅõ, « ¨ÁôÒ, ¿¢Èõ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø Á¡ÚÀð Îõ ¯ûÇ þÕ ¾¢ô¦À¡Õð¸¨Ç Ð ÎÕ¸û ¸Ç¢ø Ð ÎÕ¸¢ý ´Õ¦À¡Õ û þÃ ñ Îõ ÒÅ¢Â¢÷ôÒ º¢ì¾¢É¡ø ¾Õ ÎÕû ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ ºÈ¢Ð ¿¡ðº¢¨Â ¯ ñ Î À Îò¾Ðõ. ±ó¾î ÍÕÇ¢ø «¾¢¸ ¿£ðº¢ÔûÇ§¾¡ «î ÍÕÇ¢ø þ ¨ ½ ì ¸ôÀð¼ ¾¼ô¦À¡ÕÇÄÕóÐ þÕ¿ðº¸Ù õ ´§Ã«ÇÅ¡¸ ÅÕÁÇ×ì Ì ã Äô¦À¡Õ ¨Çî ÍÃ ñ Ê ±Î ì ¸×õ. ÀÈ Ì þùÅÕ ¾Õ Ì ÍÕû¸¨ÇÔõ ÒÅÂý §ÁüÀÅôÀÄÕóÐ ´§Ã ¯ÂÃò¾ü Ì î à ì ¸Å¼×õ. «ô§À¡Ð ¿ðº «Ç×¸Çø ºüÚ Ì ¨È× ¸¡½ôÀð¼§À¡¾Öõ, þÕ¿ðº¸Çý ¦¾¡¨Ä×¸û ´ýÈ¡§Å (same)þÕôÀ¨¾ì ¸¡½Ä¡õ. ¸¡Ã½õ ±ý É¦ÅÉø þÕ¦À¡Õð¸Ù õ ÒÅÂ÷ôÒ Å¨ºÂ¡ø ´§Ã«Ç×ûÇ ¿ðº¨Â þÕ ÍÕû¸ÇÖõ ¦ºöÅì ¸ýÈÉ. þ¾ÄÕóÐ ¦À¡Õð¸û ºÁÁ¾ôÒûÇÐõ þÂøÀ¡¸ «¨Áó¾ À ñ ¨ÀÔõ ¦ÀüÚûÇÉ ±É «ÈÂÄ¡õ. ´ù¦Å¡Õ ¦À¡ÕÇý þùÅ¾ô À ñ ¨Àô ÒÅÂ÷ôÒ Å¨º «Ç¨ÅÂ¡ø ¦¾ÇÅ¡ì ÓÊ¸ÈÐ. ¦À¡ÕÇý þò¾¨¸Â À ñ ¨Àò ¾¡ý ¦À¡ÕÇý ¿¨È ±É ì ÜÚÅ÷.

«ÊôÀ¨¼ À¡Á¡½õ

´Õ ¦À¡ÕÇý ¾ý ¨Á¸¨Ç ÅÅ¡ôÀ¾ø, ã ýÚ ¾Éò¾ À¡Á¡½í ¸¨Çô ÀÂýÀÎò¾ «¾ý ÁüÈò ¾ý ¨Á¸¨Ç «ÇÅ¼ÓÊÔõ ±É ÓÝ§À ÜÈôÀð¼Ð. «õã ýÚ «ÊôÀ¨¼ô À¡Á¡½ í ¸Ù õ ¸úÅÕÁ¡Ú Å ¨ÃÂÚì¸ôÀÎ õ.

¿¦Çõ (¿) ---- Length (L)
¿¨È(¿) ---- Mass (M)
¸¡Äõ(¸¡) ---- Time (T)

¿Çõ, ¿¨È, ¸¡Äõ ¬¸Â ´ù¦Å¡ýÈý «ÊôÀ¨¼ô À¡Á¡½ í ¸û ´ý¦ÈÉ ì (Unit Dimension)¦¸¡ûÇôÀÎõ. ÌÈÂÎ Ó¨ÈÂø «¨Å¸û ´ù¦Å¡ýÈý À¡Á¡½ í ¸¨Ç Ó¨È§Â (¿ - L), (¿ - M), (¸¡ - T) ±ýÈ «¨¼Â¡Çì ÌÈÂð¼¡ø ÌÈôÀÎÅÐ ÅÆì¸õ. §ÁÖõ ¿Çõ, ¿¨È, ¸¡Äõ ¬¸ÂÅüÈý «Ç×¸Çý À¡Á¡½ í ¸û ´ýÚ ±ýÀ¨¾Ôõ §Áü¸ ñ¼ ÌÈÂÎ ¸û ÅÇì¸ ¯¾×¸ýÈÉ.

¿¨¼Ó¨ÈÂø ¸½ì¸Î õ¦À¡ØÐ «Ä Ì ¸¨Ç ´Õ Ó¨ÈÂÄÕóÐ Áü¦È¡Õ Ó¨ÈìÌ Á¡üÈ§Å ñ ÊÂ §¾¨Å ²üÀÎ¸ÈÐ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, «Ê «Ç¨Å « í Ì Äõ «øÄÐ ¦ºý¼ÁÀð¼Ã¡ø «ÈÅì¸ §Å ñ ÊÂÅõ. «ô§À¡Ð «Ê «Ä Ì ì Ì î ºÁÁ¾ô¨ÀÔ ¦ÀüÈ ÒÐÂ «Ä Ì¸Çý Á¼í¸¡ø Á¡üÈÂ¨Áì §Å ñ Î õ. «¾¡ÅÐ, µ÷ «Ê¨Â 12 « í Ì Äí¸û «øÄÐ 30.5 ¦ºýÊÁð¼÷¸û ±ýÚ Á¡üÈ¼§Å ñ Î õ. þ í Ì 12, 30.5 ±ýÈ ± ñ ¸û ÒÐÂ «Ä Ì¸Çø «Êì Ì ¡Â Á¼í Ì ¸¨Ç «ÈÅì¸ýÈÉ. §ÁüÜÈÂ «Ä Ì¸Ù ì Ì ûÇ Á¾ôÒ¸Çý ¦¾¡¼÷¨À 1 «Ê = 12 « í Ì Äõ, 30.5 ¦ºýÊÁð¼÷ ±É º÷Å ºÁì ÌÈÂð¼¡ø ¦ÅÇôÀÎò¾ ÓÊÔõ. «¨Å¸¨Ç þÂü¸½¾ Ó¨È ºÁýÀ¡¼¡¸ì ¸Õ¾ìÜ¼¡Ð. «Ä Ì¸Ù ì Ì ûÇ ºÁÐÅò¨¾ (equivalence) «¾¡ÅÐ º¡÷ó¾Õì Ìõ ¾ý¨Á¨Àò ¦¾¡ÌôÀ¾¡¸ò¾¡ý ¦¸¡ûÇ§Å ñ Î õ. «¨Å¸Çý ºÁÐÅò¨¾ô ÀýÅÕÁ¡Úõ Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ:

$$\left[\frac{1\text{அடி}}{12\text{அங்குலம்}}\right]\equiv 1;\left(\frac{1\text{அடி}}{30.5\text{செ.மீ}}\right)\equiv 1;$$

$$\left[\frac{12\text{அங்குலம்}}{1\text{அடி}}\right]\equiv 1;\left(\frac{30.5\text{செ.மீ}}{1\text{அடி}}\right)\equiv 1;$$

þ í Ì ÅÄôÒÈò¾ø ÌÈì¸ôÀðÎûÇ ´ýÚ ±ýÈ þÄì¸õ, þ¼ôÒÈò¾Ö ûÇ ¸¡ú, §Áø «Ä Ì¸Çý Á¾ôÒ¸û ´ýÚì¦¸¡ýÚ ºÁÐÅÁ¡¸ (equivalence) ¯ûÇÉ ±ýÀ¨¾ «ÈÅì¸ÈÐ. þù¦Å ñ ÌÈì¸û, þÃ ñ ¼¡Å¾¡É À¡Á¡½ í ¸Ù ì Ì ¸ó¾ «Ä Ì ¸¨Ç Å¡üÚÅ¾ø Ð¨½Ò¡¸ýÈÉ.

1.5 ÅÆÅó¾ «øÄÐ þÃ ñ ¼¡ÅÐ ¿¨ÄÂ¡É Ã¡º¸Çý À¡Á¡½ í ¸û (Derived or secondary dimensions of quantities)

¿¦Çõ, ¿¢¨È, ¸¡Äõ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý «Ä̸¨Ç «ÊôÀ¨¼ «Ä̸¦ÇÉì¦¸¡ñÎ, ÁüÈ þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸Ç¢ý «Ä̸¨Ç, «ÅüÈ¢ý Å¨ÃÂ¨È¸Ùì̺üÈÅ¡Ú «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢ «Ä̸Ç¢ý ãÄÁ¡¸ô ¦ÀÈÄ¡õ. ±É§Å «ùÅ¡¾ Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½í¸¨ÇÔõ, «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½í¸¨ÇòÐ¨½¦¸¡ñÎ Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ. «ô§À¡Ð «ùÅ¡¾ Ã¡º¢¸û þÃñ¼¡Å¾¡É À¡¢Á¡½í¸¨Çô ¦ÀÈ¢Ã¡º¢¸û ±É «¨Æì¸ôÀÎõ.

±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, ¾¢¨º§Å¸õ(Velocity) ±ýÀÐ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ì̧õ, §¿Ãò¾¢üÌÓûÇ Å¢¸¢¾Á¡¸ «ÇÅ¢¼ôÀÎÁ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎÁûÇÐ. ±É§Å ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý À¡¢Á¡½ò¨¾ ¿¦Çõ, §¿Ãõ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý «ÊôÀ¨¼ô À¡¢Á¡½ «Ç×¸Ç¢ø Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ. ¬¾Ä¡ø ¾¢¨º§Å¸õ ´Õ ÅÆ¢Åó¾ Ã¡º¢Â¡Ìõ.

¿¦Çõ, ¿¢¨È, ¸¡Äõ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý «ÊôÀ¨¼ À¡¢Á¡½í¸û ´ýÚ ±É «È¢Å¢ì¸ «¨Å¸¨Çì ÌÈ¢ì¸ ±ØòÐ¸Ç¡É L,M,T ¸¨Çô ¦À¡¢Â «¨¼ôÒì ÌÈ¢ìÌ¸Ç¢Ä¢ð¼ [L] [M] [T] ±É ±Ø¾ôÀÎõ. ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý À¡¢Á¡½í¸¨Çô À¢ýÅÕÁ¡Úõ ±Ø¾Ä¡õ.

$$[\text{¾¢¨º§Å¸õ}] = \left[\frac{\text{þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢}}{\text{§¿Ãõ}}\right] = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[LT^{-1}\right]$$

¾¢¨º§Å¸õ ÅÆ¢Åó¾ Ã¡º¢ (derived quantity)Â¡¾Ä¡ø, «¾üÌ¡¢Â «Ä¸¢¨É þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢, §¿Ãõ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý «Ä̸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ. ±É§Å ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý «Ä̠$= \frac{[\text{«Ê}]}{[\text{Å¢É¡Ê}]}$ ¬Ìõ. µ÷ «¨ÁôÒìÌ¡¢Â «Ä̸¨Ç ÁüÈ¡÷ «¨ÁôÀ¢ý «Ä̸Ç¡¸ Á¡üÈ¢Îõ§À¡Ð, ¦À¡ÐÅ¡¸ º¡÷ó¾ Ã¡º¢¸Ç¢ý «Ç×§¸¡ø¸ Ùì̧Ç ºÃ¢ÀÅ¾ô À¡¢Á¡½í¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ ¯¾×¸¢ÈÐ.

¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý «ÊôÀ¨¼ «Ä̠À¢¡¢ò¾ý Ó¨ÈÂ¢ø ´Õ Å¢É¡ÊÂ¢ø ¸¼ìÌ¸¢ýÈ ¦¾¡¨Ä× «Ê «Ä¸¢ø «¾¢Å¢ì̧õ «ÇÅ¡Ìõ, ¦ÁðÃ¢ì Ó¨ÈÂ¢ø þùÅ¢¼õ ´ÕÅ¢É¡ÊÂ¢ø ¸¼ìÌõ ¦¾¡¨Ä× ¦ºýÊÁ£ð¼÷ «Ä¸¢ø «¾¢¸Á¡¸ìÌõ «ÇÅ¡Ìõ.

´ÕÓ¨ÈÂ¢ÄÕóÐ ÁüÈ¦¾¡Õ Ó¨ÈìÌ «Ä̸¨Ç Á¡üÚ¾ø À¢ýÅÕÁ¡Ú ¦ºÂøÓ¨È¸Ç¢ø ¿¨¼¦ÀÚ¸¢ÈÐ.

(i) º¡÷ó¾ Ã¡º¢¨Â «¾üÌ¡¢Â À¡¢Á¡½ì ÌÈ¢ôÀ¢¼¡ø ¦ÅÇ¢ôÀ¼ø

(ii) «ÊôÀ¨¼ô À¡¢Á¡½í¸Ùì̡¢Â ¾ü§À¡¨¾Â «Ä̠«Ç×§¸¡ø¸¨Çô ÀÂýÀÎò¾ø

(iii) «Ç×§¸¡ø¸¨Çô Ò¾¢Â¨Å¸Ç¡ø º¡ÐÅ¾¡¸ þÕìÌõ «Ç×§¸¡ø¸Ç¢ý Á¡üÈí¸¨Ç ÁüÈ¢ «¨Áò¾ø.

(iv) Ò¾¢Â¨Å¸û º¡÷ó¾ Ã¡º¢Â¢ý «Ç×§¸¡ø¸Ùì̡¢Â Á¾¢ôÀ¢¨É, À¨ÆÂ¨Å¸û ÀÂýÀÎò¾¢ «Ç×§¸¡ø¸Ç¢ý Å¢¾¢¸Ç¢ø Å¨ÃÂÚìÌõ ºÁýÀ¡Î¸¨Ç ¾£÷Á¡É¢ò¾ø.

±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, §Å¸ò¾¢ý µ÷ «Ä¸¢ø Å¨ÃÂÚìÌõ À¡¢Á¡½ò¨¾ À¢¡¢ò¾ý Ó¨ÈÂ¢ÄÕóÐ ¦Áð¡¢ì Ó¨ÈìÌ Á¡üÚÅ¾¡É ¯¾¡Ã½õ ¸£ú ¾ÃôÀðÎûÇÐ:

$$[\text{§Å¸ Å¢¾õ}] = \frac{[1\ \text{«Ê}]}{[\text{Å¢É¡Ê}]} = \frac{[30.5\ \text{¦º.Á£}]}{[1\ \text{Å¢É¡Ê}]}$$

$$= 30.5\left[\frac{1\ \text{¦º.Á£}}{1\ \text{Å¢É¡Ê}}\right]$$ ¬Ìõ.

ÀÊò¾Ã «Ä¸¢ø $=30.5\left[\frac{0.01\text{மீ}}{1\text{வினாடி}}\right]$

±É§Å, ¦Áð¡¢ì Ó¨ÈÂ¢ø §Å¸Å¾ò¾¢üÌ ¡¢Â $\left[\frac{1\text{ ¦º.Á}}{1\text{வினாடி}}\right]$ ±ýÈ «Ä¸¢ý, 30.5 Á¼í Ì, À¢¡¢ð¼ý Ó¨ÈÂ¢ø §Å¸Å¾ò¾¢ý µÃÄÌ ì Ì î ºÁÁ¡Ì õ.

ÀÊò¾Ã «Ä¸¢ø $=30.5\left[\frac{10^{-2}}{1\text{வினாடி}}\right]$

þÃ ñ ¼¡ÅÐ¿¢¨Äô À¡¢Á¡½ í ¸¨Çì ¨¸Â¡Ùõ§À¡Ð ´Õ Ó¨Èì Ì ¸ó¾ «Äì ´ù¦Å¡ýÈ¢ý «Ç×§¸¡ø¸¨Ç Áü¦È¡Õ Ó¨Èì Ì ¸ó¾ «Äì «Ç×§¸¡ø¸Ç¢ý Á¼í¸¡¸ Á¡üÈ¢¼, Ó¾øÓ¨ÈÂ¢ý «Äì «Ç×§¸¡ø ´ù¦Å¡ý ¨ÈÔõ «¾üÌ ²üÈ ÀÕô¦À¡Õ¨Çî º¡÷ó¾ Å¢¸¢¾Á¾¢ôÒ ´ýÈ¡ø ¦ÀÕì¸¢¼ §Å ñ Î õ. «ô§À¡Ð À¨ÆÂÓ¨ÈÂ¢ø ÀÂýÀÎò¾¢ôÀð¼ «Äì «Ç×§¸¡ø¸û «¨ É òÐõ ¿¡ì¸ôÀð Î (cancel) Ò¾¢ÂÓ¨È «Äì - «Ç×§¸¡ø¸Ùì Ì ¸ó¾ ¦¸Øì¸Ç¡ø º¡÷ó¾ Ã¡º¢Â¢ý Á¾¢ô¨Àô ¦ÀÈÄ¡õ. ±Î òÐì ¸¡ð¼¡¸, À¢¡¢ð¼ý Ó¨ÈÂ¢ø, ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý «Äì $\frac{1\text{அடி}}{1\text{வினாடி}}$ ¬ Ìõ. þí Ì «Ê «Ç×§¸¡¨Ä, ¦º.Á. «Ç×§¸¡Ä¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ô À¢ý ÅÕÁ¡Ú Á¡üÈ¢¼ ÓÊÔõ:

(¾¢¨º§Å¸õ) = $\frac{1\text{அடி}}{1\text{வினாடி}}$

$$= \frac{[1\text{ அடி}]\left[\frac{30.5\text{ செ.மீ}}{1\text{ அடி}}\right]}{1\text{ வினாடி}}$$

$$=30.5\left[\frac{1\text{செ.மீ}}{1\text{வினாடி}}\right]$$

ÀÊò¾Ã «Ä¸¢ø $=30.5\left[\frac{10^{-2}\text{மீ}}{1\text{வினாடி}}\right]$ ¬ Ìõ.

§ÁÖõ À¢¡¢ð¼ý Ó¨ÈÂ¢ø ¾¢¨º§Å¸õ Å¢É¡Êì Ì 22 «Ê¸Ç¡É¡ø, «¨¾ ¦Áð¡¢ì Ó¨ÈÂ¢ø À¢ýÅÕÁ¡Ú «È¢Å¢ì¸Ä¡õ.

$$[\text{¾¢¨º§Å¸õ}] = 22\left[\frac{1\text{அடி}}{1\text{வினாடி}}\right]$$

$$\frac{22[1\text{ «Ê}]\left[\frac{30.5\text{ ¦º.Á}}{1\text{ «Ê}}\right]}{1\text{ Å¢É¡Ê}}$$

$$=22\times30.5\left[\frac{1\text{ ¦º.Á}}{1\text{ Å¢É¡Ê}}\right]$$

ÀÊò¾Ã «Ä¸¢ø $=22\times30\left[\frac{10^{-2}\text{மீ}}{1\text{வினாடி}}\right]$

þí Ì «Äì - «Ç×§¸¡ø¸¨Çô Ò¾¢ÂÓ¨Èì Ì ²üÈÅ¡Ú Á¡üÈ¢Ôõ§À¡Ð, ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ «È¢Å¢ì Ìõ ±ñ ½¡É '22' Á¡ÚÅ¾¢ø¨Ä ±ýÀ¨¾ì ¸Å É¢ì¸ §Å ñ Î õ.

1.5 (1) ÅÆ¢Åó¾ þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½ í ¸¨Ç Å¨ÃÂÚò¾ø

Q ±ýÀÐ ÅÆ¢Åó¾ ´Õ þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¨Âì ÌÈ¢ì¸ð Î õ. Qì Ì ¯¸ó¾ À¡¢Á¡½ í ¸¨Ç «ÊôÀ¨¼ô À¡¢Á¡½ «Äì «Ç×§¸¡ø¸Ç¢ý ÀÊ¸Ç¡ø (powers)

À¢ý ÅÕÁ¡Ú ±Ø¾Ä¡õ.

$$[Q] = \left[L^x M^y T^z\right] = \left[\text{நீ}^x \text{நி}^y \text{கா}^z\right]$$

þí Ì x,y,z ±ýÀÉ ÀÊô¦ÀÕì¸ ±ñ¸û. «¨Å §¿÷, ±¾¢÷ ÌÈ¢Ô¨¼ÂÉÅ¡¸§Å¡, À¢ýÉÁ¡¸§Å¡ þÕì¸Ä¡õ. §ÁÖõ Q Ã¡º¢Â¢ý À¡¢Á¡½í¸û ¿¦Çò¾¢ø x-ÀÊ, ¿¢¨ÈÂ¢ø y-ÀÊ, §¿Ãò¾¢ø z-ÀÊ ¬¸¢ÂÅüÈ¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ ±É ×õ ÜÈÄ¡õ.

´Õº¢Ä Óì¸¢Â ÅÆ¢Åó¾ Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½ í¸¨Çì ¸½ì¸¢Î§Å¡õ.

1. ÀÃôÒ (Area): ¿¦Çõ, «¸Äõ, ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕì¸üÀÄÉ¡ø ÀÃôÀÇ× «ÇÅ¢¼ôÀÎ Å¾¡ø, ÀÃôÀÇÅ¢ý À¡¢Á¡½í¸û $[L^2]$ ¬Ìõ.

   $$[\text{ÀÃôÀÇ×}] = [\text{¿¦Çõ} \times \text{«¸Äõ}] = [L \times L] = \left[L^2\right]$$

2. ÀÕÁý (Volume): ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ÀÕÁý, «¾ý ¿¦Ç, «¸Ä, ¯ÂÃí¸Ç¢ý ¦ÀÕì¸üÀÄÉ¡ø «ÇÅ¢¼ôÀÎ Å¾¡ø, ÀÕÁÉ¢ý À¡¢Á¡½í¸û $\left[L^3\right]$ ¬Ìõ.

   ÀÕÁý = [¿¦Çõ X «¸Äõ X ¯ÂÃõ]

   $$= [L \times L \times L]$$

   $$= \left[L^3\right]$$

3. «¼÷ò¾¢ (Density): ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý «¼÷ò¾¢ «¾ý µÃÄÌ ÀÕÁÉ¢ý ¿¢¨ÈÂ¡Ìõ.

   $$[\text{«¼÷ò¾¢}] = \left[\frac{\text{¿¢¨È}}{\text{ÀÕÁý}}\right] = \left[\frac{M}{L^3}\right] = \left[ML^{-3}\right]$$

4. ¾¢¨º§Å¸õ (Velocity): þÐ µÃÄÌ §¿Ãò¾¢ø ¦ÀÚõ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢Â¡Ìõ.

   $$[\text{¾¢¨º§Å¸õ}] = \left[\frac{\text{þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢}}{\text{§¿Ãõ}}\right] = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[LT^{-1}\right]$$

5. ÓÎì¸õ (Acceleration): þÐ µÃÄÌ §¿Ãò¾¢ø ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø ²üÀÎõ Á¡ÚÀ¡¼¡Ìõ.

   $$[\text{ÓÎì¸õ}] = \left[\frac{\text{¾¢¨º§Å¸õ}}{\text{§¿Ãõ}}\right] = \left[\frac{LT^{-1}}{T}\right] = \left[LT^{-2}\right]$$

6. ¯ó¾õ (Momentum): ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ¯ó¾õ, «¾ý ¿¢¨È, ¾¢¨º§Å¸õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕì¸üÀÄÉ¡ø «ÇÅ¢¼ôÀÎõ.

   $$[\text{உந்தம்}] = [\text{நிறை} X\ \text{திசைவேகம்}]$$

   $$= \left[M \times LT^{-1}\right]$$

   $$= \left[MLT^{-1}\right]$$

7. Å¢¨º (Force): Å¢¨ºÂ¡ÉÐ, ¿¢äð¼É¢ý þÃñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ, ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È, ÓÎì¸õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕì¸üÀÄÉ¡ø «ÇÅ¢¼ôÀÎõ. ±É§Å,

[Å¢¨º]=[¿¢¨ÈXÓ Î ì¸õ]

$= [M \times LT^{-2}]$

$= [MLT^{-2}]$

8. ¾¡ì Ì (Impulse): ¾¡ì Ì ±ýÀÐ Å¢¨º ÁüÚõ §¿Ãõ þ¨Å¸Ç¢ý ¦ÀÕì¸üÀÄÉ¡ø «ÇÅ¢¼ôÀÎõ. ±É§Å,

¾¡ì Ì Å¢¨º×§¿Ãõ

[¾¡ì Ì]=[Å¢¨º×§¿Ãõ]

$= [MLT^{-2} \times T]$

$= [MLT^{-1}]$

$[MLT^{-1}]$

[¾¡ì Ì, ¯ó¾õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý À¡¢Á¡½í¸û ºÁÁ¡¸ þÕôÀ¨¾ì ¸¡ñ¸]

9. §Å¨Ä (work)

§Å¨Ä=Å¢¨ºXÅ¢¨º î ¦ºÂüÀÎ õûÇ¢¿¸Õõ ¦¾¡¨Ä×

[§Å¨Ä]=[Å¢¨ºxÅ¢¨º î ¦ºÂüÀÎ õûÇ¢¿¸Õõ ¦¾¡¨Ä×]

$= [MLT^{-2} \times L]$

$= [ML^2T^{-2}]$

10. þÂì¸ ¬üÈø [Kinetic Energy]

þÂì¸ ¬üÈø = $\frac{1}{2}$ × ¿¢¨È x(¾¢¨º§Å¸õ)^2

[¬üÈø]= [¿¢¨È x (¾¢¨º§Å¸õ)^2]

$= [M \times (LT^{-1})^2]$

$= [ML^2T^{-2}]$

[§Å¨Ä, ¬üÈø ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý À¡¢Á¡½í¸û ºÁÁ¡¸ þÕôÀ¨¾ì ¸¡ñ¸]

11. ¾¢Èý (Power): ¾¢Èý ±ýÀÐ µÃÄÌ §¿Ãò¾¢ø ¦ºöÂôÀð¼ §Å¨Ä.

¾¢Èý = ¦ºöÂôÀð¼ §Å¨Ä / §¿Ãõ

[¾¢Èý] = [¦ºöÂôÀð¼ §Å¨Ä / §¿Ãõ]

$= \left[\frac{ML^2T^{-2}}{T}\right]$

$= [ML^2T^{-3}]$

12. §¸¡½õ (Angle): §¸¡½ò¨¾ §ÃÊÂÉ¢ø «ÇÅ¢Î õ§À¡Ð

§¸¡½õ(¯) = Åð¼Å¢ø / ¬Ãõ

±É§Å,

$$[§¸¡½õ] = \left[\frac{\text{வட்டவில்}}{\text{ஆரம்}}\right]$$

$$= \left[\frac{L}{L}\right]$$

$$= [L^{\circ}]$$

±É§Å, §¸¡½ò¾¢ü Ì ô À¡¢Á¡½ í ¸û ¸¢¨¼Â¡Ð.

13. §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ (Angular velocity): þÐ µÃÄ Ì §¿Ãò¾¢ø ¦À¡Õû ¦ÀÚõ §¸¡½ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢Â¡ Ì õ.

$$§¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ(\mu) = \left[\frac{§¸¡½õ}{§¿Ãõ}\right]$$

$$±É§Å\left[§¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ\right] = \left[\frac{§¸¡½õ}{§¿Ãõ}\right]$$

$$= \left[\frac{L^{\circ}}{T}\right]$$

$$= \left[T^{-1}\right]$$

14. §¸¡½ Ó Î ì ¸õ (Angular Acceleration):

þÐ µÃÄ Ì §¿Ãò¾¢ø §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø ²üÀ Î õ Á¡ÚÀ¡¼¡ Ì õ

$$§¸¡½ \; Ó Î ì ¸õ = \frac{§¸¡½ ò ¾¢¨º§Å¸ \; Á¡ÚÀ¡ Î}{§¿Ãõ}$$

$$±É§Å\left[§¸¡½ \; Ó Î ì ¸õ\right] = \left[\frac{§¸¡½ ò ¾¢¨º§Å¸ \; Á¡ÚÀ¡ Î}{§¿Ãõ}\right]$$

$$= \left[\frac{T^{-1}}{T}\right] = \left[T^{-2}\right]$$

15. ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô Òò¾¢È ý (Moment of inertia):

¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý = ¿¢¨ÈX(ÍÆüº¢ ¬Ãõ)^2

±É§Å

$$\left[\text{நிலைமத் திருப்புதிறன்}\right] = \text{நிறை} \times (\text{சுழற்சி ஆரம்})^2$$

$$= \left[M \times L^2\right]$$

$$= \left[ML^2\right]$$

16. §¸¡½ ¯ó¾õ (Moment of momentum) : ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý, §¸¡½ò ¾¢¨º§Å¸õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕ ì ¸üÀÄý §¸¡½ ¯ó¾õ ±É ôÀ Î õ.

$$[§¸¡½ ¯ó¾õ] = [¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò ¾¢Èý \times §¸¡½ ò ¾¢¨º§Å¸õ]$$

$$= \left[M L^2 \times T^{-1}\right]$$

$$= \left[M L^2 T^{-1}\right]$$

17. ¾¢ÕôÒ Å¢¨º (Torque)

±É§Å

¾¢Õôò Å¢¨º = (¿¢¨ ÄÁò ¾¢Õôòò¾¢È ý X §¸¡½ Ó Î ì ¸õ)

$$= \left[ML^2 \times T^{-2} \right]$$

$$= \left[ML^2 T^{-2} \right]$$

18. Â í Ì ½ ¸õ (Young modulus)

$$\text{யங்குணகம்} = \frac{\text{தகைவு}}{\text{திரிபு}}$$

$$= \frac{\text{விசை / பரப்பளவு}}{\text{நீள மிகுதிப்பாடு /மூல நீளம்}}$$

$$\text{யங்குணகம்} = \left[\frac{MLT^{-2} / L^2}{L / L} \right]$$

$$\left[ML^{-1} T^{-2} \right]$$

19. « Øò¾õ (Pressure):

« Øò¾õ ± ý ÀÐ µÃÄ Ì ÀÃôÀÇÅ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ §¿÷ì Ì òÐ Å¢¨º

$$[\text{« Øò¾õ}] = \left[\frac{\text{Å¢¨º}}{\text{ÀÃôÀÇ×}} \right]$$

$$= \left[\frac{MLT^{-2}}{L^2} \right]$$

$$= \left[ML^{-1} T^{-2} \right]$$

20. ÀÃôÒ þØÅ¢¨º (Surface Tension)

ÀÃôÒ þØÅ¢¨º ± ý ÀÐ ¾¢ÃÅò¾¢ ý ÀÃôÀ¢ø µÃÄ Ì ¿¦Çò¾¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢¨º

$$[\text{ÀÃôÒ þØÅ¢¨º}] = \left[\frac{\text{Å¢¨º}}{\text{¿¦Çõ}} \right]$$

$$= \frac{MLT^{-2}}{L}$$

$$= \left[MT^{-2} \right]$$

21. À¡¸¢Âø ± ñ (Coefficient of Viscosity)

$$\text{பாகியல் எண்} = \frac{\text{ஓரலகு பரப்பளவில் தொடுவரை விசை}}{\text{திசைவேக வாட்டம்}}$$

எனவே,

$$[\text{பாகியல் எண்}] = \left[\frac{\text{விசை/பரப்பளவு}}{\text{திசைவேகம்/ தொலைவு}} \right]$$

$$= \left[\frac{MLT^{-2} / L^2}{LT^{-1} / L} \right]$$

$$= \left[ML^{-1} T^{-1} \right]$$

22. ¦Åð Î ò ¦¾¡ Î Å¢¨º (Shear Stress):Ss

¦Åð Îò ¦¾¡ÎÅ¢¨º ±ýÀÐ µÃÄÌ ÀÃôÀÇÅ¢ø ¦ºÂüÀÎõ ¦¾¡ÎÅ¢¨º.

(¦Åð Îò ¦¾¡ÎÅ¢¨º) = [¦¾¡ÎÅ¢¨º / ÀÃôÀÇ×] = $\left[\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right] = \left[ML^{-1}T^{-2}\right]$

23. ÓÚìÌò ¾¢Èý (Torque)- Tq

´Õ ¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º, ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢Â¢ø ¦À¡Õ¨Çî ÍÆÄî¦ºöÔõ ¦ºÂ§Ä ÓÚìÌò ¾¢ÈÉ¡Ìõ. þÐ Å¢¨º ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢ìÌõ Å¢¨º ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊüÌ ÓûÇ ¦ºíÌòÐò¦¾¡¨Ä× ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕìÌò ¦¾¡¨¸Â¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

[ÓÚìÌò¾¢Èý] = (Å¢¨º ¾¢ÕôÒò¾¢Èý)

= (Å¢¨º x ¦¾¡¨Ä×) = $\left[MLT^{-2} \times L\right] = \left[ML^{2}T^{-2}\right]$

1.6 «Ä Ì ¸Ç¢ý «¨Áôò¸ Ù õ, Å¢¨ºÂ¢ý ¦À¡Ð Ì §¸¡ðÀ¡ Î õ (Systems of Units and Concept of a Force)

1.6 (1) º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¸Ç¢ý «¨Áôò (Absolute System of Units)

¿¦Çõ, ¿¢¨È, §¿Ãõ ¬¸¢Â Ã¡º¢¸Ç¢ý «ÊôÀ¨¼ô À¡¢Á¡½ í ¸Ç¡ø Áü¦ÈøÄ¡ þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½ í ¸¨Çì ¸½ì¸¢¼ ÓÊÔõ. «ÊôÀ¨¼ «Ä Ì ¸û ±øÄ¡ þ¼í ¸Ç¢Öõ ´§ÃÁ¡¾¢¡¢Â¡È ¦À¡ÕûÀ Î õ Å ¨ ¸Â¢ø ÀÂ ýÀ Î ò¾ôÀ Î Å¾¡ø «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢¸Ç¢ý «Ä Ì û º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¸Ç¡ ì ¦¸¡ûÇôÀ Î õ. ¿¦Çõ, ¿¢¨È, §¿Ãõ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ü Ì ¡¢Â º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì û ´Õ º¡÷À¢Ä¡ «¨Áô¨À Å¨ÃÂÚì Ì õ. þ î º¡÷À¢Ä¡ «¨Áôò Ó¨ÈÂ¢ø Å¢¨ºÂ¡ÉÐ º¡÷ó¾ Ã¡º¢Â¡¸ì ¸Õ¾ôÀ Î õ. ±É§Å Å¢¨ºÂ¢ý À¡¢Á¡½ í ¸¨Ç «ÊôÀ¨¼ì º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¸Ç¢ý À¡¢Á¡½ í ¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

¿¢äð¼É¢ý þÃñ¼¡ÅÐ þÂì¸ Å¢¾ôÀÊ
Å¢¨º = ¿¢¨È XÓ Î ì ¸õ ¬ Ìõ

±É§Å

[Å¢¨º] = [¿¢¨È XÓ Î ì ¸õ]

$= \left[M \times LT^{-2} \right]$

$= \left[MLT^{-2} \right]$ ¬ Ìõ.

¦Áð¡¢ì ÀÊò¾Ã Ó¨È¨Â Ì ¨ ¸Â¡ Ù õ§À¡Ð ¿¢¨È 1 ¸¢.¸¢;
Ó Î ì ¸õ = 1 Á£./Å¢² ±ýÈ¡Å¾¡ø,

Å¢¨º = ¿¢¨È XÓ Î ì ¸õ

= 1 ¸¢.¸¢ x 1Á£ / Å¢²

= 1(¸¢.¸¢ x 1Á£ / Å¢²) ¬ Ìõ.

Å¢¨ºÂ¢ý À¡¢Á¡½ í ¸û, (¸¢.¸¢.Á£./Å¢²)±ýÚ ¬Å¾¡ø Å¢¨º, «¾ý «Ä ¸¢ø (¸¢.¸¢.Á£/Å¢²) ±ýÈ¡ Ìõ. ±É§Å µÃÄ Ì ¿¢¨ÈÔûÇ ¦À¡Õû ´ ýÈ¢ýÁÐ ¦ºÂøÀð Î «ô¦À¡ÕÇ¢ø ¾ý ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â µÃÄ Ì Ó Î ì ò¨¾ ²üÀ Î òÐõ Å¢¨º ´ÕÅ¢¨ºÂ¡ Ìõ(one unit of force). ¦Áð¡¢ìÓ¨ÈÂ¢ø Á£ð¼÷, ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ, Å¢É¡Ê ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ÀÊò¾Ã º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¸Ç¢ø, Å¢¨ºÂ¢ý º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì, ¿¢äð¼ý ±ÉôÀ Î Å¾¡ Ìõ.

1 ¿¢äð¼ý = (1 ¸¢.¸¢) (1Á£/Å¢²)

¦Áð¡¢ì '¦º.Á£.¸¢Ã¡õ, Å¢É¡Ê' Ó¨È¢ø Å¢¨ºÂ¢ý º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¨¼ý (Dyne) ±ÉôÀ Î õ. «¾¡ÅÐ ´Õ¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÔûÇ ¦À¡Õ¨Ç¢ý ÁÐ ¦ºÂüÀð Î «ô¦À¡ÕÇ¢ø, ¾ý ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â (1 ¦º.Á£/Å¢²) Ó Î ì ¸ò¨¾ Å¢¨ÇÅ¢ì Ì õ Å¢¨º ´Õ ¨¼ý Å¢¨ºÂ¡ Ìõ.

«ùÅ¡§È À¢¡¢ð¼ý Ó¨È¢ø Å¢¨ºÂ¢ý º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì À× ñ¼ø (Poundal) ¬ Ìõ. ´ÕÀ× ñ Î ¿¢¨ÈÔûÇ ¦À¡Õ¨Ç¢ýÁ£Ð ¦ºÂüÀð Î, «ô¦À¡ÕÇ¢ø ¾ý ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â, (1«Ê/Å¢²)Ó Î ì ¸ò¨¾ Å¢¨ÇÅ¢ì Ì õ Å¢¨º ´Õ À× ñ¼ø Å¢¨ºÂ¡ Ìõ.

º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¸Ç¢ý Á¾¢ôò¸û ±øÄ¡ þ¼í ¸Ç¢Öõ ´§Ã «ÇÅ¡É ¨ ÅÂ¡¸ ×õ, òÅ¢Á£÷ôò Å¢¨ºÂ¡ø À¡¾¢ì ¸ôÀ¼¡¾Ðõ ¯ûÇÉ.

º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¸Ç¢ý «¨ÁôòÓ¨È, þÂüÀ¢Âø þÃº¡ÂÉò Ð¨È¸Ç¢ø À¢ýÀüÈôÀ Î ¸¢ÈÐ.

º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¨Çò ¾ØÅ¢Â «¨Áôò Ó¨È¸Ç¢ý «ð¼Å¨½ À¢ýÅÕÁ¡Ú:

À¡¦Á¡ ½ í ¸ û	¦Áð¡¢ì º¡÷À¢Á¡ Ó ¨ È		À¢¡¢ð¼ ý º¡÷À¢Ä¡ Ó ¨ È
	ÁÈò¾¢Á « Ä Ì ¸ û MKS	« ÈôÀ ¨ ¼ « Ä Ì ¸ û CGS	FPS
அடிப் படைப் பரிமாணங்கள் } நீளம்(L) = நிறை(M) காலம்(T)	Á¦ð¼÷ (m)-Á¦ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ(¸ ¢ ¸ ¢) Å¢É¡Ê(s) Å¢	¦ º ý Ç¦ð¼÷ (cm) ¸¢Ã¡õ-gm Å¢É¡Ê-s	« Ê (ft) À× ñ Î - lb Å¢É¡Ê (s)
ÅÆ¢Åó¾ À¡¢Á¡ ½ í ¸ û விசை $=\left[MLT^{-2}\right]$	¿¢ä ð¼ý $\left(kg-m/s^{2}\right)$ (கி.கி.மீ/வி²)	¨ ¼ ý $\left(gm.cm/s^{2}\right)$ (கி.செ.மீ/வி²)	À× ñ ¼ø $\left(lb.ft/s^{2}\right)$ (பவு.அ/வி²)

1.6 (2) ÒÅ¢Â÷ôÒ º¡÷ó¾ « Ä Ì ¸ û (Gravitational Units)

þ í Ì « Ä Ì ¸ Ç¢ ý « Ç× Á¾¢ôÒ¸ û ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢ ¨ º ¨ Â î º¡÷óÐ ûÇ É. ¦À¡È¢Ñ ðÀò Ð ¨ È ¸ Ç¢ø þ ùÅ¢¾ « Ä Ì ¸ û ÀÂ ý À Î ò¾ôÀ Î ¸ ¢ ý È É.

þõÓ ¨ ÈÂ¢ø Å¢ ¨ º, ¿¢Ç õ, §¿Ãõ ¬ ¸ ¢Â ¨ Å « ÊôÀ ¨ ¼ « Ä Ì ¸ Ç¡ ¸ ² ü ¸ ôÀ Î õ. ¿¢ ¨ È º¡÷ó¾ « Ä ¸ ¡ ¸ Ì Ã¢ò¾ôÀ Î õ. ¬ É ¡ø º¡÷À¢Ä¡ « ¨ Áôò Ó ¨ ÈÂ¢ø ÀÂ ý À Î ò¾ôÀð¼ ¿¢Çõ, §¿Ãõ ¬ ¸ ¢Â « ÊôÀ ¨ ¼ Ã¡º¢ ¸ Ù ì Ì ¯ ¸ ó¾ º¡÷À¢Ä¡ « Ä Ì ¸ §Ç þõÓ ¨ ÈÂ¢Öõ ²ü ¸ ôÀ Î ¸ ¢ ý È É. ÒÅ¢Â÷ôÒ ¸ ¡Ã½Á¡ ¸ µÃÄ Ì ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ¦À¡ÕÇ¢ýÁ£Ð ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º, ÒÅ¢Â÷ôÒ º¡÷ó¾ µÃÄ Ì Å¢ ¨ ºÂ¡ Ì õ(one unit of force)

“Á¦ð¼÷ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ - Å¢É¡Ê” ± ý È ¦Áð¡¢ì Ó ¨ ÈÂ¢ø ÒÅ¢ÂÃôÒ º¡÷ó¾ µÃÄ Ì Å¢ ¨ º ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ ± ¨ ¼ (Kilogram weight) ±ÉôÀ Î õ, ´Õ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ýÁ£Ð ¦ºÂüÀ Î õ ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢ ¨ º ´Õ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ ± ¨ ¼Â¡ Ì õ (Kgf)

´ù¦Å¡Õ þ¼ò¾¢Öõ µÃÄ Ì ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ¦À¡Õû ¾í Ì ¾ ¨ ¼Â¢ýÈ¢ ¾¡§É Å¢Øõ§À¡Ð (Freely falling body), ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢ ¨ ºÂ¢É¡ø g « Ä Ì Ó Î ì ¸ ò ¨ ¾ô ¦ÀÚÅ¾¡ø, ÒÅ¢Â÷ôÒ º¡÷ó¾ µÃÄ Ì Å¢ ¨ º, g º¡÷À¢Ä¡ « Ä Ì ¸ Ù ì Ì ºÁÁ¡ Ì õ. ±É§Å “Á¦ð¼÷ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ - Å¢É¡Ê” Ó ¨ ÈÂ¢ø (MKS System), 1 ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ ± ¨ ¼ = g ¿¢äð¼ý ¸ Ç¡ Ì õ. ¬ ¾¡Å¡ø µÃÄ Ì (¸ ¢. ¸ ¢) ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ¦À¡Õû ¾í Ì ¾ ¨ ¼Â¢ýÈ¢ ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢ ¨ ºÂ¢É¡ø Å¢Øõ§À¡Ð, Å¢Øõ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø (g Á¦/Å¢^{2}) « Ä Ì Ó Î ì ¸ ò ¨ ¾ô ¦ÀÚÅ¾üÌ ¡¢Â ÒÅ¢Â÷ôÒ º¡÷ó¾ µÃÄ Ì Å¢ ¨ º, ´Õ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ ± ¨ ¼ ±ÉôÀ Î õ. «¾¡ÅÐ ÒÅ¢Â÷ôÀ¡ø, ²¾¡Å¦¾¡Õ þ¼ò¾¢ø ´Õ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ¦À¡Õû ´ ý È¢ø, (g Á¦/Å¢^{2}) « Ä Ì Ó Î ì ¸ ò ¨ ¾ ² üÀ Î òÐÅ¾üÌ ¡¢Â Å¢ ¨ º « Ä Ì ´Õ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ Å¢ ¨ º ± É ì ¸ Õ¾ôÀ Î õ.

« ùÅ¡§È, "¦ º ý ÊÁ¦ð¼÷ - ¸¢Ã¡õ - Å¢É¡Ê" ¦Áð¡¢ì Ó ¨ ÈÂ¢ø Å¢ ¨ ºÂ¢ ý ÒÅ¢Â÷ôÒ º¡÷ó¾ « Ä Ì ¸¢Ã¡õ ± ¨ ¼ ±ÉôÀ Î õ. ´Õ ¸¢Ã¡õ ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ¦À¡Õû ´ ý È¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢ ¨ º, ´Õ ¸¢Ã¡Á ± ¨ ¼Â¡ Ì õ. ÒÅ¢Â÷ôÒ º¡÷ó¾ µÃÄ Ì Å¢ ¨ º, g º¡÷À¢Ä¡ « Ä Ì ¸ Ù ì Ì î ºÁÁ¡ Ì õ. ¬ ¾¡Å¡ø, "¦ º.Á¦ - ¸ ¢ - Å¢É¡Ê" Ó ¨ ÈÂ¢ø (CGS - System)

1 ¸¢Ã¡õ ± ¨ ¼ = g ¨ ¼ ý ¸ Ç¡ Ì õ.

À¦¡¦ð¼ýÓ¨ÈÂ¦ø, Å¦¨ºÂ¦ý ÒÅ¦Â÷ôÒ º¡÷ó¾ «ÄÌ À×ñÎ ±¨¼ ±ÉôÀÎõ. ´Õ À×ñÎ ¿¦¨ÈÔûÇ ¦À¡ÕÇ¦ýÁÐ ¦ºÂüÀÎõ ÒÅ¦Â÷ôÒ Å¦¨º ´Õ À×ñÎ ±¨¼Â¡Ìõ, ±É§Å,

1 À×ñÎ ±¨¼ = g À×ñ¼ø¸Ç¡Ìõ.

g ý Á¾¦ôÒ þ¼ò¾¦ü¸¦¼õ Á¡ÚÀÎÅ¾¡ø, ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ±¨¼, ¸¦Ã¡õ ±¨¼, À×ñÎ ±¨¼ ¬¸¦ÂÅüÈ¦ý Á¾¦ôÒì¸Ùõ þ¼ò¾¦ü¸¦¼õ Á¡ÚÀÎõ.

¿¦¨È¨Â, µ÷º¡÷ó¾Ã¡º¦Â¡¸ì ¸Õ¾¦É¡ø, «¾ý À¡¦Á¡½í¸û ¿¦äð¼É¦ý þÃñ¼¡ÅÐ Å¦¾¦ôÀÊ,

$$[¿¦¨È] = \left[\frac{Å¦¨º}{ÓÎì¸õ}\right] = \frac{[F]}{[LT^2]} = [FL^{-1}T^2]$$ ¬Ìõ.

Å¦¨º, ¿¦Çõ, §¿Ãõ ¬¸¦ÂÅü¨È «ÊôÀ¨¼Ã¡º¦¸Ç¡¸ §Áü¦¸¡û Ùõ§À¡Ð, Å¦¨ºÂ¦ý º¡÷À¦Ä¡ «ÄÌ, ´Õ ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ Å¦¨º ±Éì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. «ô§À¡Ð, ¿¦¨ÈÂ¦ý º¡÷À¦Ä¡ «ÄÌ, ´Õ ŠÄì(Slug) ±ÉôÀÎõ.

´Õ ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ Å¦¨º ´Õ ¦À¡ÕÇ¦ý§Áø ¦ºÂøÀðÎ ¾ý ¾¦¨ºÂ¦§Ä§Â «ô¦À¡ÕÙìÌ (1 Á/Å¦^{2})ÓÎì¸ò¨¾ Å¦¨ÇÅ¦ìÌÁ¡É¡ø, «ô¦À¡ÕÇ¦ý ¿¦¨È «Ç× ´Õ "¦Áð¡¦ì ŠÄì" ±É, ¿¦äð¼É¦ý þÃñ¼¡ÅÐ Å¦¾¦ôÀÊ Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ. «¾¡ÅÐ, ¿¦äð¼É¦ý Å¦¾¦ôÀÊ,

F = m.a

þíÌ F = 1 ¸¦.¸¦.Å¦¨º; a =1Á/Å¦^{2} ±ýÈ¡Å¾¡ø m = 1 ¬Ìõ

±É§Å ¿¦¨È = 1 ¦Áð¡¦ì ŠÄì ¬Ìõ.

¿¦äð¼É¦ý Å¦¾¦ôÀÊ, ´Õ ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ Å¦¨º, ´Õ ¦Áð¡¦ì ŠÄì ¿¦¨ÈÔûÇ ¦À¡ÕÇ¦ø ¦ºÂüÀÎõ§À¡Ð, ¾ý ¾¦¨ºÂ¦ø «ô¦À¡ÕÙìÌ, 1Á/Å¦^{2} ÓÎì¸ò¨¾ Å¦¨ÇÅ¦ìÌõ. ¬É¡ø, ÒÅ¦Â÷ôÒ Å¦¾¦ôÀÊ, 1 ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ Å¦¨º ,1 ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ¿¦¨ÈÔûÇ ¦À¡ÕÇ¦ø g Á/Å¦^{2} ÓÎì¸ò¨¾ Å¦¨ÇÅ¦ì¸¦ýÈÐ. ¬¾Ä¡ø,

1 ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ Å¦¨º =(1 ¦Áð¡¦ì ŠÄì)(1Á/Å¦^{2}) = (1¸¦.¸¦) (g Á/Å¦^{2})

1.6 (3) ´Õ ¦À¡ÕÇ¦ý ¿¦¨ÈÔõ, ±¨¼Ôõ

´Õ ¦À¡ÕÇ¦ý ¿¦¨È (Mass) «¾¦Ä¼í¸¦Â ¦À¡Õñ¨ÁÂ¦ý (Matter) «ÇÅ¡Ìõ. þ¨¾ò ¦¾Ç¦×ÀÎò¾¦ì ÜÈ ¿¦äð¼É¦ý þÃñ¼¡ÅÐ Å¦¾¦ôÀÊ F = m a ±ýÈ¡Å¾¡ø $a = \frac{F}{m}$ ¬Ìõ. ¬¾Ä¡ø ´Õ ÌÈ¦ôÀ¦ð¼Å¦¨º ¦À¡Õû ´ýÈ¦ýÁÐ ¦ºÂüÀÎõ¦À¡ÕÇ¦ð ¦À¡ÕÇ¦ø ²üÀÎõ ÓÎì¸õ «¾ý ¿¦¨ÈìÌ ±¾¦÷Å¦¸¦¾ò¾¦ÖûÇÐ. §ÁÖõ ¦À¡ÕÇ¦ý ¿¦¨È «¾¦¸Á¡¸ þÕìÌõ§À¡Ð «Ð ¾ý ¿¦¨Ä¨Â ±Ç¾¦ø Á¡üÈ¦ì¦¸¡ûÅ¾¦ø¨Ä. ¬¾Ä¡ø ´Õ ¦À¡ÕÇ¦ý ¿¦¨È ±ýÀÐ «ô¦À¡ÕÇ¢û ¾ý¿¦¨Ä¨Â Á¡üÈ¦ì¦¸¡ûÅ¾¦ø ¸¡ðÎõ ¾¾ì¸ò¾¦ý «Ç¨Å «øÄÐ «¾¦Ä¼í¸¦ÔûÇ ¿¦¨ÄÁò¾¦ý ((inertia) «Ç¨ÅìÌ ÌÈ¦ì¸¦ÈÐ. ¿¦¨ÈìÌ ±ñ Á¾¦ôÒ ÁðÎ§Á¯ñÎ. «Ð ±ô§À¡Ðõ Á¡È¡¾Ð. ±É§Å ¿¦¨È ´Õ ±ñ ½¦ (scalar) ¬Ìõ. ´Õ ¦À¡ÕÇ¦ý ±¨¼ «ô¦À¡ÕÇ¦ý ÁÐ ¦ºÂüÀÎõ ÒÅ¦Â÷ôÒ Å¦¨ºÂ¡Ìõ. ´Õ ¦À¡ÕÇ¦ý ¿¦¨È m ¬¸×õ ÒÅ¦Â÷ôÒ ÓÎì¸õ g ¬¸×õ þÕôÀ¦ý «¾ý ±¨¼ º¡÷À¦Ä¡ «ÄÌ¸Ç¦ø W= mg ¬Ìõ.

$$\therefore \text{m} = \frac{W}{g}$$

ÒÅ¦Â÷ôÒ ÓÎì¸õ þ¼ò¾¦ü¸¦¼õ Á¡ÚÀÎÅ¾¡ø ¦À¡ÕÇ¦ý ±¨¼Ôõ Á¡ÚÀ¼ìÜÊÂÐ. ¬É¡ø ¦À¡ÕÇ¦ý ¿¦¨È ±ùÅ¦¼ò¾¦Öõ Á¡È¡¾ ±ñ ½¡Ìõ.

´Õ ÌÈ¦ôÀ¦ð¼ þ¼ò¾¦ø ´Õ¦À¡ÕÇ¦ý ±¨¼¨Â w ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ Å¦¨ºÂ¡¸×õ (kgf) «ùÅ¦¼ò¾¦ý ÒÅ¦Â÷ôÒ ÓÎì¸õ g Á£ð¼÷/(Å¦É¡Ê^2) (m/s^2)

¬ ¸×õ þÕì Ì Á¡É¡ø ¿¢ä ð¼É¢ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ
w (¸¢.¸¢ Å¢¨º) = m(¦Áð¡¢ì ŠÄì) X g(Á¡/Å¢^{2}) ¬ Ì õ.

±É§Å ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È¨Â Å ¨ÃÂÚì Ì õ ºÁýÀ¡ Î
¿¢¨È (¦Áð¡¢ì ŠÄì¸¢ø)= $\frac{W\ ¸¢.¸¢Å¢¨º}{g(Á¡/Å¢^2)}$ ¬ Ì õ.
1 ¦Áð¡¢ì ŠÄì = 9.81 ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÂ¡Å¾¡ø
¿¢¨È (¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡Á¢ø) = $\frac{W கி.கி விசை}{g(மீ/வி^2)} \times 9.81$ ஆகும்

1.6 (4) Å¢¨ºÂ¢ý µÃÄ Ì ì Ì ²üÈ Å¡öôÀ¡ Î (Formula for unit of force)

1 ¿¢ä ð¼ý ,	= (1 ¸¢.¸¢) x (1 Á¡/Å¢^{2})
	= 1000 x100 (¸¢Ã¡õ/¦º.Á¡/Å¢^{2})
	= 10^5(¸¢Ã¡õ .¦º.Á¡/Å¢^{2})
	= 10^5 ¨¼ý
1 À× ñ ¼ø	= (1 À× ñ Î) X (1 «Ê/Å¢^{2})
	= 454 ¸¢Ã¡õ X 30.5 ¦º.Á¡/Å¢^{2}
	= 1384.7 (¸¢Ã¡õ ¦º.Á¡/Å¢^{2})
	= 1384.7 ¨¼ý
1 ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ Å¢¨º	=1000 ¸¢Ã¡õ Å¢¨º
	=1000 ¸¢Ã¡õ ±¨¼
	=1000 X g ¨¼ý
	=1000 X 981 ¨¼ý
	=9.81 X 10^5 ¨¼ý
	=9.81 ¿¢ä ð¼ý
1 À× ñ Î Å¢¨º	=1 À× ñ Î ±¨¼
	=1 X g À× ñ ¼ø
	=1 X 32.2 À× ñ ¼ø
	=32.2 À× ñ ¼ø
	=32.2 X 1384.7 ¨¼ý
	=44587.34 ¨¼ý
	=0.4457834 X 10^5 ¨¼ý
	=0.4457834 ¿¢ä ð¼ý

1.7 À¡¢Á¡½ µ¡¢Âø ¿¢Â¾¢ (Law of Dimensional Homogeneity)

¿¡Çõ, ¿¢¨È, §¿Ãõ ¬¸¢ÂÅü¨È «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢¸Ç¡¸ì ¦¸¡ñ Î Áü¦ÈøÄ¡ þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸¨Ç þõ ãýÚ «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢¸Ç¢ý Å¡¢ÂÄ¡¸ô ¦ÀÈÄ¡õ. «ô§À¡Ð þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸Ç¢ý À¡¢Á¡½ í¸¨ÇÔõ, «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¢¸Ù ì Ì ¡¢Â À¡¢Á¡½ í¸Ç¢ý ãÄõ ¦¾¡¢Å¢ì¸Ä¡õ. §ÁÖõ þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸¨Ç ¦¾¡¼÷Ò À Î òÐõ ºÁýÀ¡ Î ¸¨Ç «¨ÁôÀ¾üÌõ ºÁýÀ¡ Î ¸¨Ç º¡¢À¡÷ôÀ¾üÌõ µ÷ «ÇÅ¡ð Î Ó ¨ÈÂ¡ÖûÇ «Ä ì ¸¨Ç Áü§È¡¢÷ «ÇÅ¡ð Î Ó¨Èì Ì Á¡üÚÅ¾üÌõ À¡¢Á¡½ í ¸û ÀÂýÀ Î ¸¢ýÈÉ.

1.7 (1) ºÁýÀ¡ Î ¸Ç¢ý «¨Áô¨Àô ¦ÀÚ¾ø

± Î òÐì ¸¡ð¼¡¸ º¢Ú Å¡î Í¸ Ù¼ý ÜÊÂ þÄ ° ºÄ¢ý (Simple pendulam) «¨Ä× §¿Ãò¾¢ü¸¡É ºÁýÀ¡ðÊý «¨Áô¨Àô ¦ÀÈ §Å ñ ÊÂ¢ÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ.

°ºÄ¢ý «¨Ä× §¿Ãõ, Å¡î Í¸¨Ç º¡÷ÀüÚ þÕì¸¢ÈÐ ±Éì ¦¸¡û§Å¡Á¡Â¢ý «Ð

(i) °ºø Ì ñ Êý ¿¢¨È(M),

(ii) ¸Â¢üÈ¢ý ¿¦Çõ(L),

(iii) ®÷ôÒ Ó Î ì¸õ ¬¸¢ÂÅü¨Èô ¦À¡ÚòÐ «¨ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ.

Q ±ýÀÐ ²¾¡Å¦¾¡Õ Ã¡º¢¨Âì ÌÈ¢ìÌ¦ÁýÈ¡ø «¾ý À¡¢Á¡½í¸¨Ç Å¨ÃÂÚìÌõ Å¡öôÀ¡Î $[Q]=[M^xL^yT^z]$ ±Éì ¦¸¡ ñ Î x,y,z ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý Á¾¢ôÒ¸¨Çì ¸½ì¸¢¼ ÓÊÔõ,

±É§Å þ í Ì «¨Ä× §¿Ãõ= k (¿¢¨È)^x(¿¦Çõ)^y(Ó Î ì¸õ)^z ¬ Ìõ, k,x,y,z ±ýÀÉ Á¡È¢Ä¢¸û.

«¾¡ÅÐ $T = KM^xL^y\left(LT^{-2}\right)^z$

$= KM^xL^{y+z}T^{-2z}$ ¬ Ìõ

þÕÒÈÓõ ¯ûÇ ´ò¾ Ã¡º¢¸Ç¢ý ÁÊô¦ÀÕì¸ ± ñ ¸¨Çî ºÁôÀÎòÐ§Å¡Á¡Â¢ý

$x = 0; y + z = 0; 2z = -1;$

அல்லது $x = 0; y = -z = \frac{1}{2}$ ஆகும்

எனவே $T = K\sqrt{1/g}$ ஆகும்

ký Á¾¢ô¨ô À¡¢Á¡½í¸Ç¢ý Ó¨ÈÂ¢ø ¸¡½ ÓÊÂ¡¨¸Â¡ø «¾ý Á¾¢ô¨À §º¡¾¨É Ó¨ÈÂ¢ø ¸¡½§Å ñ Îõ. «ùÅ¡Ú ¸½ì¸¢¼ôÀð¼ Á¾¢ôÒ 2® ¬ Ìõ.

±É§Å $T = 2®\sqrt{1/g}$

1-7 (2) þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸ Ù ì¸¢¨¼§ÂÔûÇ ¦¾¡¼÷¨ÀÎ º¡¢À¡÷ò¾ø

þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸¨Ç ¦¾¡¼÷ÒÀÎòÐõ ´Õ ºÁýÀ¡ð¨¼ô À¢ÈôÀ¢ì Ìõ§À¡Ð (Derived) ºÁýÀ¡ðÊý þÕ ÒÈí¸Ç¢Öõ À¡¢Á¡½í¸û ºÁÁ¡¸ þÕì¸§Å ñ Îõ. þÐ§Å À¡¢Á¡½ µ¡¢Âø ¿¢Â¾¢ ±Éì ÜÈôÀÎõ. «¾¡ÅÐ ¸½ì¸¢Âø Ó¨ÈÂ¢ø þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢¸Ç¢ý ¦¾¡¼÷¨À ¦ÅÇ¢ôÀÎòÐõ ºÁýÀ¡Î¸û ±øÄ¡Å¦¾¡ «ÇÅ¢ð Î Ó¨È¸ Ù ì Ìõ ¦À¡ÕóÐõ. þò¾òÐÅò¨¾ì ¦¸¡ ñ Î Ã¡º¢¸Ç¢ý ¦¾¡¼÷Ò ºÁýÀ¡Î¸û À¡¢Á¡½í¸Ç¢ý ´òÐûÇÉÅ¡ «øÄÐ ÓÃ ñ À ð Î ûÇÉÅ¡ ±É «È¢ÂÄ¡õ ±Î òÐì¸¡ð¼¡¸ $R = \frac{U^2 \sin 2\sim}{g_0}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ð¨¼ ±Î òÐì¦¸¡û§Å¡õ.

ºÁýÀ¡ðÊü¸¡É À¡¢Á¡½í¸¨Ç þÕÒÈí¸Ç¢Öõ ±Ø¾×õ. «ô§À¡Ð

$$[L] = \left[\frac{L}{T}\right]^2 \cdot \frac{L°}{\left[L/T^2\right]}$$

$$= \left[\frac{L^2}{T^2}\frac{T^2}{L}\right]$$

$$= [L]$$

À¡¢Á¡½í¸û ´òÐûÇÉ. ¬¾Ä¡ø $R = \frac{U^2 \sin 2\sim}{g_0}$ ±ýÈ ¿¢Â¾¢ º¡¢Â¡ÉÐ.

1.7(3) ´Õ þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢Â¢ý þÕ «ÇÅ¢ð Î Ó¨È¸Ç¢ý «Ä Ì¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼§ÂÔûÇ ¦¾¡¼÷ ¨ Àì ¸¡½ ø

¾¢ÈÉ¢ý ¦Áð¡¢ì_Ó ¨ ÈÂ¢ø ¿ ¨ ¼Ó ¨ È «Ä Ì ì Ì õ À¢¡¢ð¼ý Ó ¨ ÈÂ¢ø ¿ ¨ ¼Ó ¨ È «Ä Ì ì Ì õ ¯ ûÇ ¦¾¡¼÷ ¨ Àì ¸¡½ §Å ñ ÊÂ¢ÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. ¦Áð¡¢ì Ó ¨ ÈÂ¢ø ¾¢ÈÉ¢ý ¿ ¨ ¼Ó ¨ È «Ä Ì Å¡ð, À¢¡¢ð¼ý Ó ¨ ÈÂ¢ø ¿ ¨ ¼Ó ¨ È «Ä Ì ì Ì õ ¯ ûÇ ¦¾¡¼÷ ¨ Àì ¸¡½ §Å ñ ÊÂ¢ÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. ¦Áð¡¢ì Ó ¨ ÈÂ¢ø ¾¢ÈÉ¢ý ¿ ¨ ¼Ó ¨ È «Ä Ì Å¡ð, À¢¡¢ð¼ý Ó ¨ ÈÂ¢ø Ì ¾¢ ¨ Ãò¾¢Èý (Horse power)º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¸ Ù ì ¸¡É À¡¢Á¡½ í ¸ û Áð Î §Á «È¢ÂôÀ Î Å¾¡Öõ, þÕÓ ¨ ÈÂ¢Öõ ¿ ¨ ¼Ó ¨ È «Ä Ì ì Ì õ º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ì Ì õ ¯ ûÇ Å¢¸¢¾¾ í ¸ û ¦Åù§ÅÈ¡¸ þÕôÀ¾¡Öõ Ó¾Ä¢ø ¿ ¨ ¼Ó ¨ È «Ä Ì ¸ ¨ Çî º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì ¸Ç¡¸ Á¡üÈ¢ì ¦¸¡ûÇ§Å ñ Î õ.

¦Áð¡¢ì Ó ¨ ÈÂ¢ø ¾¢ÈÉ¢ý º¡÷À¢Ä¡ «Ä Ì P_1 ±ýÚõ À¢¡¢ð¼ý Ó ¨ ÈÂ¢ø P_2 ±ýÚõ ¦Áð¡¢ì Ó ¨ ÈÂ¢ø «ÊôÀ ¨ ¼ «Ä Ì ¸ ¨ Ç $L_1M_1T_1$ ±ýÚõ À¢¡¢ð¼ý Ó ¨ ÈÂ¢ø, $L_1M_1T_2$ ±ýÚõ ¦¸¡ûÇ×õ.

$$\frac{\text{´Õ Å¡ð}}{\text{´Õ Ì¾¢ ¨ Ãò ¾¢Èý}} = \frac{10^7 \text{ ±÷ Ì ¸ û / Å¢.}}{550 \text{ «Ê À× ñ Î ¸ û / Å¢.}}$$

$$= \frac{10^7 \text{ ±÷ Ì ¸ û / Å¢.}}{550 \times 32.2 \text{ À× ñ ¼ø ¸ û / Å¢.}}$$

$$\frac{10^7}{550\times 32.2}\times\frac{P_1}{P_2}$$

¬ É¡ø $\left[P_1\right] = \left[M_1 L_1^{\;2} T_1^{\;-3}\right]$

$$\left[P_2\right] = \left[M_2 L_2^{\;2} T_2^{\;-3}\right]$$

$$\frac{\text{´Õ Å¡ð}}{\text{´Õ Ì¾¢ ¨ Ãò ¾¢Èý}} = \frac{10^7}{550\times 32.2}\times\left[\frac{M_1}{M_2}\right]\times\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\times\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-2} \text{ ¬ Ì õ.}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\text{1 ¸¢Ã¡õ}}{\text{1À× ñ Î}} = \frac{1}{453.6}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\text{1 ¦º.Á¢}}{\text{1 «Ê}} = \frac{1}{30.48}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\text{1Å¢É¡Ê}}{\text{1Å¢É¡Ê}} = 1$$

$$\frac{\text{1Å¡ð}}{\text{1 Ì¾¢ ¨ Ãò ¾¢Èý}} = \frac{10^7.}{550\times 32.2}\times\frac{1}{453.6}\times\left(\frac{1}{30.48}\right)^2\times 1 = 0.0134$$

±É§Å 1 Å¡ð = 0.0134 Ì¾¢ ¨ Ãò ¾¢Èý «øÄÐ

1 Ì¾¢ ¨ Ãò ¾¢Èý .= 746.2 Å¡ð Î ¸ û.

1.8 ± ñ ½¢ ¸ Ù õ, ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ù õ (Scalars and vectors)

¦ÀÇ¾¢ ¸ Ã¡º¢ ¸Ç¢ý «Ä Ì «Ç ¨ Å ¸ ¨ ÇÔõ, À¡¢Á¡½ í ¸ ¨ ÇÔõ «È¢ÅÐ Áð Î Á ýÈ¢ ÁüÈ ¾¢ ¨ º ¨ Â ¨ Á ¸ û ²üÀ¼¼ Ì Ü Î õ. ¦ÀÇ¾¢ ¸ Ã¡º¢ ¸Ç¢ø ºÄÅü ¨ È « ¨ Å ¸ Ù ì Ì ¸ó¾ «Ä Ì ¸Ç¢ý «Ç ¨ Å ¸ ¨ Çì ¦¸¡ ñ Î õ, « ¨ Å ¸Ç¢ý À¡¢Á¡½ í ¸ ¨ Çì ¦¸¡ ñ Î õ Å ¨ ÃÂÚì ¸ ÓÊÔõ. ± Î òÐì ¸¡ð¼¡¸ ´Õ ¬ §Ã¡ì ¸¢ÂÓûÇ Ì Æó ¨ ¾ ¯ ¼Ä¢ý ¦ÅôÀ¿¢ ¨ Ä 98.4°F ±É ì Ì È¢ôÀ¢ Î Å¾¡ø, ¦ÅôÀ¿¢ ¨ ÄÂ¢ý «ÇÅ Î õ ¾ý ¨ Á ì Ì Ã¢ Áð Î §Á ºÈ¢ôÀ¢Ä¢õ¼õ «Ç¢ì ¸ ôÀ Î ûÇÐ. ¦ÅôÀ¿¢ ¨ Ä ¨ Â Ì È¢ôÀ¾¡ø ± ñ Á¾¢ôÒ Óì ¸¢ÂÁÇ¢ÒÅõ

¦ÀÚ¸¦ÈÐ. «ÇÅ¦Î õ ¾ý ¨Á¨Â ÁðÎ õ ¦ÀüÚûÇ ¦ÀÇ¾¦¸ Ã¡º¦¸û ±ñ ½¦ Ã¡º¦¸û (Scalar Quantities) ±ýÚ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎ õ. «ùÅ¡§È ¸¡Åõ, ÀÕÁý, ¬üÈø, «¼÷ò¾¦ ¬¸¦Â¨Å ±ñ ½¦Ã¡º¦¸Ç¡Ì õ.

þ¾üÌ Á¡È¡¸ ´Õ º¦Ä ¦ÀÇ¾¦¸ Ã¡º¦¸û, «ÇÅ¦Î õ ¾ý ¨ÁÔ¼ý, ±ò¾¦¨ºÂ¦ø «ÇÅ¦¼ôÀ¼ §Å ñ Î õ ±ýÀ¨¾Ôõ º¡÷ó¾¦Õì¸ìÜ Î õ. «¨Å¸¨Ç ¾¦¨ºÂ¦¸û (Velocity) ±Éì ÜÚÅÐ ÅÆì¸õ. ±É§Å ¾¦¨ºÔ¼ý «ÇÅ¦Î õ ¾ý ¨Á¨Âô ¦ÀüÈ ¦ÀÇ¾¦¸ Ã¡º¦¸û ¾¦¨ºÂ¦¸Ç¡Ì õ. ±Î òÐì¸¡ð¼¡¸, Å¦¨º (Force), ¾¦¨º§Å¸õ (Velocity), þ¼ô¦ÀÂ÷î º¦ (Displacement) ¬¸¦Â¨Å ¾¦¨ºÂ¦¸Ç¡Ì õ.

¾¦¨ºÂ¦ ´ý ¨È ÓüÈ¦Öõ Å¨ÃÂÚì¸À¦ýÅÕõ ¾¸Åø¸û §¾¨ÅôÀÎ õ.

(i) ¬ö×ì Ì¡¦Â Ã¡º¦, «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¦Â¡ «øÄÐ ÅÆ¦Åó¾ Ã¡º¦Â¡ ±Éì ¸¡ Ì ¾ø.

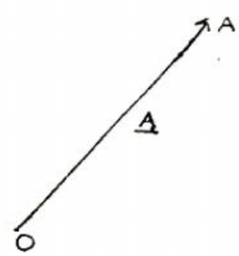
(ii) Ã¡º¦ì Ì ²üÈ «ÊôÀ¨¼ô À¡¦Á¡½í ¸û «øÄÐ ÅÆ¦Åó¾ À¡¦Á¡½í ¸¨Çì ¸½ì ¸¦Î ¾ø.

(iii) ÅÆ¦Åó¾ À¡¦Á¡½í ¸Ùì Ì¡¦Â Á¾¦ôÀÇ¨Å, ²üÈ «Äì §¸¡ø¸¨Çô ÀÂýÀÎ ò¾¦ì ¸½ì ¸¦Î ¾ø.

(iv) Ã¡º¦Â¦ý þÂì ¸ ¾¦¨º¨Â «È¦ó¾¦¼ø.

1.8 (1) ¾¦¨ºÂ¦¨Âò ¦¾¡¦Å¦ò¾ø

Å¨ÃÀ¼ò ¾¡Ç¦ø ÌÈ¦ôÀ¦ð¼ ¾¦¨º¨Â §¿¡ì¸¦, ´Õ ÌÈ¦ôÀ¦ð¼ ¿¦ÇÓ¨¼Â §¿÷ §¸¡ð¼¡ø ¾¦¨ºÂ¦¨Âò ¦¾¡¦Å¦ì¸Ä¡õ. §¿÷§¸¡ðÊø ¾¦¨ºÂ¦-þý ¾¦¨º¨Â ´Õ «õÒì ÌÈ¦Â¡ø ÌÈ¦ôÀÐ ÅÆì¸õ. þí Ì «õÒì ÌÈ¦ ¾¦¨º¨ÂÔõ, Ð ñ Î §¿÷§¸¡ Î ¾Ìó¾ «Äì «Ç¨ÅÂ¦ø ¾¦¨ºÂ¦-ý Á¾¦ô¨ÀÔõ «È¦Å¦ì¦ýÈÉ. À¼õ 1-1 ø Å¨ÃóÐûÇ «õÒ OA-³ì¸ÅÉ¦ì¸, þí Ì ÐÅì¸ôÒûÇ¦ O ìÌõ



À¼õ 1-1

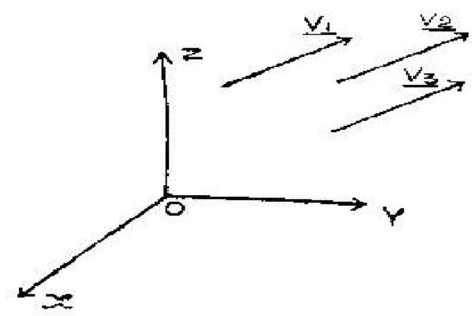
þÚ¾¦ôÒûÇ¦ (ÑÉ¦ôÒûÇ¦) Aì Ìõ ¯ûÇ ¦¾¡¨Ä× ¾¦¨ºÂ¦-ý ±ñ Á¾¦ô¨Àò ¦¾¡¦Å¦ì¸¦ÈÐ. ÑÉ¦Â¦ø Å¨ÃÂôÀðÎ ûÇ «õÒì ÌÈ¦, ¾¦¨ºÂ¦ ±ò¾¦¨º¨Â §¿¡ì¸¦ÔûÇÐ ±ýÀ¨¾Ôõ ¦¾¡¦Å¦ì¸¦ÈÐ ´Õ ¾¦¨ºÂ¦¨Âì ÌÈ¦ì ÌõÀ¡Ð, «î º¦ø ¾Éò¾ ±Øò¾¡ø ±ØÐõ§À¡Ð «¾ýÁÐ «õÒì ÌÈ¦Â¦ð Î õ, «øÄÐ ±ØòÐî §º÷ì¨¸Â¦ý ¸¦ú ´Õ º¦È¦Â §¿÷§¸¡ð¨¼Â¦ð Î õ ÌÈ¦ôÀÐ ÅÆì¸õ. ±É§Å ¾¦¨ºÂ¦¨Â, $\overrightarrow{OA}, \underline{A}, \underline{OA}$ ¬¸¦Â ÌÈ¦Â¦Î ¸Ç¦ø ²¾¡Å¦¾¡ý ¨Èô ÀÂýÀÎ ò¾¦ì ÌÈ¦ì¸Ä¡õ. þÅüÈ¦ø $\underline{A}, \underline{OA}$ ±ýÈ ÌÈ¦Â¦Î ¸û ÁðÎ §Á þó á Ä¦øÀÂýÀÎ ò¾ôÀÎ õ.

¾¦¨ºÂ¦-ý ±ñ Á¾¦ôÒ «Ç¨Å $|A|, |OA|, |\vec{A}|, |\overrightarrow{OA}|, |\underline{A}|, |\underline{OA}|$ OA «øÄÐ A¬¸¦ÂÅüÈ¦ø ²¾¡Å¦¾¡Õ ÌÈ¦Â¦ðÊý ãÄõ «È¦Å¦ôÀÐ ÅÆì¸õ. þÅüÈ¦ø $|OA| - |\underline{A}||A|$ ±ýÀ¨Å ¾¦¨ºÂ¦-ý ±ñ Á¾¦ô¨Àì ÌÈ¦ôÀ¾ü Ì þó á Ä¦ø ÀÂýÀÎ ò¾ôÀÎ õ.

1.8 (2) ºÁ (Equal), º¡¢ºÁòÐÅ (Equivalent) ¾¢¨ºÂ¢¸û

À¡¢Á¡½ í¸û Á¾¢ôÒ (Magnitude), ¾¢¨º (Direction) ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø ´ýÈ¡ÔûÇ (ºÁÁ¡ÔûÇ) þÕ¾¢¨ºÂ¢¸û ºÁÁ¡ Ì õ.

À¼õ 1-2ø, ã ýÚ ¾¢¨º§Å¸í¸¨Ç «È¢Å¢ì Ì õ ¾¢¨ºÂ¢¸û, ¿¦Çí¸Ç¢ø ºÁÁ¾¢ôÒì¸¨ÇÔõ, x y z ¬¸¢Â ¦¾¡¨Ä¦ÅÇ¢Â¢ø ´§ÃºÃ¡É º¡¢×¸¨ÇÔõ

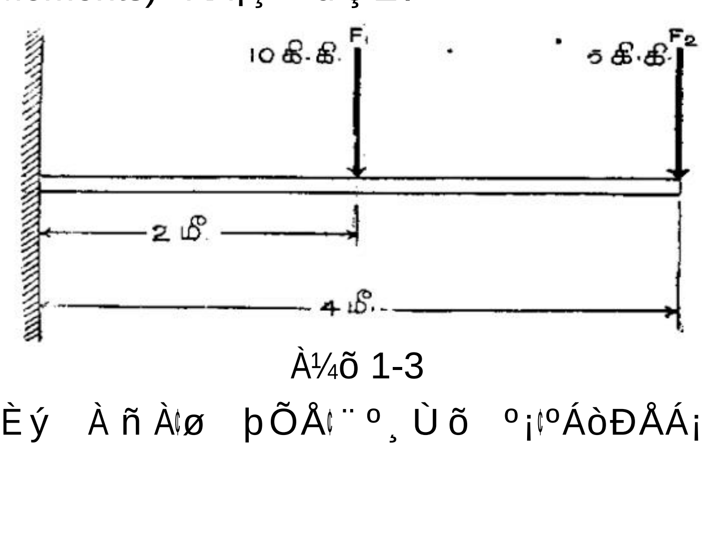


À¼õ 1-2

¦ÀüÚûÇÉ. þõ ã ýÚ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¦ºÂüÀÎ§¸¡Î¸û ¦Åù§ÅÈ¡¸ þÕó¾§À¡¾¢Öõ, «¨Å¸û ã ýÚõ Å¨ÃÂÃ¨Èì Ì þ½í¸ ºÁ¾¨Â¢¸Ç¡¸¢ýÈÉ.

þÕ¾¢¨ºÂ¢¸û´ù¦Å¡ýÚõ ´Õ º¢Ä ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢È¨Á¸Ç¢ø (Capacities) ´ýÈ¡É Å¢¨Ç¨Å ¯ñ Î Àñ Ï Á¡É¡ø «¨Å¸û «ì ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢È¨Á¸Ç¢ø º¡¢ºÁòÐÅ (Equivalent) ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. §ÁüÜÈ¢Â ã ýÚ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý º¡¢¨Å ´§Ã«ÇÅ¢ø Á¡üÈ¢Ì õ§À¡Ðõ, «øÄÐ «¨Å¸û þÂí¸¢î ¦ºýÈ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø ¦Àá¢¨Ä×¸¨Ç «ÇÅ¢Ì õ§À¡Ðõ, «õã ýÚ ¾¢¨ºÂ¢¸Ùõ ´ýÈ¡É Å¢¨Ç¨Å§Â ¯ñ Î Àñ Ï õ. þùÅ¢¾ ¿¢¨Ä¨Á¸Ç¢ø, ¾¢¨ºÂ¢¸û ºÁÁ¡ÂÅÕôÀ§¾¡ Î, ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢È¨Á¸Ç¢ø º¡¢ºÁòÐÅÁ¡¸×õ ¯ûÇÉ. ¬É¡ø x y ¾Çò¾¢ü Ì §ÁüÈÕ º¡÷À¢Ä¡¸ ¯ÂÃí¸¨Ç §¿¡ì Ì õ§À¡Ð, «õã ýÚ ¾¢¨ºÂ¢¸Ùõ ºÁÁ¡¸ þÕó¾§À¡¾¢Öõ, ¯ÂÃ «Ç×¸Ç¢ø º¡¢ºÁòÐÅ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ì ¸ÕÐÅ¾¢ü¸¢ø¨Ä. ±É§Å, ºÁ ¾¢¨ºÂ¢¸û ±ô§À¡Ðõ º¡¢ºÁòÐÅ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ þÕì¸§Å ñ ÊÂ¾¢ø¨Ä. ¿¢¨Ä¨Á¨Âî º¡÷óÐ¾¡ý ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý º¡¢ºÁòÐÅò¨¾ «È¢ó¾¢¼ÓÊÔõ. §ÁÖõ ºÁÁ¢øÄ¡¾ ¾¢¨ºÂ¢¸û, ²¾¡Å¦¾¡Õ ¾¢È¨ÁÂ¢ø º¡¢ºÁòÐÅÁ¡¸ þÕì¸ìÜ Îõ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, À¼õ 1.3ø Å¢ð¼õ ´ýÈ¢ø ¦ºÂüÀÎõ (F_1 ,F_2) ¬¸¢Â Å¢¨º¸û, «Ç×¸Ç¢ø §ÅÚÀÎÅ¾¡ø, «¨Å¸û ºÁÁüÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡Ìõ.

¬É¡ø Å¢ð¼ò¾¢ý ¿¢¨ÄôÀÎò¾¢Â ÓÛÇ¢Â¢ø (Fixed End) Å¢¨º¸û ²üÀÎòÐõ ¾¢ÕôÒ¾¢Èý¸û (Moments) ºÁÁ¡¸ ¯ûÇÉ.



À¼õ 1-3

±É§Å ¾¢ÕôÒ¾¢Èý À ñ À¢ø þÕÅ¢¨º¸Ùõ º¡¢ºÁòÐÅÁ¡Ìõ. «ùÅ¡§È

¾¨¼ÂüÈ ÑÉ¢ôÀÌ¾¢Â¢ø (Free End) Å¢¨º¸û ´ù¦Å¡ýÚõ ¦Åù§ÅÈ¡É ´Ðì¸ò¨¾ (Deflection)ì ¦¸¡Îì Ìõ. ¬¾Ä¡ø þÕÅ¢¨º¸Ùõ, þôÀ ñ À¢ø º¡¢ºÁòÐÅÁüÈ¾¡¸¯ûÇÉ.

ÓÊÅ¡¸ "¾¢¨ºÂ¢¸û ºÁõ" ±ýÀÐ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çì ¦¸¡ñ§¼Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. "º¡¢ºÁòÐÅõ" ±ýÀÐ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¿¢¨Ä¨Á¸¨Ç¦Â¡ðÊÅ¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

1.8 (3) ¾¨¼ÂüÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û : ¿Ø×õ ¾¢¨ºÂ¢¸û,¿¢¨ÄÂ¡É ¾¢¨ºÂ¢¸û
(Free vectors, Sliding vectors, Fixed vectors)

þÂó¾¢ÃÅ¢Â¢ø ¸½ìÌ¸Ç¢ø ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý º¡¢ÁòÐÅò¨¾ô ÀüÈ¢ ã ýÚ Å¢¾¿¢¨Ä¨Á¸Ç¢ø Å¢Çì¸Ä¡õ. Á¾¢ôÀÇ×, ¦ºÂøÀÎõ ¾¢¨º ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø §ÅÚÀ¡¼üÈ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç, ¿¢¨Ä¨Á¸Ç¢ø ´ÕÅ¢¾ Ì¨È¨Å§Â¡ «øÄÐ Á¡üÈò¨¾§Â¡ ¿¢¸úò¾¢¼¡Áø, ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø (in Space) ±ó¾ þ¼ò¾¢Öõ ¦ºÂøÀÎõÀÊ «¨Áì¸Ä¡õ. «¾¡ÅÐ, ¾¢¨ºÂ¢¸û ¦ºÂøÀÎõ Ðñ Î §¿÷§¸¡Î¸¨Ç, «¨Å¸Ùì Ì þ¨½Â¡¸ô ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø Å¨ÃÔõ §¸¡Î¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇÄ¡õ. þùÅ¢¾ò ¾¢¨ºÂ¢¸û ¾¨¼ÂüÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸ Ó Îì¸ò¨¾ (Acceleration)ì ¸ÕÐí¸¡ø, Å¢¨º¸§Ç Å¨ÃÂÚìÌõ ¾¢¨ºÂ¢¸û ¾¨¼ÂüÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡Ìõ.

«ùÅ¡§È ¿¢¨Ä¨Á¸¨Ç Á¡üÈ¢¼¡Áø ¾¢¨ºÂ¢¸û ´ù¦Å¡ý¨ÈÔõ þÂí ÌÅ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇÓÊÔõ. «¾¡ÅÐ, ¾¢¨ºÂ¢¨Â «Ð ¦ºÂøÀÎõ §¿÷§¸¡ð¼Ø Å¢ÕôÀôÀÊ ¿¸÷ò¾Ä¡õ. þùÅ¢¾ò ¾¢¨ºÂ¢¸û ¿Ø×õ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, ´Õ ¦À¡Õ¨Çì ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨º¢Â¢ø ¿¸÷ò¾¢¼, ¸ðÊÂ¢Øì Ìõ ¸Â¢üÈ¢ø, ÀÂýÀÎòÐõ Å¢¨º¨Â ±ôÒûÇ¢Â¢Öõ §Áü¦¸¡ûÇÄ¡õ.

´Õ ¾¢¨ºÂ¢-ý ¦ºÂøÀÎõ ÒûÇ¢ ¾¢ð¼Åð¼Á¡¸ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ§À¡Ð, «Ð ¿¢¨ÄÂ¡É ¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ.

¿¢¨ÄÂ¢Â¢ø ¬ö×Ó¨È¸Ç¢ø ÀÂýÀÎò¾ôÀÎõ ¾¨¼ÂüÈ ¿Ø×õ ¾¢¨ºÂ¢¸û, ¯ÕÅÁ¡üÈÁ¨¼Ôõ ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¬ö×Ó¨È¸Ç¢ø ¿¢¨ÄÂ¡É ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ.

±ñ ½¢ì Ì (Scalar Quantity) ±ñ Á¾¢ôÒ Áð Î§Á ¯ûÇÐ. ¬É¡ø ¾¢¨ºÂ¢ì Ì ±ñ Á¾¢ôÒ¼ý þÂí Ìõ ¾¢¨ºÔõ §¾¨ÅôÀÎõ. ±ñ ½¢ì Ì ±ùÅ¡Ú ´Õ þÂü¸½¢¾õ §¾¨ÅôÀÎ¢È§¾¡, «ùÅ¡§È, ¾¢¨ºÂ¢¸Ùì Ìõ ´Õ þÂü¸½¢¾õ §¾¨ÅôÀÎõ. «Ð§Å ¾¢¨ºÂ¢-þÂü¸½¢¾Á¡Ìõ (Vector Algebra).

¾¢¨ºÂ¢-ý ±ñ ½¢ ´Õ Á¢¨¸±ñ ½¡¸ì (Positive Number) ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

m - ±ýÀÐ ´Õ Á¢¨¸±ñ ±É¢ø, ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{A}$ ý m Á¼í ¨¸ m$\underline{A}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢-ý þÂí Ìõ ¾¢¨º, $\underline{A}$ ý ¾¢¨ºÂ¢Öõ, «¾ý ±ñ ½¢,$\underline{A}$ ý ±ñ ½¢¨Â m¬ø ¦ÀÕì¸¢ ÅÕõ Á¢¨¸±ñ ½¢ý Á¾¢ô¨Àô ¦ÀüÚûÇ¾¡¸×õ ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

m ±ýÀÐ ´Õ Ì¨È±ñ (Negative Number) ±É¢ø, m$\underline{A}$ ý ¾¢¨º¨Â, $\underline{A}$ ý ¾¢¨ºìÌ ±¾¢Ã¡¸ì Ì¨È¢ò¾¢ø §Å ñ Îõ. §ÁÖõ, m$\underline{A}$ ý ±ñ ½¢, $\underline{A}$ ý ±ñ ½¢¨Â, (-m)¬ø ¦ÀÕì¸¢ÅÕõ Á¢¨¸±ñ ½¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ (-$\underline{A}$) ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢, ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{A}$-³ (-1)¬ø ¦ÀÕì¸¢ì ¸¢¨¼ì¸ô¦ÀüÈ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. ±É§Å (-$\underline{A}$) ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢, $\underline{A}$-±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºìÌ ±¾¢÷ôÒÈõ þÂí Ì¸¢ÈÐ. §ÁÖõ ¾¢¨ºÂ¢ ¦ºÂüÀÎõ §¿÷§¸¡ð¨¼¼, þùÅ¢¾ ¦ºÂÄ¢¸û (Operations) ±ùÅ¢¾ò¾¢Öõ À¡¾¢ôÀ¾¢ø¨ÄÂ¡¾Ä¡ø, $\underline{A}$, -$\underline{A}$ ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸û ¦Åù§ÅÈ¡É ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸¨Çô ¦ÀüÚûÇÉÅ¡¸×õ ¦¸¡ûÇÄ¡õ.

±ñ Á¾¢ôÒ ÍÆ¢ÔûÇ ¾¢¨ºÂ¢, ÍÆ¢ò¾¢¨ºÂ¢ (Null Vector) ±É «¨Æì¸ôÀÎõ.

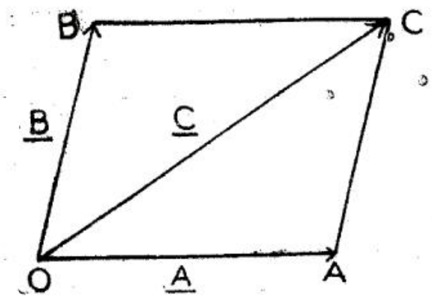
1.9 ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Ü Î¾ø «øÄÐ ¦¾¡ Ì ôÒ (Addition or Resultant of Vectors)

´§Ã ¾¢¨ºÂ¢ø -A,B ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ¦ºÂøÀ Î Á¡É¡ø, «¨Å¸Ç¢ý Ü Î¾ø «øÄÐ ¦¾¡ Ì ÀÂý ¾¢¨ºÂ¢ R=A+B ¬ Ì õ. «Ð «ùÅ¢Õ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â ¦ºÂüÀ Î õ.

A,B ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´ ýÚ ì ¦ ¸¡ ýÚ ±¾¢÷Á¡É ¾¢¨º¸Ç¢ø ¦ºÂøÀ Î õ§À¡Ð, «¨Å¸Ç¢ý Ü Î¾ø «øÄÐ ¦¾¡ Ì ÀÂý ¾¢¨ºÂ¢ R=A-B ¬ Ì õ. «Ð «ùÅ¢Õ ¾¢¨ºÂ¢¸ Ù û ¦À¡¢Â¾¡É ¾¢¨ºÂ¢-ý ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ.

1.9 (1) þ ¨ ½ ¸Ã Å¢¾¢

A, B ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´ ýÚ ì ¦ ¸¡ ýÚ º¡öó¾ ¿¢¨ÄÂ¢Ö û Ç þÕ §ÅÚ ¾¢¨º¸Ç¢ø þÕôÀ¢ý, «ÅüÈ¢ý Ü Î¾¨Ä «øÄÐ ¦¾¡ Ì À¨ É ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý þ ¨ ½ ¸Ã Å¢¾¢Â¡ø (Parallelogram Law of Vectors) ¦ÀÈÄ¡õ.



À¼õ 1-4

A, B ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Ü Î¾¨Äì ¸¡½, ²§¾Ûõ ´Õ O ±ýÈ ÒûÇ¢¨Â ±Î òÐ, «¾ýÅÆ¢§Â OA, OB ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Á¾¢ô¦À ñ ¸Ù ì Ì î ºÁÁ¡¸ ×õ «øÄÐ «¨Å ¸Ù ì Ì §¿÷Å¢¸¢¾ò¾¢Ä¢Õì Ì Á¡Úõ, «¨Å ¸û ¦ºÂøÀ Î õ ¾¢¨º¸ Ù ì Ì þ ¨ ½Â¡¸ þÕì ÌÁ¡Úõ À¼õ 1-4ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¨ÃÂ×õ. «ô¦À¡ØÐ OA, OB ±ýÈ «õÒì§¸¡ Î ¸û, A,B ¬ ¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Ç ì ÌÈ¢ì Ì õ, À¢È Ì , OA, OB ¬ ¸¢ÂÅü¨È « ñ ¨¼ô À ì ¸í ¸Ç¡¸ ¸ «¨ÁòÐ, OACB ±ýÈ þ ¨ ½¸Ãò¨¾ «¨Áì ¸×õ. O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â¦ºøÖõ þ ¨ ½¸Ãò¾¢ý OC ±ýÈ ã ¨ÄÅ¢ð¼õ, A,B ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý Ü Î¾ø «øÄÐ ¦¾¡ Ì ÀÂý ¾¢¨ºÂ¢ ¨Â Å ¨ÃÂÚì Ì õ.
À¼õ 1-4ø OA+ OB =OC ¬ Ì õ.
«¾¡ÅÐ, A+B=C ¬ Ì õ.

þ í Ì "+" ±ýÛõ Ì È¢, A, B ¬ ¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨ Çî §º÷ì Ì õ, ¾¢¨ºÂ¢ì Ü Î¾¨Ä (Vector Addition) «È¢Å¢ì ¸¢ÈÐ. §ÁÖõ, A,B ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì ¸ôÀð¼ þ ¨ ½ ¸Ãõ, A, B ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Ç ±Î ò¾¢ Ì õ Ó¨È¨Á¨Â (Order) º¡÷ó¾¢Ã¡¾¾¡ø, OB+OA=OC, «¾¡ÅÐ B+A=C ±ýÈ¡ Ì õ. ±É§Å A +B = C = B + A.

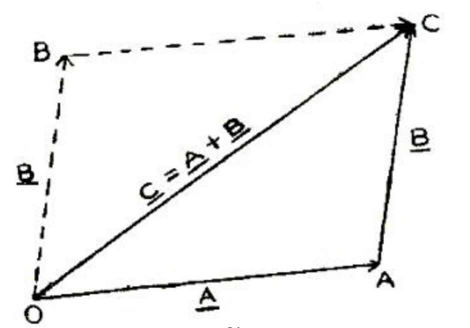
¬¾Ä¡ø ¾¢¨ºÂ¢ì Ü Î¾ø, ¯Úô Ò ¸Ç¢ý À¡¢Á¡üÚ «¨ÁôÒ ì Ì þ ½ í ¸¢Ô û ÇÐ (Vector addition is Commutative).

1-9 (2) Ó ì §¸¡ ½ Å¢¾¢ (Triangle Law)

þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ¨ É ò ¾¢¨ºÂ¢ Ó ì §¸¡ ½ ò ¾òÐÅò¾¢ý «ÊôÀ¨¼Â¢Öõ ¦ÀÈÄ¡õ.

O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø, A ¾¢¨ºÂ¢-ý «ÊôÒûÇ¢(tail) «¨ÁÔÁ¡Ú, B ¾¢¨ºÂ¢-ý

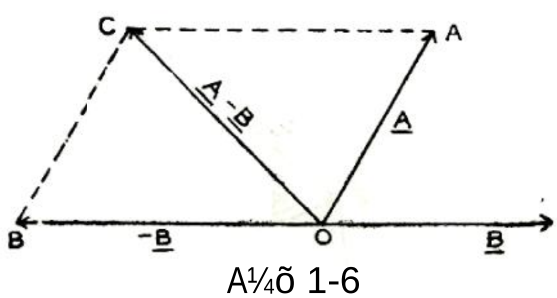
« Êô0ûÇ¢, A ý ÑÉ¢ô0ûÇ¢Â¢ø (tip) «¨ÁÔÁ¡Úõ ±Î òÐõ, A ý « Êô0ûÇ¢, B ý ÑÉ¢ô0ûÇ¢ ¬ ¸¢ÂÅü¨Èî §º÷òÐõ ¯ ñ¼¡ Ì õ §¿÷§¸¡ð Î ò Ð ñ Î , A, B ¬ ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢¸Ç¢ý Ü Î ¾ ¨Äì Ì È¢ì Ì õ.
À¼õ 1.5ø OA, AC ±ýÀÉ A, B ±ýÈ þÕ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ ¨ Çì Ì È¢ì ÌÁ¡Â¢ý, OC «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ ÌÀÂý ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ Ì õ.



À¼õ 1-5

þ ¨ ½ ¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ,
OA + OB =OC
¬ É¡ø OB = AC(¾ ¨ ¼ÂüÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â þ ¨ ½ Â¡ ¸ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ ¦ºöÂÄ¡õ.)
±É§Å, ▵ OAC ø
OA + AC =OC
«¾¡ÅÐ A + B =C ¬ Ì õ.
§ÁÖõ, "«Ê-ÑÉ¢" « ¨Áô0ì Ì (Tip-to-tail fashion) ²üÀ ΔOBC ø,
OB + BC = OC ¬ Ì õ.
«¾¡ÅÐ B + A = C ¬ Ì õ
∴ A + B = C = B +A± ýÈ¡ Ì õ.
±É§Å, þ í Ì õ "¾¢ ¨ ºÂ¢ì Ü ð¼ø" À¡¢Á¡üÚ « ¨Áô0ì Ì þ ¨ ºóÐûÇÐ.

1-9 (3) ´Õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â, Áü¦È¡Õ ¾¢ ¨ ºÂ¢Ä¢ÕóÐ ¸Æ¢ò¾¡ø
A, B± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸Ç¢ø, A Â¢Ä¢ÕóÐ, B ¨ Âì ¸Æ¢ì ¸, B ±ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â ¾¢ ¨ ºÁ¡üÈ¢ Å ¨ ÃÂ×õ.



À¼õ 1-6

À¼õ 1-6ø O ±ýÈ 0ûÇ¢Â¢ø OA, OB ±ýÀÉ A-B ¬ ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ ¨ Çì Ì È¢ì ¸¢ýÈÉ. OA, OB ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ ÌÀÂ ¨ É, þ ¨ ½ ¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ, O ÅÆ¢§Â Å ¨ Ãó¾¢ Î õ, OC ±ýÈ ã ¨ÄÅ¢ð¼õ «È¢Å¢ì Ì õ.
«¾¡ÅÐ OA + OB =OC
A + (-B) = A - B ¬ Ì õ.

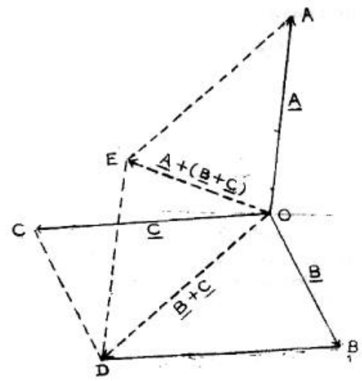
1.9 (4) þÃ ñ Êü Ì §ÁüÀð¼ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ Ç¢ ý Ü Î ¾ ¨ Ä ì ¸ ¡ ½ ø

þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ ¨ Âò ¾¢ÕõÀò¾¢ÕõÀô ÀÂ ý À Î ò¾¢, ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ Ç¢ ý Ü Î ¾ ¨ Äò ¾¢÷Á¡ É¢ ì ¸ Ä¡õ.

A, B, C ± ý À É ´§Ã ¾Çò¾¢Ä ¨ ÁÔõ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ ¨ Ç ì Ì È¢ ì ¸ ð Î õ. þ ¨ Å ¸ Ç¢ ý Ü Î ¾ ¨ Ä, þÕÅÆ¢ ¸ Ç¢ø ¦ÀÈÄ¡õ.

Å ¨ ÃÀ¼ò¾¡Ç¢ø,OA,OB, OC ± ý À É, ¾ Ì ó¾ « Ä Ì § ¸ ¡Ä¢ø Ó ¨ È§Â A, B, C ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç ì Ì È¢ ì ¸ ð Î õ.

À¼õ 1-7ø þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ôÀÊ, Ó¾Ä¢ø B.C ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ Ç¢ ý Ü Î ¾ ¨ Ä OD ± ý È « õÒ ì § ¸ ¡ Î « È¢Å¢ ì ¸ ¢ÈÐ. À¢È Ì OD ¯ ¼ ý A ³ î §º÷ò¾¢¼, « õÒ ì § ¸ ¡ Î OE ± ý ÀÐ OA, OD ¬ ¸ ¢ÂÅüÈ¢ ý Ü Î ¾ ¨ Ä Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ¢ÈÐ. ±É§Å, OE = A + OD = A + (B +C)

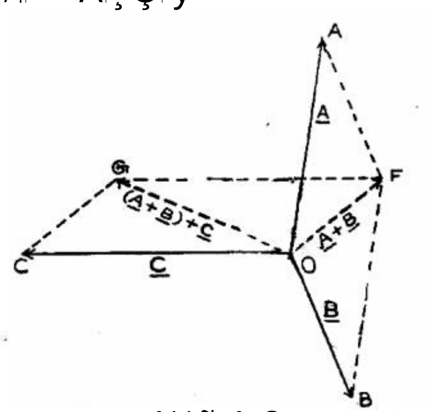


A¼õ 1-7

« ùÅ¡§È À¼õ 1-8þ ø A, B ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ Ç¢ ý Ü Î ¾ ¨ Ä, Ó¾Ä¢ø OF ± ý È « õÒ ì § ¸ ¡ð¼¡ø Å ¨ ÃÂÚòÐ, À¢È Ì « ¾ Û¼ ý , C ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â î §º÷ò¾¢¼, OF, OC ¬ ¸ ¢ÂÅüÈ¢ ý Ü Î ¾ ¨ Ä OG ± ý È « õÒ ì § ¸ ¡ Î Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ¢ÈÐ. ±É§Å OG = OF + OC = (A + B) + C ¬ Ì õ.

þÕÅÆ¢¸ Ç¢Öõ þÚ¾¢Â¡ ¸ ì ¸ ¢ ¨ ¼ ì ¸ ô ¦ÀüÈ OE, OG ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ û ºÁÁ¡ ¸ ¯ û Ç É ± ý ÀÐ Ì È¢ôÀ¢¼ò¾ ì ¸ Ð. ¬ ¾Ä¡ø, A + (B + C) = (A + B) + C ± ý È¡ Ì õ.

þ í Ì , þÂü ¸ ½ ¢¾ Ó ¨ ÈÂ¢ø ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç þ ¨ ½ òÐ ¾ í Ì ¾ ¨ ¼Â¢ ý È¢ ì Ü ð Î î §º÷ ì ¸ ÓÊÅ¾¡ø, "¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ç¢ ý



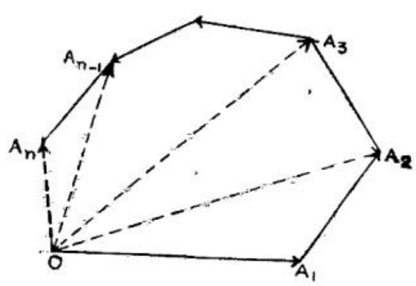
A¼õ 1-8

Ü Î ¾ø" þÂü ¸ ½ ¢¾ Ü ð Î î §º÷ ì ¨ ¸ Å¢¾¢ ì Ì Ì (Associative Law of Addition) þ ½ í ¸ ¢Ô û ÇÐ.

§ÁÖõ, $\underline{A_1}, \underline{A_2}$.............$\underline{A_i}$,........$\underline{A_n}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ¨ É ì (Ü Î ¾ ¨ Ä)

¸¡½, Ó¾Ä¢ø $\underline{A_1}, \underline{A_2}$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý $\underline{R_1}$ ³ì ¸ñ Î, «¾Û¼ý $\underline{A_3}$ ³î §º÷ò¾¢¼, ¸¢¨¼¼ì Ìõ ¦¾¡ÌÀÂý ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{R_2}$ ±ýÀÐ, $\underline{A_1}, \underline{A_2}, \underline{A_3}$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ÜÎ¾¨Ä «È¢Å¢ìÌõ. «í¹É§Á, «Îò¾Î òÐ ÅÕõ ¾¢¨ºÂ¢¨Â «¾üÌ ÓýÅó¾ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ÜÎ¾¨Ä Å¨ÃÂÚìÌõ ¦¾¡ÌÀÂý ¾¢¨ºÂ¢Ô¼É §º÷òÐ þÚ¾¢Â¡¸ ±øÄ¡ò ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ÜÎ¾¨Ä ´Õ Å¢¨Ç× ¦¾¡ÌÀÂý ¾¢¨ºÂ¢ìÌ (Final Resultant Vector) ºÁÁ¡¸ þÕìÌÁ¡Ú Á¡üÈ¢Â¨Áì¸Ä¡õ.

«ùÅ¡§È "ÑÉ¢-«Ê" «¨Áôòì ²üÈÅ¡Úõ, $\underline{A_1}, \underline{A_2}$.............$\underline{A_i}$,........$\underline{A_n}$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ÜÎ¾¨Ä Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ. þíÌ O±ýÈ ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢ø, $\underline{A_1}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢-ý «ÊôÒûÇ¢ «¨ÁÔÁ¡Ú ±ÎòÐ $\underline{A_2}$ ý «ÊôÒûÇ¢ $\underline{A_1}$ ý ÑÉ¢Â¢ø ¦À¡ÕóÐÁ¡Úõ, $\underline{A_3}$ ý «ÊôÒûÇ¢ $\underline{A_2}$ ý ÑÉ¢ôÒûÇ¢Â¢ø ¦À¡ÕóÐÁ¡Úõ ±ÎòÐ þÚ¾¢Â¡¸ $\underline{A_n}$ ý «Ê, $\underline{A_{n-1}}$ ý ÑÉ¢Â¢ø ¦À¡ÕóÐÁ¡Úõ «¨ÁòÐ, $\underline{A_1}$ ý «ÊôÒûÇ¢ O ³ $\underline{A_n}$ ý ÑÉ¢ôÒûÇ¢Ô¼ý §º÷òÐ ¯ñ¼¡Ìõ §¿÷§¸¡Î, ±øÄ¡ò ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ÜÎ¾¨Ä Å¨ÃÂÚìÌõ. À¼õ 1-9þø, "Óì§¸¡½ Å¢¾¢" «øÄÐ "ÑÉ¢-«Ê" «¨Áôò Ó¨ÈôÀÊ,



À¼õ 1-9

$\underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} = \underline{OA_2}$

$\underline{OA_2} + \underline{A_2A_3} = \underline{OA_3}$

$\underline{OA_{n-1}} + \underline{A_n} = \underline{OA_n}$

þ¨Å¸¨Çì ÜðÊ¼,

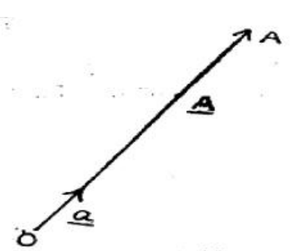
$\underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} + \underline{A_2A_3} + ... + \underline{A_{i-1}A} + ... + \underline{A_{n-2}A_n} = \underline{OA_n}$ ¬Ìõ. ±É§Å, ¦¾¡ÌÀÂý ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{OA_n}$ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ÜÎ¾¨Ä Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ.

1.10 µÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢ (Unit Vector)

± ñ Á¾¢ôÒ ´ýÚûÇ ¾¢¨ºÂ¢ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¡Ìõ.

1.10 (1) µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢¨ÂôÀÂýÀÎòÐ¾ø

À¼õ 1-10ø «õÒì§¸¡Î OA ±ýÀÐ, A ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¨ÂìÌ ÌÈ¢ì¸¢ÈÐ. «ò ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â µÃÄÌ ± ñ Á¾¢ôÒûÇ, a ±ýÛõ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢¨Â ±Îì¸×õ.



À¼õ 1-10

«ô¦À¡ØÐ. A,a-¬ ¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢¨º¸û ´ ýÈ¡¸¢ýÈÉ (Same) ¬É¡ø «ò¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ±ñ Å¾¢ôÒ¸û (Scalar magnitudes) Ó¨È§Â A, 1 ±ýÈ¡ Ì õ. ¬¾Ä¡ø A ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¨Â «¾ý ±ñ ½¢ A ¬ø Å Ì ì Ì õ§À¡Ð, a ±ýÈ µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢ ¸¢¨¼ì Ì õ.

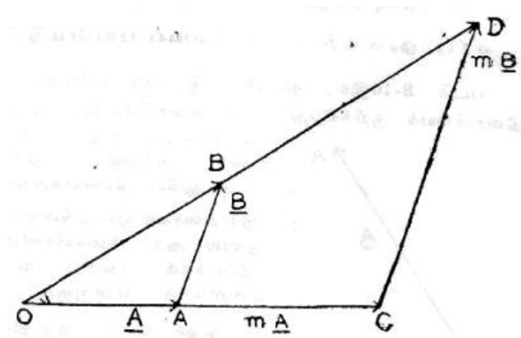
±É§Å, a $=\left(\frac{1}{A}\right)\underline{A}$ ¬ Ì õ.

«øÄÐ $\underline{A} = A\underline{a}$ ¬ Ì õ.

1.11 ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç ±ñ ½¢Â¡ø ¦ÀÕì Ì ¾ø
(Multiplication of Vectors by a scalar)

m ±ýÀÐ ´Õ ±ñ ½¢¨Âì ÌÈ¢ì¸ð Î õ. A ±ýÀÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢¨Âì ÌÈ¢ì¸ð Î õ. «ô¦À¡ØÐ, m A ±ýÀÐ, A ý ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â, m A ±ñ Á¾¢ôÒûÇ ¾¢¨ºÂ¢¨Âì ÌÈ¢ì Ì õ. §ÁÖõ m ±ýÀÐ ´Õ ±ñ ½¢Â¡¸×õ, A, B ±ýÀÉ þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸×õ ¯ûÇ§À¡Ð, m (A + B) = mA + mB ±É ¿¢ÚÅÄ¡õ.

O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø, À¼õ 1-11ø OA, OB ±ýÀÉ ¾ Ì ó¾ «Ç×§¸¡Ä¢ø A,B ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çì ÌÈ¢ì¸ð Î õ. OAø, OC = mA þÕì ÌÁ¡Ú C ±ýÛõ ÒûÇ¢¨Âì ÌÈ¢ì¸×õ, C ÅÆ¢§Â AB ì Ì þ¨½Â¡¸ Å¨ÃÔõ §¿÷ì§¸¡ Î , OB ³ D



À¼õ 1-11

±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø ¦Åð¼ôÀ Î õ. «ô¦À¡ØÐ OAB, OCD ±ýÈ Óì§¸¡½ í ¸û ÅÊ¦Å¡ò¾ Óì§¸¡½ í ¸Ç¡¸¢ýÈÉ.

±É§Å $\frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = m$ ¬ Ì õ.

$OC = mOA \quad \therefore \underline{OC} = m.\underline{OA} = m\underline{A}$

$CD = m.AB \quad \therefore \underline{CD} = m.\underline{AB} = m\underline{B}$

$OD = m.OB \quad \therefore \underline{OD} = m\underline{OB} = m(\underline{A} + \underline{B})$

¬¾Ä¡ø, $\underline{OC} + \underline{CD} = \underline{OD}$

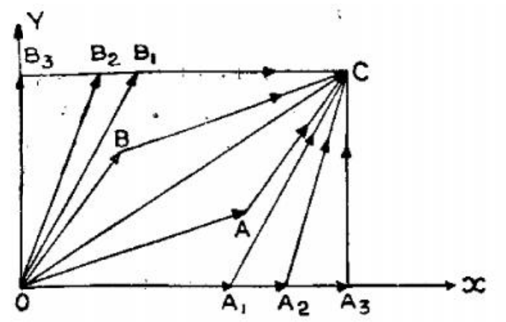
«¾¡ÅÐ mA+mB=m(A + B) ¬ Ì õ.

«ùÅ¡§È,(m + n) A = mA + nA ¬ Ì õ.

1.12 ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý À¢¡¢Å¢ Î (Resolution of Vectors)

´ ýÚì Ì §ÁüÀð¼ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¦¾¡ ÌÀÂ¨É ´ü¨Èò ¾¢¨ºÂ¢¨Â ¸ ñ ¼Ð§À¡ø, ´ü¨Èò ¾¢¨ºÂ¢Â¢ý ¬ ì¸ ì ÜÚ¸¨ÇÔõ ¸¡½ ÓÊÔõ. þ í ¹Éõ ¾¢¨ºÂ¢ ´ ýÈ¢ý ¬ ì¸ ì ÜÚ¸¨Çì ¸¡ ñ Àçü Ì ò ¾¢¨ºÂ¢-ý À¢¡¢Å¢ Î ±ýÚ ¦ÀÂ÷.

´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨ºÂ¢¨Â ã ¨ÄÅ¢ð¼Á¡¸ì ¦¸¡ ñ ¼ ± ñ ½üÈ þ ¨ ½ ¸Ã í ¸ ¨Ç Å ¨ÃÂÓÊÔõ.

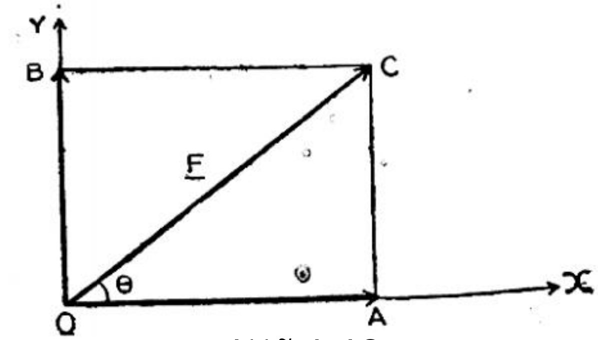


À¼õ 1-12

À¼õ 1-12ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨ºÂ¢-ý ¬ ì ¸ ì Ü Ú ¸ ¨Ç ì Ì È¢ôÀ¢ð¼ ±ó¾ þÕ¾¢¨º¸Ç¢Öõ ¦ÀÈÄ¡õ. ¬É¡ø, ¦À¡ÐÅ¡¸, ´Õ ¾Çò¾¢ø ´ýÚì¦¸¡ýÚ §¿÷ Ìò¾¡¸ ¯ûÇ þÕ¾¢¨º¸Ç¢ø ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çô À¢¡¢ôÀÐ ÅÆì¸õ. «ô¦À¡ØÐ, ¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ ´ü¨Èò ¾¢¨ºÂ¢-Â¢ì Ìõ, ¬ì¸ìÜÚ¸Ç¢ø ´ýÈ¢üÌõ þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ §¸¡½õ ¦¸¡Î ì¸ôÀ¼§Å ñ Îõ.

1-12 (1) ¾¢¨ºÂ¢ ´ýÈ¢ý ¬ì¸ìÜÚ¸¨Ç ¸¢¨¼, ¿¢¨Ä «îÍ ¾¢¨º¸Ç¢ø ¸¡ Ï ¾ø

À¼õ 1-13 þø OC ±ýÈ «õÒì§¸¡Î, F ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¨Âì Ì È¢ì¸¢ÈÐ. OC ¯¼ý ¯ ±ýÈ §¸¡½ò¨¾



À¼õ 1-13

«¨Áì Ìõ OX ±ýÈ ¾¢¨ºÂÖõ, «ò¾¢¨ºì Ì §¿÷ì Ìò¾¡É ¾¢¨ºÂÖõ, oy F ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¨Âô À¢¡¢ì ¸ §Å ñ ÊÂ¢ÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. C ±ýÈ Òû Ç¢Â¢Â¢ÕóÐ OX, OY ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ü Ì Å ¨ÃÔõ Ì òÐì § ¸ ¡ Î ¸ û OX, OY §¿÷§¸¡Î ¸ ¨Ç Ó¨È§Â A, B ±ýÈ þ¼í ¸Ç¢ø ¦Åð¼ðÎõ. OACB ±ýÀÐ ´Õ ¦ºùÅ¸ Á¡Ìõ.

OA, OB ±ýÀ ¨Å Ó ¨È§Â OX, OY ¾¢ º¸Ç¢ø F_x, F_y ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ ¸ ¨Çì Ì È¢ì Ì Á¡Â¢ý, þ ¨ ½ ¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ, F ±ýÀÐ F_x, F_y ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡Ì ÀÂÉ¡ Ìõ. ±É§Å $F_x = OA$; $F_y = OB$ ±ýÀ ¨ Å, F þý ¬ ì ¸ ìÜÚ¸Ç¡ Ìõ.

À¼õ 1-13Ä¢ÕóÐ,

$OA = OC\cos$¯

$\therefore F_x = F\cos$¯

$OB = OC\sin$¯

$\therefore F_y = F\sin$¯

±É§Å $\underline{F}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢, ¯ ±ýÈ §¸¡½ò¨¾ « ¨Áì Ìõ ¾¢¨ºÂ¢Öõ, «ò¾¢¨ºì Ì §¿÷ Ìò¾¡É ¾¢¨ºÂ¢Öõ, ± þý ¬ì¸ìÜÚ¸û Ó¨È§Â $F \cos$¯ $F \sin$¯ ±ýÈ¡ Ìõ.

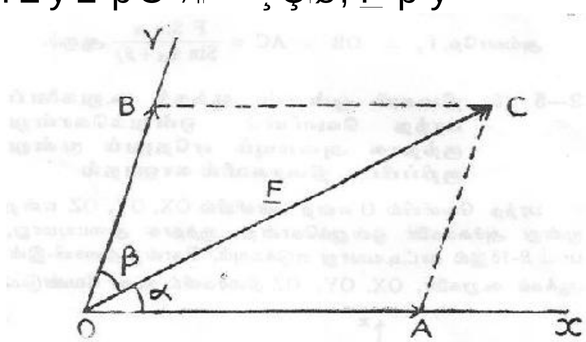
O_xO_y ¾¢¨º¸ ¨Ç $\underline{i}, \underline{j}$ ±ýÈ µÃÄ Ìò ¾¢¨ºÂ¢¸û Å ¨ÃÂÚì Ì ¦ÁýÈ¡ø.

$$\underline{OC} = \underline{OA} + \underline{AC}$$
$$= \underline{OA} + \underline{OB}$$
$$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y}$$

$= F_x \underline{i} + F_y \underline{j} = F \cos$¯ $\underline{i} + F \sin$¯ $\underline{j}$ ±ýÈ¡ Ìõ.

1.12 (2) ¾¢¨ºÂ¢ ´ýÈ¢ý ¬ì¸ìÜÚ¸¨Ç ²§¾Ûõ þÕ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨º¸Ç¢ø ¸¡ Ï ¾ø

À¼õ 1-14 þø, OC ±ýÈ §¸¡Î, $\underline{F}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢Â¢ý ±ñ Á¾¢ô¨Àì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. OX, OY±ýÈ þÕ ¾¢¨º¸Ç¢ø, $\underline{F}$ þý



À¼õ 1-14

¬ì¸ìÜÚ¸¨Ç ¸¡Ï ¾ø §Å ñ Îõ. OX, OY±ýÀ¨Å Ó¨È§Â OC ¯¼ý ~, ±ýÈ §¸¡½í¸¨Çò ¾¡í Ì Å¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. CÂ¢ÄÕóÐ OX, OY¸Ùì Ìþ ¨½Â¡¸ Å ¨ÃÔõ §¸¡Î¸û OY, OX §¸¡Î¸ ¨Ç Ó¨È§Â B,A ±ýÈ þ¼í¸Ç¢ø ¦ÅðÎÀÎõ.

þ ¨½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ, $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ ¬¸¢Â ¨Å OX, OY ¾¢¨º¸Ç¢ø $\underline{F}$ ý ¬ì¸ìÜÚ¸Ç¡ Ìõ. «ÅüÈ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ¸ ¨Ç F_x, F_y ±ýÚ ÌÈ¢ì¸×õ.

À¼õ 1-14

$\angle OAC = 180 - (\sim + \ )$ ¬ Ìõ.

$\angle OCA =$ ¬ Ìõ

±É§Å ΔOAC þø

$$\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC}$$

$$\frac{OA}{Sin} = \frac{AC}{Sin\sim} = \frac{OC}{Sin(180 - \overline{\sim + \ })}$$

$$\frac{OA}{Sin} = \frac{AC}{Sin\sim} = \frac{OC}{Sin(\sim + \ )}$$

±É§Å

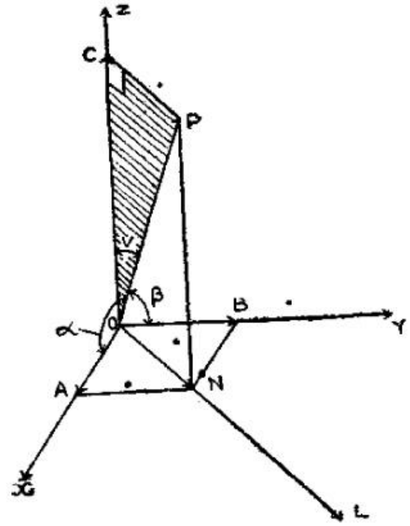
$$OA = \frac{OC.Sin}{Sin(\sim + \ )}$$

«øÄÐ $F_x = OA = \frac{FSin}{Sin(\sim + \ )}$ ¬ Ìõ.

« ùÅ¡§È, $F_y = OB = AC = \frac{F \sin\sim}{\sin(\sim + \ )}$ ¬ Ì õ.

1.12 (3) ¾¢¨ºÂ¢ ´ýÈ¢ý ¬ì¸ìÜÚ¸¨Çô ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ´ýÚì¦¸¡ýÚ Ìò¾¡¸ « ¨ÁÔõ ²§¾Û õ ã ýÚ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨º¸Ç¢ø ¸¡ Ï ¾ø

ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø OX, OY, OZ ±ýÈ ãýÚ «îÍ¸¨Ç ´ýÚì¦¸¡ýÚ Ìò¾¡¸ « ¨ÁÔÁ¡Ú, À¼õ 1-15ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ±Î ì¸×õ. F ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢-ý ¬ì¸ìÜÚ¸¨Ç, OX, OY, OZ ¾¢¨º¸Ç¢ø ¸¡½§Å ñ Î õ.



À¼õ 1-15

«¾ü¸¡¸ O-±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø OP «õÒì§¸¡Î F ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¨Â Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. OP, OZ- ±ýÈ §¸¡Î¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ ¾Çõ XOY ¾Çò¨¾ OL ±ýÈ §¸¡ðÊø ¦Åð¼ðÎõ. P ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ÄÕóÐ OL, OZ ±ýÈ §¸¡Î¸Ùìì Þ¨½Â¡¸ Å¨ÃÔõ §¸¡Î¸û OZ, OL §¸¡Î¸¨Ç Ó¨È§Â C, N ±ýÈ Þ¼í¸Ç¢ø ¦Åð¼ðÎõ. «ô¦À¡ØÐ ONPC ±ýÀÐ ´Õ ¦ºùÅ¸Á¡Ìõ, Þ¨½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ, F-ý ¬ì¸ìÜÚ¸û OZ, OL ¾¢¨º¸Ç¢ø OC, ON ±ýÈ «õÒì§¸¡Î¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. ±É§Å

OP = OC + ON

« Î òÐ ON ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢-ý ¬ì¸ìÜÚ¸¨Ç, XOY ¾Çò¾¢ø OX, OY ±ýÈ ¾¢¨º¸Ç¢ø ¸¡½§Å ñ Î õ. «¾ü¸¡¸ N-±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ÄÕóÐ OY, OX «îÍ¸Ùìì Þ¨½Â¡¸ì §¸¡Î¸û Å¨ÃÂ×õ. «¨Å¸û OX, OY §¸¡Î¸¨Ç Ó¨È§Â A, B ±ýÈ Þ¼í¸Ç¢ø ¦Åð¼ðÎõ. Þ¨½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ, OA , OB ±ýÀ¨Å OX, OY ¾¢¨º¸Ç¢Ä ON ý ¬ì¸ìÜÚ¸Ç¡Ìõ. ±É§Å

ON = OA + OB

∴ OP = OA + OB + OC ±ýÈ¡Ìõ.

F_x, F_y, F_z ±ýÀ¨Å, OA, OB, OC ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ô ÀÌ¾¢¸¨Çì ÌÈ¢ì¸ Á¡¸¢ø,

$F = F_x, F_y, F_z$ ±ýÈ¡Ìõ.

«ô¦À¡ØÐ, F_x, F_y, F_z ±ýÀ¨Å, OX, OY, OZ ¬¸¢Â «îÍ¸Ç¢ø, F±ýÈ

¾¢¨ºÂ¢Â¢ý ¬ì¸ìÜÚ¸Ç¡Ì õ. §ÁÖõ F_x F_y, F_z ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â, X, Y, Z «îÍ¸Ç¢ø F ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢-ý ±ñ Á¾¢ôÒÀÌ ¾¢¸Ç¡Ìõ (Scalar Components).

F ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ OX, OY, OZ «îÍ¸Ù¼ý «¨ÁìÌõ §¸¡½í¸¨Ç Ó¨È§Â ~, ,¥ ±Éì ¦¸¡ûÇ×õ. «ì§¸¡½í¸Ç¢ý ¸¢¼ì¨¸¸û (Cosine of the angles) Ó¨È§Â $Cos\sim, Cos\ \ , Cos¥$ ±ýÈ¡Ìõ. þÅü¨È§Â, F ¾¢¨ºÂ¢-ý ¾¢¨ºì ¸¢¼ì¨¸¸û (Direction Cosines) ±ýÚ ÜÚÅÐ ÅÆì¸õ. þ¨Å¸¨Ç l, m, n ±ýÈ ±Ø¾òÐì¸Ç¡Öõ ÌÈ¢ôÀÐ ÅÆì¸õ.

F, F_x, F_y, F_z ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â, $\underline{F}$ $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$, $\underline{F_z}$ ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ¸¨Çì ÌÈ¢ìÌõ. OCP ±ýÈ ¦ºí§¸¡½ Óì§¸¡½í¸Ç¢ø,

$F_z = F\cos¥ = -$ F.n ¬Ìõ.

அùÅ¡§È, OAN, OBN ±ýÈ ¦ºí§¸¡½ Óì§¸¡½í¸Ç¢ø,

$$F_{x,} = FCos\sim \ = F.l$$

$$F_y = FCos\ \ = F.m$$ ¬Ìõ.

§ÁÖõ OAN ±ýÈ ¦ºí§¸¡½ Óì§¸¡½ò¾¢ø,

$$ON^2 = OA^2 + AN^2$$

$$= OA^2 + OB^2$$ ±ýÈ¡Ìõ.

±É§Å, OCP ±ýÈ ¦ºí§¸¡½ Óì§¸¡½ò¾¢ø,

$$OP^2 = OC^2 + CP^2$$

$$= OC^2 + ON^2$$

$$= OC^2 + OA^2 + OB^2$$

$$= OA^2 + OB^2 + OC^2$$ ¬Ìõ.

$\therefore F^2 = F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2$ ¬Ìõ.

«øÄÐ $F^2 = (F\cos\sim)^2 + (F\cos\ \ )^2 + (F\cos¥)^2$ ±ýÈ¡Ìõ.

«¾¡ÅÐ,

$$Cos^2\sim + Cos^2\ \ + Cos^2¥ = 1$$

«øÄÐ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ±ýÈ¡Ìõ.

« Î òÐ, $\therefore F^2 = F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2$ ±ýÈ¡Å¾¡ø, F ¾¢¨ºÂ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ $F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}$ ¬Ìõ.

§ÁÖõ, $F_x = F\cos\sim, F_y = F\cos\ \ , F_z = F\cos¥$ ±ýÈ¡Å¾¡ø,

$$\frac{\cos\sim}{F_x} = \frac{\cos\ \ }{F_y} = \frac{\cos¥}{F_z} = \frac{1}{F}$$ ¬Ìõ.

ÁüÚõ, $\therefore F^2 = F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2$ ±ýÈ¡Å¾¡ø,

$$F = F_x\left(\frac{F_x}{F}\right) + F_Y\left(\frac{F_y}{F}\right) + F_z\left(\frac{F_z}{F}\right)$$

$$= F_xCos\sim + F_yCos\ \ + F_zCos¥$$

$$= F_x.1 + F_y.m + F_z.n$$ ¬Ìõ.

OX, OY, OZ ±ýÈ «îÍ¾¢¨º¸¨Ç i,j,k ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢¸û Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ñ¼¡ø,

$\underline{F_x} = \underline{i}F_x; \underline{F_y} = \underline{j}F_y; \underline{F_z} = \underline{k}F_z$ ±ýÈ¡Ìõ

«ô¦À¡ØÐ,

$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ $\underline{F} = F\left(\frac{F_x}{F}\right)\underline{i} + F\left(\frac{F_y}{F}\right)\underline{j} + F\left(\frac{F_z}{F}\right)\underline{k}$

$= FCos\text{~}\underline{i} + FCos\ \ \underline{j} + FCos¥\underline{k}$ ¬ Ì õ.

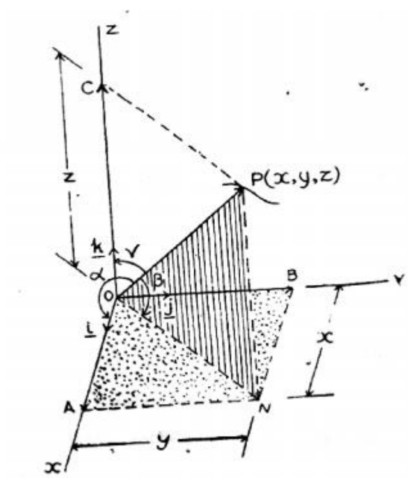
« øÄĐ, $\underline{F} = F:\underline{f}$ ± ý Úõ Ì È¢ì ¸Ä¡õ.

þ í Ì $\underline{f}$ ± ý ÀĐ, $\underline{F}$ ¾¢ ¨ ºÂ¢-¦ºÂüÀ Î õ ¾¢ ¨ º ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ « ¨ ÁÔõ µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¡ Ì õ.

1-13 ÀÃó¾ ¦ÅÇ¢Â¢ø ´ Õ ÒûÇ¢Â¢ ý ¿¢ ¨ Äò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â ì ¸ ¡ Ï ¾ø

O ± ý È ÒûÇ¢ ¨ Âò ĐÅ ì ¸ ôÒûÇ¢Â¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î « ¾¢ø OX, OY, OZ ± ý È ´ ý Ú ì ¦ ¸ ¡ ý Ú ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ ¯ ûÇ ã ý Ú « î Í ¸ ¨ Ç ± Î ì ¸ ×õ. ÀÃó¾ ¦ÅÇ¢Â¢ø P ± ý ÀÐ ´ Õ ÒûÇ¢Â¡ ¸ ¢ø OP ± ý È « ô Ò ì §¸ ¡ Î P ± ý È ÒûÇ¢Â¢ ý ¿¢ ¨ Äò¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â (Position vector) Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ. O, P ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ ¦¾¡ ¨ Ä× r ± ý È¡ ø, P ý ¿¢ ¨ Äò¾¢ ¨ ºÂ¢, À¼õ 1-16ø ¸ ¡ðÊÂÅ¡Ú,

$\underline{OP} = \underline{r}$ ¬ Ì õ.



À¼õ 1-16

OP ± ý È §¿÷§¸ ¡ Î X, Y, Z « î Í ¸ Ù¼ ý « ¨ Á ì Ì õ §¸ ¡ ½ í ¸ ¨ Ç, ÅÆì ¸ õ§À¡ø, ~, , ¥ ± É ì ¦ ¸ ¡ûÇ×õ. X, Y, Z « î Í ¸ Ç¢ø, OP ± ý È §¿÷§¸ ¡ðÊ ý ¾ÇÅ¢úÎº¢ ¸ §Ç (Projections) P ± ý È ÒûÇ¢Â¢ ý « î Í ¦¾¡ ¨ Ä× ¸ Ç¡ Ì õ. (Coordinates). OA, OB, OC ¬ ¸ ¢ÂÅü ¨ È OP ý ¾Ç Å¢úÎº¢ ¸ Ç¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ûÇ×õ. « ô ¦À¡ØÐ, OA=x, OB=y, OC=z ¬ Ì õ.

§ÁÖõ,OAP ± ý È ¦ º í §¸ ¡ ½ Ó ì §¸ ¡ ½ ò¾¢ø,

$\frac{OA}{OP} = \cos\text{~}$ « ¾¡ÅÐ, OA=OP cos « øÄÐ x = r cos¥ ± ý È¡ Ì õ.

« ùÅ¡§È , y = r cos , z = r cos¥ ¬ Ì õ.

OX, OY, OZ ± ý È « î Í ¸ Ç¢ø Ó ¨ È§Â (i, j, k) ± ý È µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç « ¨ Á ì ¸ ×õ.

« ô ¦À¡ØÐ, OA = xi, OB = y j, OC = z k ± ý È¡ Ì õ.

P ± ý È ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ, XOY ¾Çò¾¢ü Ì PN ± ý È ¦ º í Ì òÐ ì §¸ ¡ Î

´ ý ¨ È Å ¨ ÃÂ×õ. N-Ä¢ÕóÐ OY, OX « î Í ¸ Ù ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ Å ¨ ÃÔõ §¸¡ Î ¸ û Ó ¨ È§Â OX, OY « î Í ¸ ¨ Ç A, B ± ý È þ¼ í ¸ Ç¢ø ¦ Åð Î õ.

ONPC± ý È Ì òÐò¾Çò¾¢ø (Vertical Plane) þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ôÀÊ,

$\underline{OP} = \underline{ON} + \underline{OC}$ ¬ Ì õ.

OANB ± ý È ¸ ¢ ¨ ¼ò¾Çò¾¢ø, þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ôÀÊ,

$\underline{ON} = \underline{OA} + \underline{OB}$ ¬ Ì õ.

±É§Å, $\underline{OP} = \underline{OA} + \underline{OB} + \underline{OC}$

« øÄÐ $r = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ ± ý È¡ Ì õ.

¬ ¾Ä¡ø P ± ý È ÒûÇ¢Â¢ ý ¿¢ ¨ Äò¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â,

$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ ± ý ÀÐ « È¢Å¢ì ¸ ¢ÈÐ.

§ÁÖõ,

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$= r\cos\sim\underline{i} + r\cos\ \ \underline{j} + r\cos¥\underline{k}$$

$$= r\left(\cos\sim\underline{i} + r\cos\ \ \underline{j} + r\cos¥\underline{k}\right)$$

$$\therefore r = r\cdot\ \underline{r}$$ ± ý Ú ±Ø¾Ä¡õ.

þ í Ì $\cdot\ r = \left(\cos\sim\underline{i} + \cos\ \ \underline{j} + \cos¥\underline{k}\right)$ ± ý ÀÐ, $\underline{r}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¦ ºÂüÀ Î õ ¾¢ ¨ ºÂ¢§Ä§Â µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ Ì õ. §ÁÖõ, À¢¾¾§ ¸ ¡÷Š (Pythogoras) ¿¢Â¾¢ôÀÊ,

$OP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$ « ¾¡ÅÐ, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ± É ×õ,

$|\cdot\ r| = \cos^2\sim + \cos\ \ + \cos¥ = 1$ ± É ×õ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ Ä¡õ.

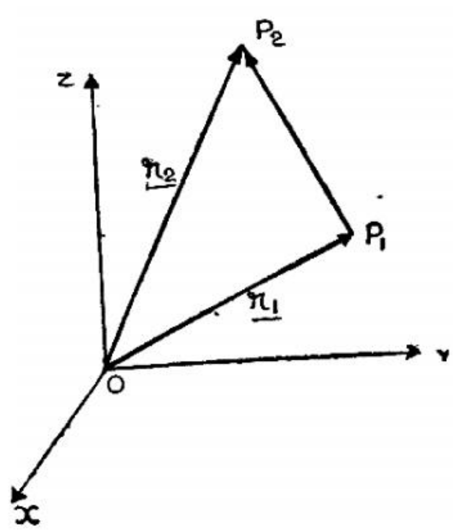
ÀÃó¾¦ ÅÇ¢Â¢ø $\underline{P_1}(x_1, y_1, z_1), \underline{P_2}(x_2, y_2, z_2)$ ± ý È ÒûÇ¢ ¸ ¨ Ç ± Î ì Ì õ§À¡Ð, « ôÒûÇ¢ ¸ Ç¢ ý ¿¢ ¨ Äò¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û Ó ¨ È§Â,

$$\underline{r_1} = \underline{OP_1} = x_1\underline{i} + y_1\underline{j} + z_1\underline{k}$$

$$\underline{r_2} = \underline{OP_2} = x_2\underline{i} + y_2\underline{j} + z_2\underline{k}$$

± ý È¡ Ì õ.

À¼õ 1.17ø ¸ ¡ðÊÔûÇÀÊ, "« Ê-ÑÉ¢" « ¨ ÁôÒ Ó ¨ ÈÂ¢ø,



À¼õ 1-17

$\underline{OP_1} = \underline{P_1P_2} = \underline{OP_2}$ ±ý È¡ Ì õ.

«¾¡ÅÐ, $\underline{p_1p_2} = \underline{op_2} - \underline{op_1}$,

$$= \underline{r_2} - \underline{r_1}$$

$$= (x_2\underline{i} + y_2) = (x_2 - x_1)\underline{i} + (y_2 - y_1)\underline{j} + (z_2 - z_1)\underline{k}$$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ, $(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)$ ±ýÀ¨Å x, y, z «î Í¸Ç¢ø P_1, P_2 ±ýÈ §¿÷§¸¡ðÊý ¾ÇÅ¢úî º¢¸Ç¡ Ì õ. «¨Å¸û P_1, P_2 ±ýÈ §¿÷§¸¡ðÊý ¾¢¨º Å¢¸¢¾ ±ñ ¸û (Direction Ratios) ±ýÚõ ÜÈôÀ Î õ. P_1, P_2 ÒûÇ¢¸ Ù ì Ì ¯ûÇ ¦¾¡¨Ä¨Å d ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø, P_1, P_2 ±ýÈ §¿÷§¸¡ðÊý ¾¢¨ºì¸¢¼ì ¨¸¸û Ó¨È§Â,

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$ ±ýÈ¡ Ì õ.

1.14 ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Ü Î ¾¨Ä (¦¾¡ Ì ÀÂ¨ Éô) À Ì ¾¢¸Ç¡¸ô À¢¡¢Å¢ Î ¦ºö¾ø

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ±ýÀ¨Å x, y, z «î Í¸Ç¢ø µÃÄ Ìò ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Ç ì ÌÈ¢ì ¸ð Î õ. «ÅüÈ¢ý ãÄÁ¡¸, $\underline{F_1}, \underline{F_2}.........\underline{F_y}.........\underline{F_n}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Çô À¢ý ÅÕÁ¡Ú Å¨ÃÂÚ ì¸×õ.

$$\underline{F_1} = F_{1x}\underline{i} + F_{1y}\underline{j} + F_{1z}\underline{k}$$

$$\underline{F_2} = F_{2x}\underline{i} + F_{2y}\underline{j} + F_{2z}\underline{k}$$

$$\underline{\ddot{F}_r} = \ddot{F}_{rx}\underline{i} + \ddot{F}_{ry}\underline{j} + \ddot{F}_{rz}\underline{k}$$

$$\underline{\ddot{F}_n} = \ddot{F}_{nx}\underline{i} + \ddot{F}_{ny}\underline{j} = \ddot{F}_{nz}\underline{k}$$

O ±ýÈ ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢ø, §Áü¦¸¡ñ¼ n ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç «¨Å¸Ù ì Ì¡¢Â «õÒ §¿÷§¸¡Î¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚòÐ, «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ¨ É ì ¸¡½ ÓÊÔõ. þÚ¾¢Â¡¸ ÅÕõ «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂý ¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{R}$ ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø,

$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + ... + \underline{F_r} ..... + \underline{F_n}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \underline{F_r} \sin^2 - = \frac{(A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(F_{rx}\underline{i} + F_{ry}\underline{j} + F_{rz}\underline{k}\right)$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{n} F_{rx}\right)\underline{i} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_{ry}\right)\underline{j} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_{rz}\right)\underline{k}$$ ±ýÈ¡ Ì õ.

$\underline{i}\ \underline{j}\ \underline{k}$ ¾¢¨º¸Ç¢ø, $\underline{R}$ ý ¬ ì¸ ì ÜÚ¸ ¨Ç - $\underline{R_x}, \underline{R_y}, \underline{R_z}$ ±É ì ÌÈ¢ôÀ¢ Î õ§À¡Ð,

$$R_x\underline{i} + R_y\underline{j} + R_z\underline{k} = \left(\sum_{r=1}^{n} F_{rx}\right)\underline{i} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_{ry}\right)\underline{j} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_{rz}\right)\underline{k}$$ ±ýÈ¡ Ì õ.

±É§Å, $R_x = \sum_{r=1}^{n} F_{rx}; R_y = \sum_{r=1}^{n} F_{ry}; R_z = \sum_{r=1}^{n} F_{rz}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ Î ¸û ¸¢¨¼ì Ì õ.

§ÁüÜÈ¢Â ºÁýÀ¡ Î ¸û, ¦¾¡ Ì ÀÂý ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{R}$ þý $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ¾¢¨º¸Ç¢ø

« ¨Áó¾¢Î õ ± ñ ½¢ô À Ì ¾¢¸ ¨Ç (Scalar Components) Ó ¨È§Â ¬ ì ¸ ìÜÚ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸Ç¢ ý ± ñ ½¢ô À Ì ¾¢ì Ü Î ¾¼ø¸Ç¡ø «È¢Å¢ì ¸¢ýÈÉ.

¦¾¡ ÌÀÂý ¾¢ ¨ ºÂ¢, $\underline{R}$ ý ± ñ Á¾¢ô ¨À, $R=\sqrt{R_x^{\,2}+R_y^{\,2}+R_z^{\,2}}$ ± ýÈ ºÁýÀ¡ Î Å ¨ÃÂÚ ì ¸¢ÈÐ.

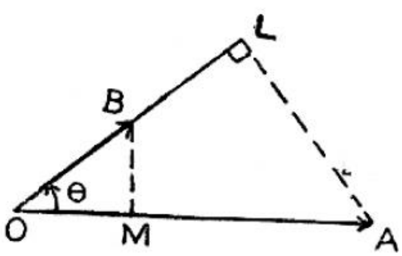
§ÁÖõ $\underline{R}$ ± ýÈ ¦¾¡ ÌÀÂý ¾¢ ¨ ºÂ¢, OX, OY, OZ « î Í ¸ Ù¼ý « ¨Áì Ì õ §¸¡½ í ¸ ¨Ç Ó ¨È§Â $\bar{}x,\bar{}y,\bar{}z$ ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø, $\underline{R}$ ý ¾¢ ¨ ºì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸ û Ó ¨È§Â, $\cos\bar{}_x \cos\bar{}_y \cos\bar{}_z$ ¬ Ì õ.

«ô¦À¡ØÐõ, $R_x=R\cos\bar{}_x;R_y=R\cos\bar{}_y;R_z=R\cos\bar{}_z$ ± ýÈ¡ Ì õ.
¬¾Ä¡ø,

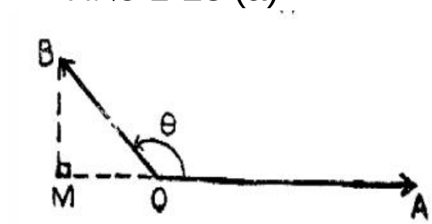
$$\frac{\cos\bar{}_x}{R_x}=\frac{\cos\bar{}_y}{R_y}=\frac{\cos\bar{}_z}{R_z}$$ ¬ Ì õ.

1.15 þÕ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸Ç¢ ý ± ñ ½¢ô ¦ÀÕì ¸¢ (Scalar Product of two vectors)

þÕ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸Ç¢ ý ± ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢ «ò¾¢ ¨ ºÂ¢¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ¸ û « ¨ Å ¸ Ù ì Ì þ ¨¼Â¢Ä ¨ÁÔõ §¸¡½ò¾¢ý ¸¢¼ì ¨ ¸ Á¾¢ôÒ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕì Ì ò ¦¾¡¨ ¸Â¡ø Å ¨ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ. À¼õ 1-23 (a), (b)þø O ± ýÈ Òû Ç¢Â¢ø $\underline{OA};\underline{OB}$ ± ýÈ «õÒì §¸¡ Î ¸ û $\underline{A},\underline{B}$ ± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ û ¦ºÂøÀ Î õ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ ¨Çì Ì ÈÈ¢ì ¸¢ýÈÉ. ¯ ± ýÀÐ $\underline{A},\underline{B}$ ± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ û ¦ºÂøÀ Î õ ¾¢ ¨ º¸ Ù ì Ì þ ¨¼Â¢Ä ¨ÁÔõ §¸¡½ ò ¨ ¾ì Ì ÈÈ¢ì ¸¢ÈÐ.



À¼õ 1-23 (a)



À¼õ 1-23 (b)

þ í Ì
¯ Å¢ý Á¾¢ôÒ $0\leq\bar{}\leq ®$ ± ýÈ ÅÃõÀ¢ü Ì û « ¨ÁÅ¾¡ ¸ì ¦¸¡ûÇ§Å ñ Î õ.
«ô¦À¡ØÐ $\underline{A},\underline{B}$ ± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸Ç¢ ý ± ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢ $AB\cos\bar{}$ ± ýÈ ± ñ Á¾¢ôÀ¡ø Å ¨ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ. $\underline{A},\underline{B}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ± ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢ ÌÈ¢Âð Î Ó ¨È¢ø $\underline{A}.\underline{B}$ ± ýÚ ±Ø¾ôÀ Î õ.
±É§Å

$$\underline{A}.\underline{B}=|\underline{A}||\underline{B}|\cos(\underline{A},\underline{B})$$

$= AB\cos¯$ ¬ Ì õ.

ÅÄÐÒÈÓûÇ ¦ÀÕì Ìò¦¾¡ ¨ ¸ ±ñ Á¾ô¨À Áð Î§Á ¦ÀüÈÕôÀ¾¡ø þÕ ¾¨ºÂ¸Çý ±ñ ½ô¦ÀÕì¸ì Ì ±ñ Á¾ôÒ Áð Îõ¾¡ý ¯ûÇÐ. ¬¸§Å þÕ ¾¨ºÂ¸Çý ±ñ ½ô¦ÀÕì¸ ´Õ ±ñ ½Â¡ Ìõ.

þÕ ¾¨ºÂ¸Çý ±ñ ½ô¦ÀÕì¸¨Âì ÌÈôÀð¼ þÕ ¾¨ºÂ¸Çý ±ñ ½ô¦ÀÕì¸¨Âì ÌÈôÀ¼ «¨Å¸Ùì Ì þ¨¼Âø ´Õ ÒûÇ¨Â (Dot) «¨ÁôÀ¾¡ø ±ñ ½ô¦ÀÕì¸¨Âô ÒûÇô¦ÀÕì¸ (Dot Product) ±ýÚõ ÜÈÄ¡õ.

À¼õ 1-23 (a)-ø $BM \perp OA$ ±ýÈÕì Ì Á¡Ú Å¨ÃÂôÀð Î ûÇÐ. «ùÅ¡§È $AL \perp OB$ ±ýÈÕì Ì Á¡Úõ Å¨ÃÂôÀð Î ûÇÐ.

OMB ±ýÈ ¦ºí§¸¡½ Óì§¸¡½ò¾ø $OM = OB\cos¯ = B\cos¯$ ¬ Ìõ.

«ùÅ¡§È OLA ±ýÈ ¦ºí§¸¡½ Óì§¸¡½ò¾ø

$OL = OA\cos¯$

$= A\cos¯$ ¬ Ìõ.

±É§Å

$\underline{A}.\underline{B} = AB\cos¯$

$= A(B\cos¯)$

$= OA.OM$ ±ýÚõ

$\underline{A}.\underline{B} = BA\cos¯$

$= B(A\cos¯)$

$= OB.OL$ ±ýÚõ ¬Å¾¡ø

$\underline{A}.\underline{B} = AB\cos¯ = OA.OM = OB.OL$ ¬ Ìõ.

±É§Å $\underline{A}, \underline{B}$ ¬¸ÂÅüÈý ±ñ ½ô¦ÀÕì¸Âý Á¾ôÒ $\underline{A}$ ¾¨ºÂ ±ñ Á¾ô¨ÀÔõ, $\underline{A}$ ¦ºÂøÀÎõ §¸¡ðÊø Bý Åúîº¢ý ±ñ Á¾ô¨ÀÔõ,(Length of Projection) ¦ÀÕì Ì Å¾¡ø ¸¢¨¼ì¸¢ÈÐ. «ùÅ¡§È $\underline{B}$ ¾¨ºÂ ±ñ Á¾ô¨À, $\underline{B}$ ý ¾¨ºÂø, $\underline{A}$ ý Åúîº¢ý ±ñ Á¾ôÀ¡ø ¦ÀÕì¸Ôõ ±ñ ½ô¦ÀÕì¸¨Âì ¸½ì¸¢¼Ä¡õ. §ÁÖõ À¼õ 1-23 (a)-ø OA, OM, OB, OL ±ýÀ¨Å ´§Ã ¾¨ºÂÄ¨ÁÅ¾¡ø ±ñ ½ô¦ÀÕì¸Âý Á¾ôÒ ´Õ Á¨ ¸ ±ñ ½¡ Ìõ. ¬É¡ø

À¼õ 1-23 (b)-ø $\underline{B}$ý Åúîº¢ $\underline{A}$ ¦ºÂøÀÎõ ¾¨ºì Ì ±¾¢÷ ¾¨ºÂÄ¨ÁÅ¾¡ø ±ñ ½ô¦ÀÕì¸Âý Á¾ôÒ ´Õ Ì¨È ±ñ ½¡¸¢ÈÐ (Negative Number). ¬¸§Å ¾¨ºÂ¸Ùì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ §¸¡½õ ÌÚí§¸¡½õ (Acute Angle) «øÄÐ Å¢¡¢§¸¡½õ (Obtuse Angle) ±ñ ½ô¦ÀÕì¸Âý Á¾ôÒ ´Õ Á¨ ¸ «øÄÐ Ì¨È ±ñ ½¡ Ìõ ±É «È¢ÂÄ¡õ.

$\underline{A}.\underline{B} = AB\cos¯ = BA\cos¯ = \underline{B}.\underline{A}$ ¬ Ìõ.

¬¾Ä¡ø ±ñ ½ô¦ÀÕì¸ ¾¨ºÂ¸Çý À¡¢Á¡üÚ Å¢¾¢¨Âò (Commutative Law) ¾ØÅ¢ ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ.

ÍÆ¢ÂüÈ þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸ Ù ì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ §¸¡½õ ´Õ ¦ºí§¸¡½Á¡É¡ø («¾¡ÅÐ ¯ $= 90^0$ ±É¢ø)

«ô¦À¡ØÐ $\underline{A}, \underline{B}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸ û ´ ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡É¾¡ Ìõ.¯ ý Á¾¢ôÒ 0^0 ±É¢ø $\underline{A}.\underline{B} = AB\cos 0^0$

=AB ±ýÈ¡ Ìõ.

«¾¡ÅÐ ´§Ã ¾¢¨ºÂ¢Ä¨ÁÔõ þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ±ñ ½¢ô¦ÀÕì¸¢ ¾¢¨ºÂ¢ ±ñ Á¾¢ôÒ¸Ç¢ý ¦ÀÕì Ìò ¦¾¡¨ ¸ì Ì î ºÁÁ¡ Ìõ.

¯ Á¾¢ôÒ180° ±ýÈ¡ø

$\underline{A}.\underline{B} = AB\cos 180^0$

=AB(-1)

=-AB ¬ Ìõ.

§ÁÖõ ±ñ ½¢ô¦ÀÕì¸¢ ¿¢Â¾¢Â¢ø $\underline{B} = \underline{A}$ ±ýÚ ±Î ì Ì õ§À¡Ð,

$\underline{A}.\underline{B} = AA\cos 0^0$ =A² ±ýÈ¡ Ìõ.

¬¾Ä¡ø ´Õ ¾¢¨ºÂ¢ý Á¾¢ô¨À

$A = \sqrt{(\underline{A}.\underline{A})}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ð¨¼ô ÀÂýÀ Î ò¾¢Ôõ ¸ ñ ¼È¢ÂÄ¡õ.

$\underline{A}$ «øÄÐ $\underline{B}$ ´Õ ÍÆ¢ò¾¢¨ºÂ¢ (Null Vector) Â¡ Ì ¦ÁÉ¢ø

$\underline{O}.\underline{B} = 0$ ¬ Ìõ.

«ùÅ¡§È $\underline{A}.\underline{O} = 0$ ¬ Ìõ.

±É§Å ±ñ ½¢ô¦ÀÕì¸¢Â¢ø Åó¾¢ Îõ ¾¢¨ºÂ¢¸ û ÍÆ¢ÂüÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ ì ¸ Õ¾ôÀ Îõ.

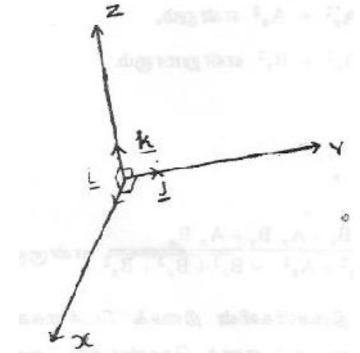
§ÁÖõ $\underline{A} = A\underline{a}, \underline{B} = B\underline{b}$, ±ýÈ «¨Äì Ì ¸ó¾ $\underline{a}, \underline{b}$ ±ýÈ µÃÄ Ìò ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Á¼í ¸¡ø Å¨ÃÂÚì ¸ôÀ Îõ§À¡Ð

$\underline{A}.\underline{B} = A\,\underline{a}.B\,\underline{b}$

$= AB(\underline{a}.\underline{b})$ ±ýÈ¡ Ìõ.

±É§Å $(\underline{a},\underline{b}) = \cos$¯ ¬ Ìõ.

§ÁÖõ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ±ýÀ¨Å À¼õ 1-24ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ´ ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ x,y,z «î Í¸Ç¢ý ¾¢¨º¸¨Ç «È¢Å¢ì Ìõ µÃÄ Ìò ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡É¾¡ø



À¼õ 1-24

$\underline{i}.\underline{i} = 1.1\cos¯ = 1$ ¬ Ì õ

« ùÅ¡§È $\underline{j}.\underline{j} = 1 = \underline{k}.\underline{k}$ ¬ Ì õ

« ¾¡ÅÐ $\underline{i}.\underline{i} = \underline{j}.\underline{j} = \underline{k}.\underline{k} = 1$ ¬ Ì õ

§ÁÖõ $\underline{i}.\underline{j} = 1.1\cos 90^\circ = 0$ ¬ Ì õ

¬ ¾Ä¡ø

$$\underline{i}.\underline{j} = \underline{j}.\underline{i} = 0$$

$$\underline{j}.\underline{k} = \underline{k}.\underline{j} = 0$$

$$\underline{k}.\underline{i} = \underline{i}.\underline{k} = 0$$

¬ Ì õ

$\underline{A}, \underline{B}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç, $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ À Ì ¾¢ ¸Ç¡ ¸ô À¢¡¢ò¦¾ Î ì Ì õ§À¡Ð

$$\underline{A} = A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k}$$

$\underline{B} = B_x\underline{i} + B_y\underline{j} + B_z\underline{k}$ ± ý È¡ Ì õ.

« ô¦À¡ØÐ

$$\underline{A}.\underline{B} = \left(A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k}\right).\left(B_x\underline{i} + B_y\underline{j} + B_z\underline{k}\right)$$

$$= A_xB_x(\underline{i}.\underline{i}) + A_xB_y(\underline{i}.\underline{j}) + A_xB_z(\underline{i}.\underline{k}) + A_yB_x(\underline{j}.\underline{i}) + A_yB_y(\underline{j}.\underline{j}) + A_yB_z(\underline{j}.\underline{k})$$

$$+ A_zB_x(\underline{k}.\underline{i}) + A_zB_y(\underline{k}.\underline{j}) + A_zB_z(\underline{k}.\underline{k})$$

$$= A_xB_x(\underline{i}.\underline{i}) + A_yB_y(\underline{j}.\underline{j}) + A_zB_z(\underline{k}.\underline{k})$$

$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ ¬ Ì õ

§ÁÖõ

$$A^2 = \underline{A}.\underline{A} = \left(A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k}\right).\left(A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k}\right)$$

$= A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}$ ± ý Úõ $B^2 = \underline{B}.\underline{B} = B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}$ ± ý ÚÁ¡ Ì õ.

±É§Å $\cos¯ = \dfrac{\underline{A}.\underline{B}}{AB}$

$$= \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}\sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}}$$

± ý È¡ Ì õ.

§ÁÖõ $\underline{A}, \underline{B}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸Ç¢ ý ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸ ¨ Ç Ó ¨ È§Â $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2)$
±É ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼¡ø « ¨ Å ¸Ç¢ ý Á¾¢ôÒ ¸ û

$$l_1 = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}}; l_2 = \frac{B_x}{B} = \frac{B_x}{\sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}}$$

$$n_1 = \frac{A_z}{A} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}}; n_2 = \frac{B_z}{B} = \frac{B_z}{\sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}}$$

$$m_1 = \frac{A_y}{A} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}; m_2 = \frac{B_y}{B} = \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

¬ Ì õ

±É§Å

$$\cos^{-} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$= \left(\frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)\left(\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right) + \left(\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)\left(\frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right)$$

$$+ \left(\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)\left(\frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right) = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$ ¬ Ì õ

ÓÊÅ¡¸

$$\cos^{-} = \frac{(\underline{A}.\underline{B})}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$= l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$ ±ý Ú Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ.

§ÁÖõ

$$\underline{A}.\underline{i} = \left(A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k}\right).\underline{i} = A_x$$

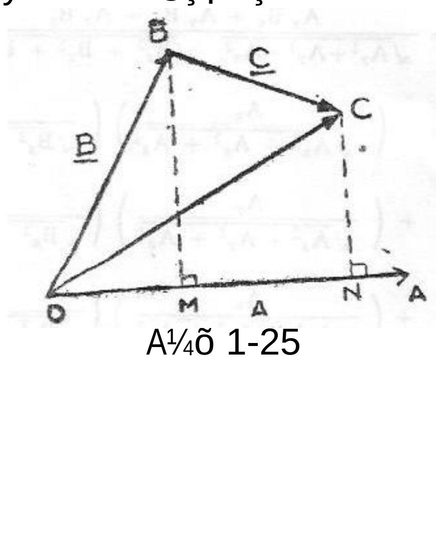
$$\underline{A}.\underline{j} = \left(A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k}\right).\underline{j} = A_y$$

$$\underline{A}.\underline{k} = \left(A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k}\right).\underline{k} = A_z$$ ¬ Ì õ.

þ í Ì A_x, A_y, A_z ±ýÀ ¨ Å $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ¾¢ ¨ º ¸Ç¢ø $\underline{A}$ ±ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢- ý Å¡úî º¢ Á¾¢ôÒ¸Ç¡ Ì õ. «Åü ¨ È Ó ¨ È§Â $(\underline{A},\underline{i});(\underline{A},\underline{j}),(\underline{A},\underline{k})$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ± ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢ ¸ û Å ¨ ÃÂÚì ¸¢ýÈÉ.

1.16 .± ñ ½¢ô ¦ÀÕì ¸¢Â¢ý À ¸¢÷× Å¢¾¢ (Distributive Law of scalar Product of vectors)

Á¼õ 1-25ø O ±ýÈ ÒûÇ¢ ¨ Âò ÐÅì ¸ôÒûÇ¢Â¡¸ ± Î òÐ $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ±ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ ¨ Ç $\underline{OA}, \underline{OB}, \underline{OC}$ ±ýÈ «õÒì§¸¡ Î ¸ û Å ¨ ÃÂÚôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ûÇ×õ.



Á¼õ 1-25

Óì§¸¡½ Å¢¾¢ôÀÊ $\underline{OC} = \underline{OB} + \underline{BC} = \underline{B} + \underline{C}$ ¬ Ì õ.

B, C ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¢Ä¢ÕóÐ OA ±ýÈ §¸¡ðÊüÌ BM, CN ±ýÈ ¦ºí Ìòиì§¸¡Î¸ ¨Ç Å ¨ÃÂ×õ. OA ±ýÈ §¿÷ì§¸¡ðÊø OM, MN, ON ±ýÀ ¨Å Ó ¨È§Â OB, BC, OC ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý Å¢úÎº¢¸Ç¡ Ì õ.

¬¾Ä¡ø $\underline{A}.\left(\underline{B}+\underline{C}\right) = OA.ON$

$$= OA.(OM + MN)$$

$$= OA.OM + OA.MN$$

$$= \underline{A}.\underline{B} + \underline{A}.\underline{C}$$ ¬ Ì õ.

±É§Å ± ñ ½¢ô¦ÀÕì¸¢ À¸÷× Å¢¾¢ ¨Âò ¾ØÅ¢î ¦ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ.

$$\left(\underline{A}+\underline{B}\right).\left(\underline{C}+\underline{D}\right) = \underline{A}.\left(\underline{C}+\underline{D}\right) + \underline{B}.\left(\underline{C}+\underline{D}\right)$$

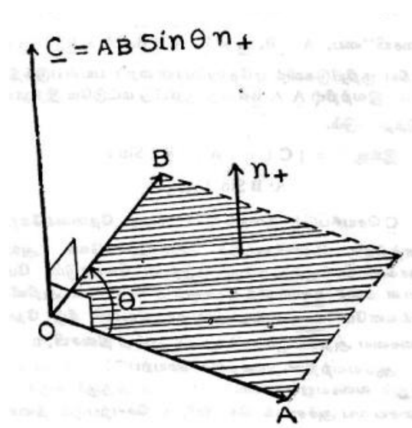
$$= \underline{A}.\underline{C} + \underline{A}.\underline{D} + \underline{B}.\underline{C} + \underline{B}.\underline{D}$$

±ýÚõ $m\underline{A}.n\underline{B} = (mA)(nB)\cos(m\underline{A}.n\underline{B}) = mnAB\cos\left(\underline{A},\underline{B}\right)$

$$= mn\underline{A}.\underline{B}$$ ±ýÚõ ¬ Ì õ.

1.17 þÕ ¾¢ ¨º¢Â¢¸Ç¢ý ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢ (Vector or cross product of two vectors)

À¼õ 1-26ø O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø $\underline{OA}, \underline{OB}$ ±ýÈ «õÒì§¸¡Î¸û $\underline{A}, \underline{B}$ ±ýÈ ¾¢ ¨ºÂ¢¸ ¨Çì ÌÈ¢ì¸ð Î õ.



A¼õ 1-26

$\underline{A}, \underline{B}$ ìÌ þ ¨¼Â¢Ä ¨ÁÔõ §¸¡½ò ¨¾¯ ±Éì ¦¸¡ûÇ×õ. $\underline{n}$ ±ýÀÐ $\underline{A}, \underline{B}$ ¾¢ ¨ºÂ¢ û Å ¨ÃÂÚì Ìõ ¾Çò¾¢üÌì Ìò¾¡É ¾¢ ¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎõ µÃÄ Ìò ¾¢ ¨ºÂ¢Â¡¸ þÕì¸ð Î õ.

$\underline{A}, \underline{B}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢ ´Õ ¾¢ ¨ºÂ¢Â¡¸ ¸Õ¾ôÀ Î õ. « ¨¾ $\underline{C}$ ±Éì ¦¸¡ ñ¼¡ø $\underline{C}$-ý ± ñ Á¾¢ôÒ $\underline{A}, \underline{B}$ ±ýÈ ¾¢ ¨ºÂ¢¸ ¨Ç « ñ ¨¼ô Àì¸í¸Ç¡¸ì ¦¸¡ ñ¼ þ ¨½¸Ãò¾¢ý ÀÃôÀÇ×ìÌî ºÁÁ¡¸×õ «Ð ¦ºÂüÀÎõ ¾¢ ¨º, $\underline{A}, \underline{B}$ ì¸Ç¡ø Å ¨ÃÂÚì¸ôÀð¼ ¾Çò¾üÌì Ìò¾¡¸ þÕì Ì ¦ÁÉì ¦¸¡ûÇ§Å ñ Î õ. þ ¨½¸Ãò¾¢ý ÀÃôÒ «¾ý «ÊôÀì¸õ ÌòÐ ¯ÂÃõ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕì Ìò¦¾¡ ¨¸Â¡Ìõ¡ø $\underline{A}, \underline{B}$ ±ýÈ þÕ¾¢ ¨º¢Â¢¸Ç¢ý "ÌÚì Ìô ¦ÀÕì Ìò ¾¢ ¨º¢" ¨Â $\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡Î Å ¨ÃÂÚì Ìõ. $\underline{A}, \underline{B}$ ±ýÈ þÕ ¾¢ ¨º¢Â¢¸Ç¢ý

"ÌÚìÌô ¦ÀÕìÌò ¾¢¨ºÂ¢" ¨Â $A\times B, \underline{A}\times\underline{B}, \vec{A}\times\vec{B}, [\underline{A}\times\underline{B}], \underline{A}\vee\underline{B}, \underline{A}\wedge\underline{B}$ ¬¸¢Â ÌÈ¢Â¢Î¸Ç¢ø ²§¾Û¦Á¡ý¨Èô ÀÂýÀÎò¾¢ì ÌÈ¢ì¸Ä¡õ. þÅüÈ¢ø $\underline{A}\wedge\underline{B}$ ±ýÈ ÌÈ¢Â¢Î Áð΂§Á þóá Ä¢ø ÀÂýÀÎò¾ôÀÎõ.

þí Ì $C=|\underline{C}|=|\underline{A}||\underline{B}|\sin^{-}$

$=A.B\sin^{-}$ ¬Ìõ.

$\underline{C}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºì§¸¡ð¨¼ò §¾¨Åì§¸üÀ $(\underline{A},\underline{B})$ ¾Çò¾¢üÌ §Áø§¿¡ì¸¢Î ¦ºí Ìò¾¡¸§Å¡ «øÄÐ ¸¦ú§¿¡ì¸¢Î ¦ºí Ìò¾¡¸§Å¡ ±Îò¾ø §Åñ Îõ. §Áø§¿¡ì¸¢ÔûÇ ¾¢¨º $\underline{n+}$ ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢Â¡ø «È¢Å¢ì¸ôÀÎõ. «í¹½§Á $\underline{n-}$ ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢ ¸¦ú§¿¡ì¸¢ÔûÇ ¾¢¨º¨Â «È¢Å¢ìÌõ. §ÁÖõ $\underline{C}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{n+}$ «øÄÐ $\underline{n-}$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¾¢¨º¸Ç¢ø ¦ºÂüÀÎõ ±ýÀ¨¾ô À¢ýÅÕÁ¡Úõ Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ. ÅÄôÒÈò ¾¢Õ Ìî ÍÕû ´ýÚ $\underline{C}$ ¾¢¨ºÂ¢¨Â «îº¡¸ì ¦¸¡ñ Î $\underline{A}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÂ¢Ä¢ÕóÐ $\underline{B}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¨Â §¿¡ì¸¢î ÍÆÖõ§À¡Ð ¾¢Õì §Áø§¿¡ì¸¢î ¦ºøÖÅ¾¡ø $\underline{C}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¨Â $\underline{n+}$ Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ ×õ $\underline{B}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÂ¢Ä¢ÕóÐ $\underline{A}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¨Â §¿¡ì¸¢ ¾¢Õ¨¸î ÍÆüÈ¢Îõ§À¡Ð ¾¢Õì ¸¦ú§¿¡ì¸¢ ÅÕÅ¾¡ø $\underline{C}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¨Â $\underline{n-}$ Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ ×õ ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

¾¢Õì §Áø§¿¡ì¸¢î ¦ºøÖõ§À¡Ð $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸û ¸Ê¸¡Ã ÓûÇ¢ý þÂì¸ò¾¢üÌ ±¾¢Ã¡É ÍÆüº¢¨Â §Áü¦¸¡ûÅ¾¡ø $\underline{C}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÂò ¾Çò¾¢ý §Áø§¿¡ì¸¢Â µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{n+}$ ¬Öõ $\underline{B},\underline{A},\underline{C}$ ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸û ÅÄï ÍÆ¢Â¡¾¡ø (clockwise rotation) $\underline{C}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÂò ¾Çò¾¢ý ¸ú§¿¡ì¸¢Â µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{n-}$ ¬Öõ ÌÈ¢ò¾ø §Åñ Îõ.

±É§Å $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ±ýÀ¨Å þ¼ï ÍÆ¢Â¡¸ «¨ÁÔõ§À¡Ð $\underline{C}=\underline{A}\wedge\underline{B}$

$=(AB\sin^{-})\underline{n+}$ ±É×õ

$\underline{B},\underline{A},\underline{C}$ ±ýÀ¨Å ÅÄï ÍÆ¢Â¡¸ «¨ÁÔõ§À¡Ð

$\underline{C}=\underline{B}\wedge\underline{A}$

$=(AB\sin^{-})\underline{n-}$

$=-(AB\sin^{-})\underline{n+}$ ±É×õ ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

þí Ì $\underline{A}\wedge\underline{B}=-(\underline{B}\wedge\underline{A})$ ±ýÈ¡¸¢ÈÐ.

«øÄÐ $\underline{A}\wedge\underline{B}\neq(\underline{B}\wedge\underline{A})$ ¬Ìõ.

«¾¡ÅÐ þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ÌÚìÌô¦ÀÕì¸¢ ¾¢¨ºÂ¢¸û À¡¢Á¡üÈ Å¢¾¢¨Â (Commutative Law)ò ¾ØÅ¢ ¦ºÂüÀ¼Å¢ø¨Ä ±É «È¢¾ø §Åñ Îõ.

ÍÆ¢ÂüÈ¾¡É $\underline{A},\underline{B}$ ±ýÈ þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸û þ¨½Â¡¸ þÕìÌÁ¡É¡ø «¨Å¸ÙìÌ þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ §¸¡½õ ÍÆ¢Â¡¸ Ìõ. («¾¡ÅÐ $^{-\circ}=0$). «ô¦À¡ØÐ

$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$

$= (AB \sin 0°) \underline{n+}$

$= \underline{0}$ ¬ Ì õ.

±É§Å þÕ¾¢¨ºÂ¢¸û þ¨ ½Â¡¸ « ¨Áó¾¢¼ «ÅüÈ¢ý Ì Ú¼ Ì ô¦ÀÕì¸¢ ÍÆ¢Â¡¸ §Å ñ Î õ.

§ÁÖõ $\underline{A}, \underline{B}$ ì ¸ Ù ì Ì þ ¨¼Â¢Ä ¨ÁÔõ §¸¡½õ ´Õ ¦º í§¸¡½Á¡É¡ø $(\theta° = 90)$.

$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$

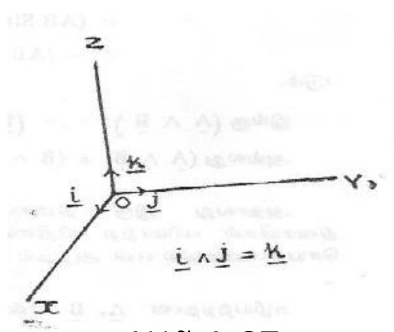
$= (AB \sin 90°) \underline{n+}$

$= AB\underline{n+}$ ± ýÈ¡ Ì õ.

±É§Å $\underline{A}, \underline{B}$ ± ýÈ þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸û ¦º í Ì ò¾¡¸ « ¨ÁÅ¾ü Ì ¡¢Â ¿¢Â¾¢ "$\underline{A}.\underline{B} = 0$" ¬ Ì õ. « ¨ Å ¸û þ ¨ ½Â¡¸ « ¨ÁÅ¾ü Ì ¡¢Â ¿¢Â¾¢ "$\underline{A} \wedge \underline{B} = 0$" ¬ Ì õ.

1-18 (1) µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Ì Ú¼ Ì ô ¦ÀÕì ¸¢¨Âì ¸¡ Ï ¾ø

À¼õ 1-27ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú O ±ýÈ Ò û Ç¢Â¢ý ÅÆ¢Â¡¸ ´ýÚ ì ¦¸¡ýÚ ¦º í Ì ò¾¡¸ ¯ûÇ ox, oy, oz ±ýÈ «î Í ¸ ¨Ç ±Î ì ¸×õ. « ¨ Å¸Ç¢ý ¾¢¨ º¸ ¨ Ç Ó ¨È§Â $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ±ýÈ µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢¸û ÌÈ¢ì ¸ð Î õ.



À¼õ 1-27

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ±ýÈ µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢¸û ÅÄôÒÈò ¾¢Õ Ì Ó ¨ÈôÀÊ (Right Handed Screw Rule) ´Õ ÅÄôÒÈ Óõ ¨Á¸Ç¡ Ì õ (Right Handed Triad). « ¨ Å ¸û ´Õ ÅÄôÒÈ « ¨ÁôÒ Ó ¨È ¨Â ì (Right Handed System of Reference) ÌÈ¢ôÀ¾¡¸ ×õ ¦¸¡ûÇôÀ Î õ.

$\underline{i} . \underline{i}$ ±ýÈ ºÁÁ¡É µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Ì Ú¼ Ì ô¦ÀÕì¸¢ò ¾¢¨ºÂ¢¨Â ¬Ã¡Ôõ§À¡Ð « ¨ Å ¸ Ù ì ¸¢¨¼Â¢Ä ¨ÁÔõ §¸¡½õ ÍÆ¢Â¡Å¾¡ø

$\underline{i} \wedge \underline{i} = (1.1 \sin 0) \underline{n+}$

$= 0.\underline{k}$

$= \underline{0}$ ¬ Ì õ.

«ùÅ¡§È

$\underline{j} \wedge \underline{j} = 0 = \underline{k} \wedge \underline{k}$ ¬ Ì õ.

$\underline{i}, \underline{j}$ ±ýÈ þÕ ¾É¢ò¾ µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¾¢¨ºÂ¢ì Ì Ú¼ Ì ô¦ÀÕì¸¢¨Â ¬Ã¡Ôõ§À¡Ð « ¨ Å ¸ Ù ì ¸¢¨¼Â¢Ä ¨ÁÔõ §¸¡½õ ¦º í§¸¡½Á¡¾¡ø

$\underline{i} \wedge \underline{j} = \left(1.1 \sin 90^\circ\right) \underline{n} + = \underline{k}$ ¬ Ì õ. $\left(\because \underline{i}, \underline{j}\right)$¾Çò¾¢ü Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â $\underline{k}$ Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ.)

§ÁÖõ $\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$ ¬ Ì õ.

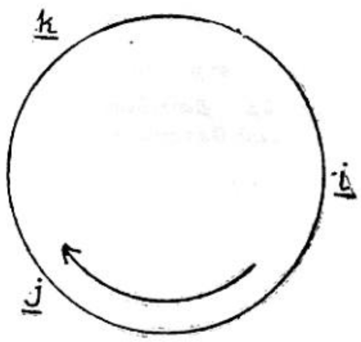
±É§Å $\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k} = -\left(\underline{j} \wedge \underline{i}\right)$ ¬ Ì õ.

« ùÅ¡§È, $\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i} = -\left(\underline{k} \wedge \underline{j}\right)$ ± ý Úõ

$\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j} = -\left(\underline{i} \wedge \underline{k}\right)$ ± ý Úõ ¬ Ì õ.

þÅüÈ¢ ¨ É ±Ç¢¾¡ ¸ «È¢Å¾ü Ì ´Õ Åð¼ò¾¢ý À¡¢¾¢Â¢ø $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Çì ¸ Ê ¸ ¡ÃÓ û ÍüÚõ ¾¢ ¨ ºì Ì ´ôÀ « Î ò¾ Î òÐô À¼õ 1-28ø ¸ ¡ðÊÂÅ¡Ú « ¨ ÁÌ ¸ ×õ.

²¾¡ÅÐ þÕ « Î ò¾ Î òÐ ûÇ µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç ± Î òÐ ¸ Ê ¸ ¡ÃÓ û ÍÆÖõ ¾¢ ¨ º ¨ Â¦Â¡ðÊ «ÅüÈ¢ý ¾¢ ¨ ºÂ¢ì Ì Úì Ì ô¦ÀÕì ¸ ¢ ¨ Â « ¨ Áò¾¡ø «Ð « Î òÐÅÕõ ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ ¸ þÕì Ì õ.



À¼õ 1-28

± Î òÐì ¸ ¡ð¼¡ ¸

$\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$ ¬ Ì õ.

¸ Ê ¸ ¡Ã Ó û ¦ºøÖõ ¾¢ ¨ ºì Ì ±¾¢÷ ¡ ¸ þÕ « Î ò¾ Î òÐûÇ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç ± Î òÐ «ÅüÈ¢ý ¾¢ ¨ ºÂ¢ì Ì Úì Ì ô ¦ÀÕì ¸ ¢ ¨ Â « ¨ Áò¾¡ø «Ð Á¾¢ÓûÇ ¾¢ ¨ ºÂ¢ì Ì ±¾¢÷Á ¨ ÈÂ¡É¾¡ ¸ þÕì Ì õ. «¾¡ÅÐ $\underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j}$ ¬ Ì õ.

1 -18 (2) þÕ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ç¢ý ¾¢ ¨ ºÂ¢ø Ì Úì Ì ô ¦ÀÕì ¸ ¢ ¨ Â µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ç¢ý Å¡Â¢Ä¡ ¸ ¸ ½ì ¸ ¢¼ø

$\underline{A}, \underline{B}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ §Ç $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ¾¢ ¨ º ¸ Ç¢ø À ¸ ¢÷ó¾¢ Î õ§À¡Ð « ¨ Å

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$$

$$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$$

± ý Ú Ì È¢ì ¸ ôÀ Î õ.

±É§Å «ÅüÈ¢ý Ì Úì Ì ô¦ÀÕì ¸ ¢.

$$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$$

$$= \left(A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}\right) . \left(B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}\right)$$

$$= A_x \underline{i} \wedge \left(B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}\right) + A_y \underline{j} \wedge \left(B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}\right) + A_z \underline{k} \wedge \left(B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}\right)$$

$$= \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \underline{i} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right) \underline{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \underline{k}$$ ¬ Ì õ

þ¾ ¨ É « ½¢ì§¸¡ ¨ Å « ¨ ÁôÀ¢ø (Determinant),

$$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\underline{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\underline{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\underline{k}$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

± ý Úõ Ì È¢ì ¸Ä¡õ.

1-18 (3) $\underline{A}, \underline{B}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ §¸¡ ½ ò ¨ ¾, ¾¢ ¨ ºÂ¢ Ì Ú ì Ì ô ¦ÀÕ ì ¸¢Â¡ø ¸¡ Ï ¾ø

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ± ý È µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ç¢ø, $\underline{A}, \underline{B}$ ¬ ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç,

$$\underline{A} = A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k}$$

$$\underline{B} = B_x\underline{i} + B_y\underline{j} + B_z\underline{k}$$

± É ì Ì È¢ì ¸ ×õ.

$\underline{A}, \underline{B}$ ì ¸ Ù ì ¸¢ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ §¸¡ ½ ò ¨ ¾, ¯ ± É ì ¦ ¸¡ û Ç ×õ.

$\underline{A}, \underline{B}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ ý ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸ ¨ Ç Ó ¨ È§Â $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2)$ ± É ¦ ¸¡ û Ç ×õ.

± É§Å,

$$A^2 = \underline{A}.\underline{A} = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2$$

$$B^2 = \underline{B}.\underline{B} = B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2$$ ¬ Ì õ.

$$l_1 = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}}$$

$$l_2 = \frac{B_x}{B} = \frac{B_x}{\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}}$$

$$m_1 = \frac{A_y}{A} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}} ; \quad n_1 = \frac{A_z}{A} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}}$$

$$m_2 = \frac{B_y}{B} = \frac{B_y}{\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}} \quad n_2 = \frac{B_z}{B} = \frac{B_z}{\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}}$$

¬ Ì õ

$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B} = \left(AB\sin\text{¯}\right)\underline{n+}$ ± ý È¡Å¾¡ø,

$$\begin{aligned} \left(\underline{C}.\underline{C}\right) &= \left(\underline{A} \wedge \underline{B}\right).\left(\underline{A} \wedge \underline{B}\right) \\ &= \left(AB\sin\text{¯}\,\underline{n+}\right).\left(AB\sin\text{¯}\,\underline{n+}\right) \\ &= \left(AB\sin\text{¯}\right)^2\left(\underline{n+}.\underline{n+}\right) \\ &= A^2B^2\sin^2\text{¯} \\ &= \left(A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2\right)\left(B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2\right)\sin^2\text{¯} \end{aligned}$$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ

$$\left(\underline{C}.\underline{C}\right) = \left\{\left(A_yB_z - A_zB_y\right)\underline{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\underline{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\underline{k}\right\}$$

$$.\left\{\left(A_yB_2-A_2B_y\right)\underline{i}+\left(A_2B_x-A_xB_2\right)\underline{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\underline{k}\right\}$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)^2+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)^2+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)^2$$

¬ Ì õ.

±É§Å þÕ ÅÆ¢¸Ç¢ø ¸¢¨¼ì ¸ô¦ÀüÈ $\left(\underline{C}.\underline{C}\right)$ ý Á¾¢ôÒ¸ ¨Çî ºÁôÀ Î ò¾,

$$\sin^2¯ = \frac{\left(A_yB_z-A_zB_y\right)^2+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)^2+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)^2}{\left(A_x^{\,2}+A_y^{\,2}+A_z^{\,2}\right)\left(B_x^{\,2}+B_y^{\,2}+B_z^{\,2}\right)}$$

$$=\left(\frac{A_y}{A}.\frac{B_z}{B}-\frac{A_z}{A}.\frac{B_y}{B}\right)+\left(\frac{A_z}{A}.\frac{B_x}{B}-\frac{A_x}{A}.\frac{B_z}{B}\right)+\left(\frac{A_x}{A}.\frac{B_y}{B}-\frac{A_y}{A}.\frac{B_x}{B}\right)$$

$$=\left(m_1n_2-n_1m_2\right)^2+\left(n_1l_2-l_1n_2\right)^2+\left(l_1m_2-m_1l_2\right)^2$$

$$=\left(m_1n_2-m_2n_1\right)^2+\left(n_1l_2-n_2l_1\right)^2+\left(l_1m_2-l_2m_1\right)^2$$ ¬ Ì õ.

$\underline{A},\underline{B}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ Ù ì ¸¢ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ §¸¡ ½ õ ÍÆ¢Â¡ Ì õ§À¡Ð ¬ Ì õ.

$\sin¯ = \sin 0 = 0$ «ô¦À¡ØÐ,

$$\left(m_1n_2-m_2n_1\right)^2+\left(n_1l_2-n_2l_1\right)^2+\left(l_1m_2-l_2m_1\right)^2=0$$

«¾¡ÅÐ,

$$\left(m_1n_2-m_2n_1\right)^2=0;\left(n_1l_2-n_2l_1\right)^2=0;\left(l_1m_2-l_2m_1\right)^2=0$$

«¾¡ÅÐ,

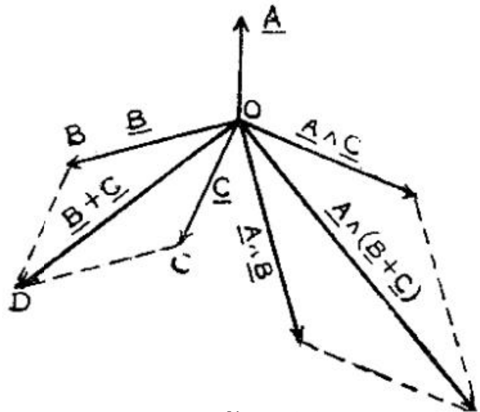
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_1}{l_2};\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

«¾¡ÅÐ $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ ± ý È¡ Ì õ.

«¾¡ÅÐ $\underline{A},\underline{B}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢¸Ç¢ ý ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸ û Ó ¨ È§Â §¿÷ Å¢¸¢¾òÐ¢ø ¯ ûÇ É Å¡ Ì õ.

1 .18 (4) ¾¢ ¨ ºÂ¢ Ì Ú ì Ì ô ¦ÀÕ ì ¸¢Â¢ ý À ¸¢÷× Å¢¾¢ (Distributive Law of Vector Product)

$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ¬ ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ û ¦ ¸ ¡ Î ì ¸ôÀð Î û Ç É. $\underline{B},\underline{C}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ û $\underline{A}$ ì Ì î ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ ô À¼õ 1-29ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú « ¨ ÁÅ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û Ç ×õ. ¾¢ ¨ ºÂ¢$\left(\underline{A},\underline{B}\right)$ ¦ÀÕ ì ¸¢ $\underline{A}\wedge\underline{B}$ ¬ ¸¢Â ¨ Å Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ¾Çò¾¢ü Ì ì Ì ò¾¡ ¸ ×õ, ± ñ Á¾¢ôÒ, $AB\sin 90^\circ = AB$ ± ý Ú ¯ û Ç¾¡ ¸ ×õ « ¨ ÁÔõ. « ùÅ¡§È, $\left(\underline{A}\wedge\underline{C}\right)$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¾Çò¾¢ü Ì î ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ ×õ, ± ñ Á¾¢ôÒ ± ñ AC Á¾¢ôÒ ¬ ¸ ×õ « ¨ ÁÔõ. §ÁÖõ $\underline{A}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¬ ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ Ç¡ø Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ ¾Çò¾¢ü Ì î ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ $\left\{\underline{B},\underline{C},\underline{B}+\underline{C}\right\}$ ¯ û Ç¾¡ø



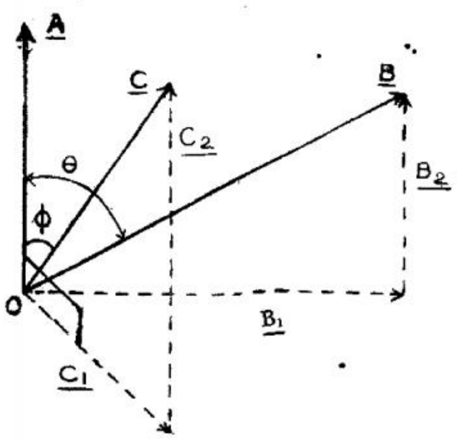
A¼õ 1-29

$(\underline{A}\wedge\underline{B}),(\underline{A}\wedge\underline{C}),A\wedge(\underline{B}+\underline{C})$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û, ¾Çò¾¢ø Ó¨È§Â $\underline{B},\underline{C},(\underline{B}+\underline{C})$ ¬¸¢Â ¾¢¨º¸Ùì Ì ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ. ±É§Å $\underline{B},\underline{C},(\underline{B}+\underline{C})$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç ± ñ ½¢ A¬ø ¦ÀÕì¸¢ «¨Å¸¨Ç $(\underline{B},\underline{C})$ ¾Çò¾¢§Ä§Â 90° «ÇÅ¢ø ¸Ê¸¡Ã Óû ÍüÚõ ¾¢¨ºì Ì ±¾¢Ã¡¸ò ¾¢ÕôÀ¢ $(\underline{A}\wedge\underline{B}),(\underline{A}\wedge\underline{C}),A\wedge(\underline{B}+\underline{C})$ ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çô ¦ÀÈÄ¡õ. $B+C$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢$(\underline{B},\underline{C})$±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø «ñ¨¼ô Àì¸í¸Ç¡¸ì ¦¸¡ñ Î O ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â Å¨ÃÔõ þ¨½¸Ãò¾¢ý ã¨ÄÅ¢ð¼Á¡Å¾¡ø $A\wedge(\underline{B}+\underline{C})$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ $(\underline{A}\wedge\underline{B}),(\underline{A}\wedge\underline{C})$ ¬¸¢ÂÅü¨È «ñ¨¼ô Àì¸í¸Ç¡¸ ¯¨¼Â þ¨½¸Ãò¾¢ý ã¨ÄÅ¢ð¼Á¡ Ìõ. ±É§Å þ¨½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ $A\wedge(\underline{B}+\underline{C})$ ±ýÀÐ $(\underline{A}\wedge\underline{B}),(\underline{A}\wedge\underline{C})$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ ÌÀÂÉ¡ Ìõ. «ô¦À¡ØÐ $A\wedge(\underline{B}+\underline{C})=(\underline{A}\wedge\underline{B})+(\underline{A}\wedge\underline{C})$ ±ýÈ¡ Ìõ.

þí Ì $\underline{B},\underline{C}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´Õ ¾Çò¾¢Öõ $\underline{A}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ «ò¾Çò¾¢ü Ì ¦ºí Ìò¾¡¸×õ ±Î ì¸ôÀð Î ¾¢¨ºÂ¢ ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢Â¢ý À¸¢÷×Å¢¾¢ Å¨ÃÂÚì¸ôÀð Î ûÇÐ.

þÃ ñ¼¡Å¾¡¸ $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çô ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø $\underline{OA},\underline{OB},\underline{OC}$ ±ýÈ «õÒì§¸¡Î ¸û ÌÈ¢ì¸ ðÎ õ.

§ÁÖõ $\underline{OB},\underline{OC}$ ±ýÈ «õÒì§¸¡Î ¸û þí Ìô Òò¾¸ò¾¡Ç¢ø À¼õ 1-30ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. «ô¦À¡ØÐ $\underline{B}$ ¾¢¨ºÂ¢¨Â Òò¾¸ò¾¡Ç¢ø $\underline{A}$ ì Ì î ¦ºí Ìò¾¡¸×õ þ¨½Â¡¸×õ À¸¢÷× ¦ºöÂÓÊÔõ. «¨Å¸¨Ç Ó¨È§Â $\underline{B}_1,\underline{B}_2$ ±Éì ¦¸¡ûÇ×õ. $\underline{n}^{+}$ ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢ ¸¡¸¢¾ò¾¡Ù ì Ì ¦ºí Ìò¾¡É ¾¢¨º¨Âì ÌÈ¢ì¸ðÎ õ. ¾¢¨ºÂ¢ ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢ Å¢¾¢ôÀÊ



À¼õ 1-30

$\underline{A}\wedge\underline{B}=\left(AB\sin^{-}\right)\underline{n+},\ \left(^{-}=\underline{A},\underline{B}\right.$ ì ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ §¸¡ ½ õ

$=A\left(B\sin^{-}\right)\underline{n+}$

$=AB_1\underline{n+}$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ

$\underline{A}\wedge\underline{B_1}=\left(AB_1\sin 90^\circ\right)\underline{n+}$

$=AB_1\underline{n+}$ ¬ Ì õ.

$\underline{A}\wedge\underline{B_2}=\left(AB_2\sin 0^\circ\right)\underline{n+}$

$=\underline{0}$ ¬ Ì õ. $\left(\because \underline{A},\underline{B_2}\right)$ ¬ ¸¢Â ¨ Å þ ¨ ½ ò¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û

¬ ¾Ä¡ø ,

$\underline{A}\wedge\underline{B}=\underline{A}\wedge\left(\underline{B_1}+\underline{B_2}\right)=\underline{A}\wedge\underline{B_1}$ ¬ Ì õ « ùÅ¡§È $\underline{C}$ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â, $\underline{A},\underline{C}$ ¾Çò¾¢ø $\underline{A}$ ì Ì î ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ ×õ þ ¨ ½ Â¡ ¸ ×õ À ¸¢÷× ¦ ºöÂ×õ. « ¨ Å ¸ ¨ Ç Ó ¨ È§Â $\underline{C_1},\underline{C_2}$ ±É ì ¦ ¸ ¡ûÇ×õ.

$\underline{n_1+}$ ± ý È µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢, $\underline{A},\underline{C}$ ¾Çò¾¢ü Ì î ¦ º í Ì ò¾¡É ¾¢ ¨ º ¨ Âì Ì È¢ì ¸ ð Î õ. « ô¦Ã¡ØÐ

$\underline{A}\wedge\underline{C}=\left(AC\sin¤\right)\underline{n_1+}\ \left(¤=\underline{A},\underline{C}\right.$ ì ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ §¸¡ ½ õ)

$=\left(AC_1\right)\underline{n_1+}$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ

$\underline{A}\wedge\underline{C_1}=\left(AC_1\sin 90^\circ\right)\underline{n_1+}$

$=\left(AC_1\right)\underline{n_1+}$ ± ý Úõ

$\left(\underline{A}\wedge\underline{C_2}=\left(AC_2\sin 0^\circ\right)\underline{n_1+}\right.$ $\left(\underline{A}\wedge\underline{C_2}=\left(AC_2\sin 0^\circ\right)\underline{n_1+}\right)\left(\therefore \underline{A_1},\underline{C_2}=0\right.$ ¬ ¸¢Â ¨ Å þ ¨ ½ ò¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û) ± ý Úõ ¬ Å¾¡ø,

$\underline{A}\wedge\underline{C}=\underline{A}\wedge\left(\underline{C_1}+\underline{C_2}\right)=\underline{A}\wedge\underline{C_1}$ ¬ Ì õ.

« ùÅ¡§È

$\underline{A}\wedge(\underline{B}+\underline{C})=\underline{A}\wedge(\underline{B_1}+\underline{B_2}+\underline{C_1}+\underline{C_2})$

$=\underline{A}\wedge(\underline{B_1}+\underline{C_1}+\underline{B_2}+\underline{C_2})$

$=\underline{A}\wedge(\underline{B_1}+\underline{C_1})$ ¬ Ì õ.

$\underline{B_1},\underline{C_1}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û A ì Ì î ¦ºí Ìò¾¡¸ « ¨ÁÅ¾¡ø,

$\underline{A}\wedge(\underline{B_1}+\underline{C_1})=(\underline{A}\wedge\underline{B_1})+(\underline{A}\wedge\underline{C_1})$ ¬ Ì õ.

«¾¡ÅÐ $\underline{A}\wedge(\underline{B}+\underline{C})=(\underline{A}\wedge\underline{B})+(\underline{A}\wedge\underline{C})$ ±ýÈ¡ Ì õ.

±É§Å ¾¢¨ºÂ¢ì ÌÚì Ìô¦ÀÕì ¸¢. À¸¢÷×Å¢¾¢¨Âò ¾ØÅ¢ ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. þùÅ¢¾¢¨Âô ÀÂýÀÎò¾¢ò ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Å¡¢¨º ¿¢¨Ä¨Â Á¡üÈ¢¼¡Áø ±ØÐõ§À¡Ð, ¾¢¨ºÂ¢ì ÌÚì Ìô¦ÀÕì ¸¢¸Ç¢ý §¸¡¨Å¸ ¨Ç þÂü¸ ½¢¾ Ó¨ÈÂ¢ø Å¢¡¢×ÀÎò¾¢ ±Ø¾Ä¡õ.

«¾¡ÅÐ

$$(\underline{A}+\underline{B}+\underline{C}+......)\wedge(\underline{X}+\underline{Y}+\underline{Z}+........)$$

$$=\underline{A}\wedge\underline{X}+\underline{A}\wedge\underline{Y}+\underline{A}\wedge\underline{Z}+..........$$

$$+\underline{B}\wedge\underline{X}+\underline{B}\wedge\underline{Y}+\underline{B}\wedge\underline{Z}+..........$$

$$+\underline{C}\wedge\underline{X}+\underline{C}\wedge\underline{Y}+\underline{C}\wedge\underline{Z}+..........+$$

$+..........$ ±ýÈ¡ Ì õ.

[ÌÈ¢ôÒ: ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ±ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢, ÌÚì Ìô¦ÀÕì ¸¢ ¬¸¢ÂÅü¨È Å¨ÃÂÚôÀ¾¢ø, "." ÒûÇ¢, «øÄÐ "∧" ¦ÀÕì ¸ø ±ýÈ þÕ ÌÈ¢Â£Î¸ Ù ì Ì þÕÈí ¸Ç¢Öõ ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Çô ÀÂýÀÎò¾ §Å ñ Î õ.

±ñ ¸ Ù ì Ì þùÅ¢¾¢¸û ¦À¡Õò¾Á¡üÈ ¨Å]

1.19. þÃ ñ Êü Ì §ÁüÀð¼ ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Çô ¦ÀÕì Ì¾ø ã ýÚ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ±ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢ (Scalar product of three Vectors)

±ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢, ÌÚì Ìô¦ÀÕì ¸¢¸ ¨Ç Å¨ÃÂÚì Ì õ§À¡Ð, ¸¡Ã½¢¸û (Factors) ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ò¾¡ ý þÕì ¸ §Å ñ Î ¦ÁÉ ÓýÉ§Ã ÜÈôÀð¼Ð. ¬¸§Å $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ±ýÈ ã ýÚ ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Çì ¸¡Ã½¢¸Ç¡¸ ±Î òÐ, À¢ý ÅÕõ ¦À¡Õû ¾Õõ Å ¨¸¸Ç¢ø¾¡ ý ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Çî §º÷òÐô ¦ÀÕì Ì¾ø Å¨ÃÂÚì ¸ôÀÎ õ. « ¨Å¸û Ó¨È§Â, $(i)(\underline{A}.\underline{B})\underline{C}$;

$(ii)\underline{A}.(\underline{B}\wedge\underline{C})$;

$(iii)\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})$

¬ Ì õ.

Ó¾ø Å¨¸Â¢ø, $(\underline{A}.\underline{B})$ ±ýÀÐ ±ñ Á¾¢ôÀ¡É¾¡ø, $(\underline{A}.\underline{B})\underline{C}$ ±ýÀÐ, $\underline{C}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ì Ì þ¨½Â¡¸×õ, «¨¾ô§À¡ø $(\underline{A}.\underline{B})$ Á¼í Ìõ ¯ûÇ ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ìõ. þÃ ñ¼¡õ Å¨¸Â¢Öõ $\underline{A}.(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÀ¾ü Ìõ ¦À¡Õû ¯ ñ Î. ²¦ÉÉ¢ø $(\underline{B}\wedge\underline{C})$

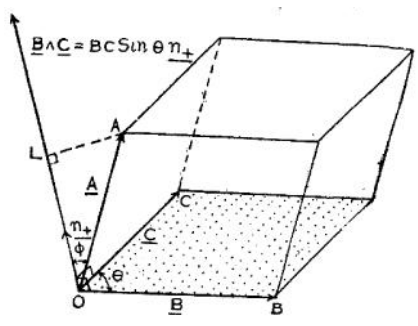
±ýÀÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢¨ÂÔõ, $\underline{A}.(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÀÐ µ÷ ± ñ ½¢ô¦ÀÕì¸¢¨ÂÔõ þí Ì $\underline{A}.(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÀ¾ü Ì ± ñ Á¾¢ôÒ Áð Î §Á ¯ûÇ¾¡ø, «¾¨ É Óì Ü ð Î ± ñ ½¢ô ¦ÀÕì¸¢ (Scalar Triple Product) ±ý Ú ÜÚÅÐ ¦À¡ÕóÐõ. ã ýÈ¡ÅÐ Å¨¸Â¢ø ±Î ò¾ $\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÈ ¦ÀÕì¸Öì Ì õ ¦À¡Õû ¯ ñ Î. þí Ì $(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÀÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ì õ. ¬¸§Å $\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÀÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢ì ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢¨Âì ÌÈ¢ì Ì õ. þí Ì $\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÀÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡Å¾¡ø, «¾¨ É Óì Ü ð Î ì ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢ «øÄÐ ¾¢¨ºÂ¢ Óô¦ÀÕì¸¢ (Vector Triple product) ±ý Ú ÜÚÅÐ ¦À¡ÕóÐõ.

[Ì È¢ôÒ $(\underline{A}.\underline{B}).\underline{C},(\underline{A}.\underline{B})\wedge\underline{C}$ ¬¸¢Â¨ Å ¦À¡ÕÇüÈ¨ Å]

1.19 (1) Óì Ü ð Î ± ñ ½¢ô ¦ÀÕì¸¢Â¢ý Å¢Çì¸× ¨Ã

ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø, O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø $\underline{OA},\underline{OB},\underline{OC}$ ±ýÈ «õÒì§¸¡ Î ¸û, $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çì ÌÈ¢ì¸ð Î õ. $(\underline{OB},\underline{OC})$ ±ýÀ¨ Å ´Õ ¾Çò¨¾ Å¨ÃÂÚì Ì õ.

«ò¾Çò¾¢ü Ì î ¦ºí Ìò¾¡¸× ûÇ $\underline{n+}$ ±ýÈ µÃÄ Ìò ¾¢¨ºÂ¢, $(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢¨º¨Â ì ÌÈ¢ì¸ð Î õ. OB,OC,OA ¬¸¢ÂÅü¨È Å¢Ç¢õÒ¸Ç¡¸ì (Edges) ¦¸¡ ñ¼ µ÷ ¸É þ¨ ½ ¸Ãò¨¾ (Paralleloid) À¼õ 1-31ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¨ÃÂ×õ. OB, OC¸Ù ì Ì þ¨¼ÂÀ¢Ä¨ÁÔõ §¸¡½ò¨¾ ¯ ±É ì ¦¸¡û×õ. $(\underline{A},\underline{n+})$ ¬¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸Ù ì Ì þ¨¼ÂÀ¢Ä¨ÁÔõ §¸¡½ò¨¾ ¤ ±É ì ¦¸¡û×õ.



À¼õ 1-31

¸É þ¨ ½ ¸Ãò¾¢ý «Êò¾ÇôÀÃôÒ $OB.OC\sin¯$ ¬ Ì õ. «¾ý ¦º í Ìò¾Ð ¯ÂÃõ $OL=\underline{A}.\underline{n+}=OA\cos¤$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ, $\underline{B}\wedge\underline{C}=(OB.OC\sin¯)\underline{n+}$ ¬ Ì õ.

±É§Å, $\underline{A}.(\underline{B}\wedge\underline{C})=\underline{A}.(OB.OC\sin¯)\underline{n+}$

$$=OB.OC\sin¯(\underline{A}.\underline{n+})$$

$$OB.OC\sin¯(OA.\cos¤)$$

= ¸É þ¨ ½ ¸Ãò¾¢ý ÀÕÁý ¬ Ì õ.

$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´ ýÚì ¦¸¡ýÚ ¦º í Ìò¾¡¸ þÕì Ì Á¡É¡ø, $¯=90°,¤=0°$

¬ Ì õ. « ô ¦ À ¡ ØÐ,

$$\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=OA.OB.OC$$

= ¸ É ¦ º ù Å ¸ ò¾ ý ÀÕÁ É ¡ Ì õ.

§ÁÖõ,

$$\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right).\underline{A}=-\underline{A}.\left(\underline{C}\wedge\underline{B}\right)=-\left(\underline{C}\wedge\underline{B}\right).\underline{A}$$

$$=\underline{B}.\left(\underline{C}\wedge\underline{A}\right)=\left(\underline{C}\wedge\underline{A}\right).\underline{B}=-\underline{B}.\left(\underline{A}\wedge\underline{C}\right)=-\left(\underline{A}\wedge\underline{C}\right).\underline{B}$$

$$=\underline{C}.\left(\underline{A}\wedge\underline{B}\right)=\left(\underline{A}\wedge\underline{B}\right).\underline{C}=-\underline{C}.\left(\underline{B}\wedge\underline{A}\right)=-\left(\underline{B}\wedge\underline{A}\right).\underline{C}$$

= ¸ É þ ¨ ½ ¸ Ãò¾ ý ÀÕÁ É ¡ Ì õ.

þ í Ì 12 Ó ¨ È ¸ Ç ø Ó ì Ü ð Î ± ñ ½ ô ¦ À Õ ì ¸ ± Ø¾ôÀð Î û ÇÐ. « ÅüÈ ý Á¾ôÒ ¸ û Â ¡ ×õ º ÁÁ ¡ Ì õ. §ÁÖõ Òû Ç, "." Ì Ú ì Ì ô ¦ À Õ ì ¸ ø Ì È -"∧" ¬ ¸ Â Åü ¨ È ÅÕôÀôÀÊ Á ¡ üÈ Â ¨ Á ì ¸ Ä ¡ õ. « ô ¦ À ¡ ØÐ ÀÕÁ ý Á¾ôÀÇ × Á ¡ ÚÅ¾ ø ¨ Ä. ¬ É ¡ ø ±ØòÐ ¸ Ç ý Å ¡ ¨ º « ¨ ÁôÒÓ ¨ È ¸ ¡ ì ¸ ôÀ¼ §Å ñ Î õ. (should be preserved) ²¾ ¡ ÅÐ þÕ±ØòÐ ¸ ¨ Ç ´ÕÓ ¨ È þ¼õ ¦ ÀÂ÷ò¾ Î õ§À ¡ Ð, Ì È Â ø Á ¡ üÈõ (change of sign) ¿ ¸ úÅ ¨ ¾Ôõ, þÕÓ ¨ È þ¼õ ¦ ÀÂ÷ò¾ Î õ§À ¡ Ð Ì È ¿ ¨ Äò¾ÕôÀ ¨ ¾Ôõ ¸ ¡ ½ Ä ¡ õ. ¬ ¾ Ä ¡ ø, Ó ì Ü ð Î ± ñ ½ ô ¦ À Õ ì ¸ ¨ Â $\left[\underline{A},\underline{B},\underline{C}\right]$ ± ý Úõ Ì È ôÀÐ ÅÆ ì ¸ õ.

$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ± ý È ã ý Ú ¾ ¨ º Â ¸ Ù õ ´§Ã ¾Çò¾ Ä ¨ ÁÔ ¦ Á ý È ¡ ø, ¸ É þ ¨ ½ ¸ Ãò¾ ý ÀÕÁ ý ÍÆ Â ¡ Ì õ.

« ¾ ¡ ÅÐ $\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)$ ± ý È ¾ ¨ º Â, $\left(\underline{B},\underline{C}\right)$ ¾Çò¾ ü Ì î ¦ º í Ì ò¾ ¡ É ¾ ¨ º Â ø ¦ º ÂüÀ Î õ. $\underline{A}$ ± ý È ¾ ¨ º Â, $\left(\underline{B},\underline{C}\right)$ ¾Çò¾ Ä ¨ ÁÅ¾ ¡ ø, $\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)$ ¬ ¸ Â Åü È ý ¦ º ÂüÀ Î õ ¾ ¨ º ¸ û ´ ý Ú ì ¦ ¸ ¡ ý Ú ¦ º í Ì ò¾ ¡ É ¨ ÅÂ ¡ Ì õ. ± É §Å « ¨ Å ¸ Ç ý ± ñ ½ ô ¦ À Õ ì ¸ $\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=0$ ¬ Ì õ.

$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ¬ ¸ Â ¾ ¨ º ¸ Ç ø, ²§¾Ûõ þÕ ¾ ¨ º Â ¸ û ºÁÁ ¡ ¸ þÕ ì Ì Á ¡ É ¡ ø, « ¨ Å ¸ Ç ý ± ñ ½ ô ¦ À Õ ì ¸ ÍÆ Â ¡ Ì õ.

« ¾ ¡ ÅÐ $\underline{A}=\underline{B}$ ± É ø,

$$\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=\underline{A}.\left(\underline{A}\wedge\underline{C}\right)$$

$$=\left(\underline{A}\wedge\underline{A}\right).\underline{C}$$

$=\underline{0}.\underline{C}=0$ ¬ Ì õ.

$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ¬ ¸ Â Åü È ý Ó ì Ü ð Î ± ñ ½ ô ¦ À Õ ì ¸ Â ý Á¾ô ¨ À, $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ± ý È µÃÄ Ì ò ¾ ¨ º Â ¸ ¨ Çô ÀÂ ý À Î ò¾Ôõ À ý ÅÕÁ ¡ Ú Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ Ä ¡ õ.

$\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ± ý È ÅÄôÒÈî Íð¼ ¨ ÁôÒ Ó ¨ È Â ø (Right Handed Frame of Reference), $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ± ý È ¾ ¨ º Â ¸ ¨ Ç

$$\underline{A}=A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k}$$

$$\underline{B}=B_x\underline{i}+B_y\underline{j}+B_z\underline{k}$$

$\underline{C}=C_x\underline{i}+C_y\underline{j}+C_z\underline{k}$ ± É ì ¦ ¸ ¡ û Ç×õ.

« ô ¦ À ¡ ØÐ,

$$\underline{B}\wedge\underline{C} = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z\end{pmatrix}$$

$= \left(B_yC_z - B_zC_y\right)\underline{i} + \left(B_zC_x - B_xC_z\right)\underline{j} + \left(B_xC_y - B_yC_x\right)\underline{k}$ ¬ Ì õ.

¬¾Ä¡ø, $\underline{A}.(\underline{B}\wedge\underline{C}) = \left(A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k}\right).\left\{\left(B_yC_z - B_zC_y\right)\underline{i} + \left(B_zC_x - B_xC_z\right)\underline{j} + \left(B_xC_y - B_yC_x\right)\underline{k}\right\}$

$$= A_x\left(B_yC_z - B_zC_y\right) + A_y\left(B_zC_x - B_xC_z\right) + A_z\left(B_xC_y - B_yC_x\right)$$

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$ ¬ Ì õ.

1.20 Óì Üð Î ì Ì Úì Ìô ¦ÀÕì ¸¢ (Vector -Product of three vectors)

$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ±ýÈ ã ýÚ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çô ÀÂýÀÎò¾¢, $\underline{D}=\underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)$ ±ýÈ ´Õ Óì Üð Î ì Ì Úì Ìô¦ÀÕì ¸¢¨Â ±Î ì ¸×õ. þí Ì ,

$\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)$ என்ற ¾¢¨ºÂ¢,$\left(\underline{B},\underline{C}\right)$ ¾¢¨ºÂ¢¸ û Å ¨ÃÂÚì Ì õ ¾Çò¾¢ü Ì î ¦ºí Ì ò¾¡¸ ¯ ûÇÐ.

$\therefore \underline{D}=\underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢, $\left\{\underline{A},\underline{B}\wedge\underline{C}\right\}$ ¾¢¨ºÂ¢¸ û Å ¨ÃÂÚì Ì õ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢, ¾Çò¾¢ü Ì î ¦ºí Ì ò¾¡¸ ¯ ûÇÐ.

«¾¡ÅÐ $\underline{D}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢, $\underline{A}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢, ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºì Ì õ,$\left\{\underline{B},\underline{C}\right\}$ ¾¢¨ºÂ¢¸ û Å ¨ÃÂÚì Ì õ ¾Çò¾¢ý ¦ºí§¸¡ðÊü Ì õ ¦ºí Ì ò¾¡¸ ¯ ûÇÐ.

«¾¡ÅÐ $\underline{D}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢,$\left\{\underline{B},\underline{C}\right\}$ ¾¢¨ºÂ¢¸ û Å ¨ÃÂÚì Ì õ ¾Çò¾¢Ö ûÇÐ.

±É§Å,

$\underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right) = m\underline{B}+n\underline{C}$ ±É Å ¨ÃÂÚì ¸Ä¡õ.

1.20(1) $\underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢ Óô¦ÀÕì ¸¢Â¢ý À¸¡÷× ¸ ¨Ç $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ Íð¼¨ÁôÀ¢ø ¿¢Ú×¾ø

$\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ±ýÈ µÃÄ Ìò ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Çì ¦¸¡ ñ¼ Ìò¾¡Â «¨ÁôÀ¢ø (Orthogonal system), $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ¬ ¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Çô À¢ý ÅÕÁ¡Ú Å ¨ÃÂÚì ¸×õ.

$$\underline{A} = A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k}$$

$$\underline{B} = B_x\underline{i}+B_y\underline{j}+B_z\underline{k}$$

$$\underline{C} = C_x\underline{i}+C_y\underline{j}+C_z\underline{k}$$

$$\therefore \underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right) = \left(A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k}\right)\wedge\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z\end{pmatrix}$$

$$= \left(A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k}\right)\wedge\left\{\left(B_yC_z - B_zC_y\right)\underline{i} + \left(B_zC_x - B_xC_z\right)\underline{j} + \left(B_xC_y - B_yC_x\right)\underline{k}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ A_x & A_y & A_z \\ B_yC_z - B_zC_y & B_zC_x - B_xC_z & B_xC_y - B_yC_x\end{pmatrix}$$

$$= \left\{A_y\left(B_xC_y - B_yC_x\right) - A_z\left(B_zC_x - B_xC_z\right)\right\}\underline{i}$$

$$+\left\{A_z\left(B_yC_z-B_zC_y\right)-A_x\left(B_xC_y-B_yC_x\right)\right\}\underline{j}$$

$$+\left\{A_x\left(B_zC_x-B_xC_z\right)-A_y\left(B_yC_z-B_zC_y\right)\right\}\underline{k}$$

$$=\left(A_xC_x+A_xC_x+A_xC_x\right)B_x\underline{i}-A_xB_xC_x\underline{i}$$

$$+\left(A_xC_x+A_xC_x+A_xC_x\right)B_y\underline{j}-A_yB_yC_y\underline{j}$$

$$+\left(A_xC_x+A_xC_x+A_xC_x\right)B_z\underline{k}-A_zB_zC_z\underline{k}$$

$$-\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)C_x\underline{i}+A_xB_xC_x\underline{i}$$

$$-\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)C_y\underline{j}+A_yB_yC_y\underline{j}$$

$$-\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)C_z\underline{k}+A_zB_zC_z\underline{k}$$

$$=\left(\underline{A}.\underline{C}\right)\left(B_x\underline{i}+B_y\underline{j}+B_z\underline{k}\right)-\left(\underline{A}.\underline{B}\right)\left(C_x\underline{i}+C_y\underline{j}+C_z\underline{k}\right)$$

$$\therefore\ \underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=\left(\underline{A}.\underline{C}\right)\underline{B}-\left(\underline{A}.\underline{B}\right)\underline{C}$$ ¬ Ìõ.

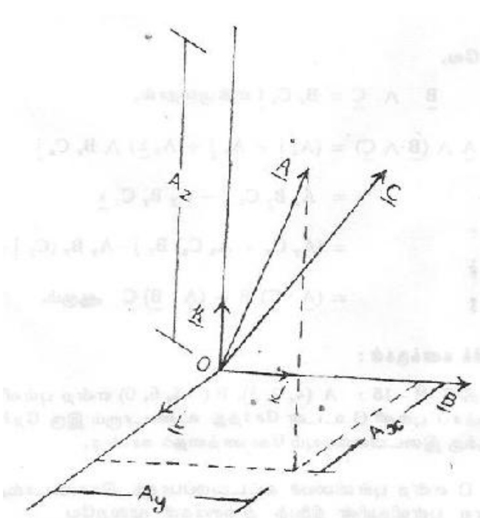
$\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢,$(\underline{B},\underline{C})$ ¾Çò¾¢ü Ì þ¨½Â¡¸î ¦ºÂüÀÎõ. ¬É¡ø $(\underline{A}\wedge\underline{B})\wedge\underline{C}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢,$(\underline{A},\underline{B})$ ¾Çò¾¢ü Ì þ¨½Â¡¸î ¦ºÂüÀÎõ. ±É§Å « ¨Å¸û þÃñ Îõ ºÁÁ¡¸¡Ð.

¬¾Ä¡ø, $\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})\neq(\underline{A}\wedge\underline{B})\wedge\underline{C}$

«¾¡ÅÐ ¾¢¨ºÂ¢ì Ì Úì Ìô¦ÀÕì ¸¢, þÂü¸½¢¾ì Üð Î î§º÷ì ¨¸ Å¢¾¢ì Ì ´òÐÅÕÅ¾¢ø ¨Ä.

1.20 (2) ¾¢¨ºÂ¢ Óô¦ÀÕì ¸¢Â¢ý À¸¢÷× ¸ ¨Ç ±Ç¢ÂÓ ¨ÈÂ¢ø ¾ÕÅ¢ò¾ø

´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ Íð¼ ¨Áô ¨Àò §¾¡÷ó¦¾¼ Îò Ð, $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý À¸¢÷× ¸ ¨Ç « ¨ÁòÐ, ¾¢¨ºÂ¢ Óô¦ÀÕì ¸¢Â¢ý ºÁýÀ¡ð ¨¼ ±Ç¢ÂÓ ¨ÈÂ¢ø À¢ý ÅÕÁ¡Ú ¿¢ÚÅÄ¡õ.



A¼õ 1-32

¾¦¨ºÂ¦ $\underline{B}$ ¨Â, $\underline{j}$ ±ý Ûõ µÃÄ Ìò ¾¦¨ºÂ¦-ý ¾¦¨ºÂ¦Öõ, $\underline{k}$ ±ý Ûõ µÃÄ Ìò ¾¦¨ºÂ¦¨Â, $\underline{j}$ ìÌ ¦ºí Ìò¾¡É ¾¦¨ºÂ¦Öõ ±Î ì¸×õ. $(\underline{j}, \underline{k})$ ¾¦¨ºÂ¦¸û ¿¦Ú×õ ¾Çò¾¦ø, $\underline{C}$ ±ýÈ ¾¦¨ºÂ¦¨Â, «¨Áì¸×õ. $\underline{i}$ ±ý Ûõ µÃÄ Ìò ¾¦¨ºÂ¦¨Â $\underline{j}, \underline{k}$ µÃÄ Ìò ¾¦¨ºÂ¦¸ Ù ìÌî ¦ºí Ìò¾¡¸×õ ±Î ì¸×õ. «ò¾¨¸Â Íð¼¨ÁôÀ¦ø,

$$\underline{B} = B_y \underline{j}$$

$$\underline{C} = C_y \underline{j} - C_z \underline{k}$$

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$$

±É ì ÌÈ¦ì¸ôÀ Îõ.
±É§Å,
$\underline{B} \wedge \underline{C} = B_y C_z \underline{i}$ ±ýÈ¡Å¾¡ø,

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \wedge B_y C_z \underline{i}$$

$$= A_z B_y C_z \underline{j} - A_y B_y C_z \underline{k}$$

$$= (A_y C_y + A_z C_z) B_y \underline{j} - A_y B_y (C_y \underline{j} + C_z \underline{k})$$

$$= (\underline{A}.\underline{C})\underline{B} - (\underline{A}.\underline{B})\underline{C}$$ ¬ Ìõ.

1.21 Å¦¨º¸û (Forces)

þÂó¾¦ÃÅ¦Âø «È¦×òÐ¨ÈÂ¦ø Å¦¨º ±ýÀÐ ¿¦Çõ, §¿Ãõ ¬¸¦ÂÅüÚ¼ý µ÷ «ÊôÀ¨¼ Ã¡º¦Â¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. ´Õ ÌÈ¦ôÀ¦ð¼ ÒûÇ¦¨Â ¿¦¨Äò¾¦¨ºÂ¦ Å¨ÃÂÚôÀ¨¾ô §À¡ø Å¦¨º¸¨ÇÔõ ¾¦¨ºÂ¦¸Ç¦ý ¦Á¡Æ¦Â¡ø Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

1.21.1 Å¦¨ºÂ¦ý ¾ý¨Á (Nature of a force)

Å¦¨ºÂ¦ý ¯û Ù½÷Å¡É º¦Ä ¾ý¨Á¸¨Ç ´Õ º¦Ä ±ÎòÐì¸¡ð Î¸Ç¡ø «È¦ÂÄ¡õ. ´Õ ¦À¡Õû ÒÅ¦¨Â §¿¡ì¸¦ Å¦Øõ§À¡Ð «ô¦À¡ÕÇ¦ý ÁÐ ¦ºÂüÀÎõ ÒÅ¦Â÷ôÒ Å¦¨º§Â «¾ý ±¨¼Â¡Ìõ. ±É§Å ¦À¡ÕÇ¦ý ±¨¼ µ÷ Å¦¨º¨Âì ÌÈ¦ôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. Óý Ûõ À¦ý Ûõ þØì¸ò ¾Ìó¾ ¨ÈÂ¸ Ù ûÇ ¦ÀðÊÂ¦ø ¯ «¨È ´ýÚ º¦ì¸¦ì¦¸¡ ñ¼¡ø «¨¾î º¡¦ÀÎò¾ ¦ÅÇ¦§Â þØì¸ «øÄÐ ¯ðÒÈõ ¦ºÖò¾ ´ÕÅ÷ Å¦¨º¨Âô ÀÂýÀÎò¾ §ÅñÊ ÔûÇÐ. Å¦ð¼ò¾¦ø ð¼ôÀð¼ ¸Â¦Ú ´ýÈ¦ý ¦À¡Õ¨Ç ¦¾¡í¸Å¦ð¼¡ø «Ð ´Õ ºÁ¿¦¨Ä¨Â «¨¼Â ¸Â¦üÈ¦ø §Áø§¿¡ì¸¦Â þØÅ¦¨º (tension)¦ºÂøÀÎ ¦À¡Õû ¸¦§Æ Å¦Æ¡ÁÄ¦Õì¸ ÌõÀ¦Ê ¦ºö¸¦ÈÐ. µ÷ ¯óÐÅ ñ ÊÂ¦ý §Å¸õ Ì¨È ì¸ôÀð¼×¼ý «¨¾ ¿¦Úò¾Å¾ü¸¡¸ ¯Ã¡ö×Å¦¨º (frictional force) ¸¡Ã½Á¡¸ ¯ûÇÐ.

þí Ì ¸¡ðÊÂ ¿¡ý Ì ±ÎòÐì¸¡ð Î¸Ç¦ø Ó¾ÄÅ¦ø ¸ ñ ¼ Å¦¨º ¦À¡Õ¨Ç º¡÷ó¾¦ÕôÀ¾¡¸ø « ¨¾ô ¦À¡ÕûÅ¦¨º (Body force)±É ×õ, þÚ¾¡Â¡¸ ÌÈ¦ôÀ¦ð¼ ã ýÚ Å¦¨º¸ Ùõ ¦¾¡Î ¨¸ (contact) «øÄÐ §ÁüÀÃôÀ¦ø (surface) «¨ÁÅ¾¡ø «¨Å¸¨Ç §ÁüÀÃôÀ¦ø ¦ºÂüÀÎõ Å¦¨º¸¦ÇÉ ×õ (surface forces) ÜÚÅ÷. þí Ì Å¦¨ºÂ¡ÉÐ ´ý¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡Î õÒûÇ¦ «øÄÐ ÀÃôÀ¦ø ¦À¡ÕÇ¦ý§Áø ´ýÚ ¸¼ò¾ôÀÎ ¸¦ÈÐ. ¬¸§Å ±ÎòÐì¸¡ð Î¸Ç¦ø Å¦¨º¸û ´ù¦Å¡ýÈ¦üÌõ ´Õ ÌÈ¦ôÀ¦ð¼ ¾¦¨º ¯ûÇÐ. ÒÅ¦Â÷ôÒ Å¦¨º ¸¦ú§¿¡ì¸¦î ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ, þØôÒ Å¦¨º §Áø§¿¡ì¸¦î ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ.

¦ÀðÊÂ¢ø « ¨È¸ ¨Çî º¡¢ÅÃ ¦À¡ÕòÐÅ¾¢ø «øÄÐ ¾¢ÈôÀ¾¢ø Å¢¨ºÂ¡ÉÐ §¾¨ÅôÀð¼ ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎõ ¯Ã¡ö×Å¢¨º ¦À¡Õû þÂí Ìõ ¾¢¨ºìÌ ±¾¢÷ôÒÈò¾¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ,

§ÁüÜÈ¢Â ±Îòð Ì¸¡ð Î¸Ç¢É¡ø Å¢¨ºÂ¡ÉÐ ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨º¨Â §¿¡ì¸¢î ¦ºÂøÀÎ ÅÐ ÒÄÉ¡ Ìõ.

§ÁÖõ Å¢¨º¸ Ù ì Ì ± ñ Á¾¢ôÒ¸ Ù õ ¯ ñ Î.

¦Áð¡¢ì Ó¨ÈÂ¢ø Å¢¨ºÂ¢ý µÃÄ Ì ¸¢Ã¡õ ±¨¼Â¡ Ìõ. ÒÅ¢Â¢÷ôÒ «Ä Ì Ó¨ÈÂ¢ø «¾ýÁ¾¢ôÒ 9.81 ¿¢äð¼ý ¸Ç¡ Ìõ, À¢¡¢ð¼ý Ó¨ÈÂ¢ø Å¢¨ºÂ¢ý µÃÄ Ì À×½ Î ±¨¼Â¡ Ìõ. «Ð 4.45 ¿¢äð¼ý ±¨¼¸ Ù ì Ì î ºÁÁ¡ Ìõ.

Å¢¨º¸ Ù ì Ì ± ñ Á¾¢ôÒõ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÔõ ¯ûÇ¾¡¨¸Â¡ø « ¨Å¸ ¨ÇÒ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡ø (vectors) «È¢Å¢ì¸ ÓÊÔõ. ¦À¡ÐÅ¡¸ ´Õ Å¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚì¸ «¾ý ± ñ Á¾¢ôÒ (magnitude) ¦ºÂøÀÎõ ¾¢¨º(Direction) ¦ºÂøÀÎõ ÒûÇ¢ (point of application) ¬¸¢Â¨ Å §¾¨ÅôÀÎõ. §ÁüÜÈ¢Â 1,3 ±Îòð Ì¸¡ð Î¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ ÒûÇ¢, ¾¢¨ºÂ¢-ý ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢Öõ 2,4 ±Îòð Ì¸¡ð Î¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõÒûÇ¢ ¾¢¨ºÂ¢-ý ÑÉ¢ôÒûÇ¢Â¢Öõ « ¨Á¸¢ÈÐ.

1.21.2 Ð¸û¸ Ù õ þÚì¸ô¦À¡Õû¸ Ù õ (Particles and Rigid bodies)

þÂó¾¢ÃÅ¢Âø ¸ÕòÐ¸û, Å¢¨º¸Ç¡ø ¦ºÂüÀð Î þÂí¸¢Îõ ¦À¡Õû¸û ±ÐÅ¡¸¢Öõ « ¨Å¸Ç¨ ÉòÐì Ìõ ¦À¡ÐÅ¡¸ þÕì Ìõ. þÂó¾¢ÃÅ¢Âø ¸ÕòÐ¸û, §¸¡ðÀ¡Î¸û ¬¸¢ÂÅü¨È ±Ç¢ÂÓ¨ÈÂ¢ø Å¢Çì¸¢¼, ¦À¡Õû¸Ç¨ ÉòÐ¨¾Ôõ Ð¸û¸Ç¡¸ §Áü¦¸¡ûÅÐ ÅÆì¸õ. þí Ì Ð¸û ±ýÀÐ ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ¸½¢¾Å¢Âø ¯ÕÅôÀÊÅõ(Mathematical model) ¬ Ìõ. ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¯ÕÅõ, Å¡¢Á¡½õ ¬¸¢Â¨Å ¯ ñ ¨ÁÂ¢ø ¦À¡¢Â¨ÅÂ¡¸ þÕó¾ §À¡¾¢Öõ Ýú¿¢¨Ä¸ Ù ì Ì ²üÈÅ¡Ú « ¨Å¸ ¨ÇÒ Ð¸û¸Ç¡¸ì ¸Õ¾§Å ñ Îõ.

±Îòð Ì¸¡ð¼¡¸, µ÷_ ° ºø Ì ñ Êý À¡¢Á¡½õ, ° ºÄ¢ý ¿¢Ç¨¾ §¿¡ì Ìõ§À¡Ð Á¢¸î ºÈ¢Â¾¡¸ ¯ûÇÐ. « ùÅ¡§È Å¡ÉòÐ¢ø ÍüÈ¢Ôõ §¸¡û, «¾ý ÍüÚôÀ¡¨¾Â¢ý À¡¢Á¡½òÐ¼ý ´ôÀ¢Îõ§À¡Ð Á¢¸î ºÈ¢Â¾¡¸ ²ü¸ôÀÎõ. §ÁÖõ ¦¾¡í Ìõ ¦À¡Õû¸û ¾¡úôÀ¡û, Á¨È ¬½¢¸û Ó¾ÄÂ þÚì¸¢¸û « ¨ÉòÐõ ¿¢¨ÄÂÄ¢ø Ð¸û¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ.

¦À¡ÐÅ¡¸ Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä ´Õ ÒûÇ¢Â¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ. ¬É¡ø ¿¨¼Ó¨ÈÂ¢ø Ð¸Ç¢ý §¸¡ðÀ¡Î¸¨Çô ÀÕô¦À¡Õ¨Çî º¡÷ó¾ À¢Ã¢º¢¨É¸Ù ì Ìô ÀÂýÀÎòÐõ§À¡Ð ¦ºÂøÀÎõ À¢¡ÕÇ¢Ä Ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ¾¡ø ¸¢¨¼ìÌõ Å¢¨Ç×¸û, ¯ ñ ¨ÁÂ¡¸ ¿¢ÆìÜÊÂ Å¢¨Ç×¸Ç¢ý §¾¡Ã¡ÂÁ¡¸ ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. þùÅ¡Ú ¸ÕòÐ þÂó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¢ý ÌÈ¢ì§¸¡û ¦¿Ã¢¸Ç¢ø ´ýÈ¡ Ìõ.

º¢Ä ºÁÂí¸Ç¢ø ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ, Ð¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ÓÊÂ¡¾¢Ä¢ÕìÌ Ä¡õ. «ô§À¡Ð ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ ¦ºÂø, ±¾¢÷¦ºÂø Å¢¨ÇÅ¢ìÌõ Ð¸û¸Ç¢ý ¸ÉÁ¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. «ó¾ ¿¢¨Ä¸Ç¢ø Ð¸û¸û ´ýÚì¦¸¡ýÚ þ½ì¸Á¡¸ô À¢½ì¸ôÀðÎõ, Ð¸û¸ Ù ì Ì ûÇ þ¨¼¦¾¡¨Ä×¸û Á¡È¡ÁÖõ þÕì¸ì¸ìÌÁ¡É¾¡ø ¦À¡Õ¨Ç þÚì¸ô¦À¡ÕÇ¡¸ì (Rigid Body) ¸Õ¾§Å ñ Îõ. ¯óÐÅ ñ Ê, ²½¢, ºð¼í¸û (frames)þÂó¾¢Ãô À Ì ¾¢¸û ¬¸¢Â¨Å þÚì¸ô¦À¡Õû¸ Ù ì Ì ´Õ º¢Ä ±Îòð Ì¸¡ð Î¸Ç¡ Ìõ.

þÂó¾¢ÃÅ¢Âø ±ýÀÐ ¦À¡Õû¸Ç¢ý þÂì¸ò¨¾ô ÀüÈ¢ì ÜÚ¸¢ÈÐ ±É Ì ÜÈôÀð¼Ð. §ÁÖõ þÂó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¢ø þÂì¸ò¾¢ü Ì ì ¸¡Ã½Á¡¸ ¯ûÇ Å¢¨º¸ ¨Çô ÀüÈ¢Ôõ «È¢ÂÄ¡õ. ´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É ÒûÇ¢¨Âô ¦À¡ÚòÐ ´Õ

¦À¡Õû «øÄÐ ´ÕÐ¸û ±ô¦À¡ØÐõ ´§Ã¿¢¨ÄÂ¢ø þÕó¾¡ø «Ð µöÅ¢ø þÕôÀ¾¡¸ (at rest) ÜÈôÀÎõ. Á¡È¡¸ «òÐ¸û ¾ý ¿¢¨Ä¨Âò ¦¾¡¼÷óÐ Á¡üÈ¢ì¦¸¡ñ§¼ þÕó¾¡ø «Ð þÂí¸¢ÈÐ ±É ÜÈôÀÎõ. ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ Íð¼¨Áô¨À (frame of reference) §Áü¦¸¡ñ¼¡ø ¾¡ý µö×, þÂì¸õ ¬¸¢Â¨Å ¦À¡Õ¨Çô (meaning) ¦ÀüÈ¾¡¸ì ¸Õ¾ÓÊÔõ.

¿¢¨ÄÂ¢ÂÄ¢ø ¿¢¨ÄÂ¡¸ ¯ûÇ ¦À¡È¢Â¢Âü º¡÷ó¾ ãÄô¦À¡Õû¸Ç¢ø, Å¢¨º¸Ç¢ý ¸½õ, ¦À¡Õû¸û ´§Ã¿¢¨ÄÂ¢ø þÕôÀ¾ü§¸üÀ ±ùÅ¡Ú ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ ±ýÀ¨¾ «È¢ÂÄ¡õ. Ó¾Ä¡Å¾¡¸, Å¢¨º¸Ç¢ý ¸½ò¾¡ø ´Õ Ð¸û ÅºôÀðÊÕì Ìõ§À¡Ð, «Ð ±ùÅ¡Ú ´§Ã¿¢¨ÄÂ¡É ÒûÇ¢Â¢ø «¨Áó¾¢Õì¸ ÓÊÔõ ±ýÀ¨¾ô ÀüÈ¢Ôõ þÚ¾¢Â¡¸ þÚì¸ô¦À¡Õû¸Ç¢ý ¸½õ (set of rigid bodies) ±ùÅ¡Ú ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸Ç¡ø ´§Ã¿¢¨ÄÂ¢ø «¨Áó¾¢Õì¸ ÓÊÔõ ±ýÀ¨¾ô ÀüÈ¢Ôõ ¿¢¨ÄÂ¢ÂÄ¢ø ÀÊôÀÅÉÅ¡¸ «È¢ÂÓÊ¸¢ÈÐ.

1.21.3 ¿¢äð¼É¢ý þÂì¸Å¢Âø Å¢¾¢¸û (Newton's Laws of motion)

þÂó¾¢ÃÅ¢Âø «È¢×òÐ¨È¸Ç¢ø Á¢¸×õ ÌÈ¢ôÀ¢¼ò¾ì¸¾¡É «ÊôÀ¨¼ ¸ÕòÐ¸û ±øÄ¡õ «ÛÀÅò¾¢ø ÀÆ¸¢ô§À¡É ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸§ÇÂ¡Ìõ. Å¢¨º ±ýÈ¡ø ±ýÉ? «ùÅ¢¨ºÂ¡ÌÌõ Ð¸Ç¢ý þÂì¸ò¾¢üÌõ ¯ûÇ ¦¾¡¼÷Ò ±ýÉ? - ±ýÀ¨Å ÀüÈ¢ ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸û ÜÚ¸¢ýÈÉ. ¿¢äð¼É¢ý þÂì¸Å¢Âø Å¢¾¢¸û À¢ý ÅÕÁ¡Ú.

Ó¾ø Å¢¾¢ ÒÈÅ¢¨º ´ýÚ ¦ºÂüÀÎõÅ¨Ã «¨Á¾¢¿¢¨Ä(«øÄÐ µö× ¿¢¨Ä) «øÄÐ §¿÷§¸¡ðÊø ºÃ¡É ¾¢¨º§Å¸ ¿¢¨ÄÂ¢ÖûÇ ´Õ¦À¡Õû, «ó¾ ¿¢¨ÄÂ¢§ÄÂ§Â ¦¾¡¼÷óÐ þÕìÌõ.

þÃñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸ò¾¢üÌ¡¢Â ÓÎì¸õ, «¾ý ÁÐ ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨ºìÌ §¿÷Å¢¸¢¾ò¾¢ø «¨ÁÅ§¾¡Î «ùÅ¢¨ºÂ¢ý ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â ²üÀÎ¸¢ÈÐ.

ãýÈ¡ÅÐ Å¢¾¢ ´ù¦Å¡Õ Å¢¨ºìÌõ «¾üÌî ºÁÁ¡É ±¾¢÷Å¢¨º ¯ñÎ. §ÁüÜÈ¢Â §¸¡ðÀ¡Î¸Ç¢ø ÀÂýÀÎò¾ôÀð¼ µö×, þÂì¸õ ¬¸¢Â¨Å_ þÕ ¦º¡ü¸Ù ìÌõ ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ Íð¼¨Áô§À¡Ð «ÊôÀ¨¼Â¢ø¾¡ý ¦À¡Õû ¯ñÎ ±ýÀ¨¾ ÁÉ¾¢ø ¦¸¡ûÇ§Åñ Îõ. ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸¨Ç §¿ÃÊ¡¸ ¿¢åÀ¢ì¸ ìÜÊÂ ±ùÅ¢¾ §º¡¾¨É¸¨ÇÔõ «¨Áì¸ ÓÊÂ¡Ð. þÕó¾§À¡¾¢Öõ ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¿¢¨ÄÂ¡É Íð¼¨Áô§À¡Ð «øÄÐ §¿÷§¸¡ðÊø ºÃ¡É ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý þÂíÌõ Íð¼¨Áô§À¡Ð ¬¸¢ÂÅü¨È¢ý «Êô¨À¨¼Â¡¸ ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸û ÐøÄ¢ÂÁ¡É (exact) «øÄÐ À¢ÈÆ¡¾ Å¢¨Ç×¸¨Ç «ÛÀÅò¾¢ø ¿¢¸úó¾¢¼Î ¦ºöÔõ. Å¡É¢ÂÄ¢ø Å¢ñÁ¢ý¸û ¿¢¨ÄÂ¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎÅ¾¡ø «Åü¢ý Íð¼¨Áô¨À «ÊôÀ¨¼Â¡¸ì ¦¸¡ñÎ §¸¡û¸¨Çî º¡÷ó¾ Å¢¨Ç×¸û ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸Ù ìÌì ¸ðÎôÀðÎ À¢¨ÆÂ¢ýÈ¢ ¿¢¸úÅ¾¡ø ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸û ²ü¸òì¸¾¡¸ ¯ûÇÉ.

±É§Å ¿¢¨ÄÂ¡É Íð¼¨ÁôÒ Ó¨È¨Â §Áü¦¸¡ñ¼¡ø ¾¡ý ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸û ÀÂÛûÇ Å¢¨Ç×¸¨Ç ¿¢¸úó¾¢¼Î ¦ºöÔõ. ¿¢¨Ä¨ÂÂ¢Ä Íð¼¨ÁôÀ¢ý (frame of reference) «ÊôÀ¨¼Â¢ø ±Îò¾¢Îõ ÍÆÖõ Íð¼¨ÁôÒì¸Ç¢Öõ (Rotating frames) ÓÎì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇ Íð¼¨ÁôÒ¸Ç¢Öõ (Accelerated frame of reference) ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸Ùìì¡¢Â Àñ¨À¸û Ó¨È§Â ÍÆüº¢, ÓÎì¸õ ¬¸¢ÂÅü¨È ¦À¡ÚòÐ ¾¢Õò¾ô¦À¡ÕÇ¡Ú Á¡ÚÀ¼ìÜÊ¨Å. þùÅ¢¾õ Íð¼¨ÁôÒ¸Ùì¸Ìõ ¿¢äð¼É¢ý Å¢¾¢¸û ²üÀ¨ÅÂøÄ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, ÍÆ¨ÄÔõ Íð¼¨ÁôÀ¡¸ì ¸ÕÐõ§À¡Ð, ÍÆ¢ôÀÃôÀ¢ýÁÐ ¯ûÇ ´Õ ¦À¡Õû µöÅ¢ø («¾¡ÅÐ ´§Ã «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ø)þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. ¬É¡ø Ý¡¢Â¨É î Íð¼¨ÁôÀ¡¸ì ¦¸¡ñ¼¡ø «ô¦À¡ÕÇû µöÅ¢Ä¢ÕôÀ¾¢ø¨Ä. þÂì¸Å¢ÂÄ¢ø, ÒÅ¢§Â Ìð¼¨ÁôÀ¡¸ ¸Õ¾ôÀÎõ. ¿¢ä ð¼É¢ý Å¢¾¢¸û ´ù¦Å¡ý ¨ÈÔõ ºüÚ Å¢¡¢Å¡¸ì ¸¡ûì¸ ñ ¼Å¡Ú ¬Ã¡öó¾¢¼Ä¡õ.

1.21.3 (1) Ó¾ø Å¢¾¢

þùÅ¢¾¢¨Â þÕ¿¢¨Ä¸Ç¢ø ¬Ã¡ÂÄ¡õ. ´ýÚ «¨Á¾¢¿¢¨ÄÂ¢ø þÕìÌõ ´Õ ¦À¡Õû, ÒÈÅ¢¨º¦Â¡ýÚ ¦ºÂüÀÎõÅ¨Ã ±ô§À¡Ðõ «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢§Ä§Â þÕìÌõ. Áü¦È¡ýÚ, º¡É ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý ´Õ §¿÷§¸¡ðÊø þÂí Ìõ ´Õ ¦À¡Õû, ÒÈÅ¢¨º ´ýÚ ¦ºÂüÀÎõÅ¨Ã, «§¾ §¿÷§¸¡ðÊø «§¾ §Å¸òÐ¼ý ±ô§À¡Ðõ þÂí Ìõ. þùÅ¢Õ ¿¢¨Ä¸Ç¢ý ¯ñ ¨Á¨Â «ýÈ¡¼ ¿¢¸úîº¢¸û Å¡ÂÄ¡¸ Å¢Çì¸¢¼Ä¡õ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, §Á¨ºÂ¢ýÁÐ ¨Åì¸ôÀð¼ âôÀó¨Î « ¨¾ ´ÕÅ÷ ¦¾¡ð Î ¿¸÷ò¾¡ÉÄ¡ýÈ¢ «¨ºÅ¾¢ø¨Ä. §ÁÖõ ¾Ç¢õ ´ýÈ¢ø ´§Ã §Å¸ò¾¢ø ¦ºýÚ ¦¸¡ñ ÊÕì Ìõ âôÀó¨Î ´ýÚ ÒÅ¢Â¢÷ôÒ, ¯¡ö×, ¸¡üÚ Ó¾Ä¢Â Å¢¨º¸Ç¡ø ¾¼í Ì¾¨¼¼ÂüÚ þÕì Ì Á¡¸¢ø «Ð ¿¢ü¸¡Áø, «§¾ §Å¸ò¾¢ø, ¾Ç¢ø ¦ºýÚ ¦¸¡ñ §¼ÂÕì Ìõ. ¬É¡ø «ÛÀÅò¾¢ø âôÀó¾¢ý §Áø §ÁüÜÈ¢Â ÒÈÅ¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎ Å¨¾ò ¾Îì¸ ÓÊÂ¡¾¡¾¡ø «Ð ºüÚò ¦¾¡¨Ä× ¦ºýÈÀ¢ý ¿¢ýÚÅ¢Î¸¢ÈÐ. þùÅ¢¾¢ ¸ûîº¢¸ ¨ÇÂ¡¸ ¦¸¡ñ Îõ ¦¾¡¼÷ìÌõ, ÒÈì¸ÕÅ¢ì¸ÇÀ¡Ç¢ø ²üÚì ¦¸¡ûÇò¾ì¸¾¡¸ ¯ûÇÐ.

Ó¾ø Å¢¾¢Â¢ÄÕóÐ ±ô¦À¡ÕÙõ «¾ý ¿¢¨Ä¨Â Á¡üÈ ÓÂüº¢ì¸¡Ð ¦¸¡ûÇÓÊÂ¡Ð ±ýÀÐ ¸¢¨¼ìÌ¸ ¦ÀÚ¸¢ÈÐ. þùÅ¢¾¢ Àñ Ò ¿¢¨ÄÁõ (inertia)±ýÚ ÜÈôÀÎõ. §ÁÖõ, «ô¦À¡Õû «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ø (equilibirium)þÕôÀ¾¡¸×õ ÜÈôÀÎõ. «¾¡ÅÐ «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ Ä¢Ä¢Â Å¨ÃÂ¨È, ¦¾¡ÌÀÂý ¿¢¸ÃÅ¢¨º (Net resultant force) ÍÆÂ¢¸ §Åñ Îõ ±ýÀ¨¾Ôõ ÅÄ¢ÔÚòÐ¸¢ÈÐ.

¦À¡ÕÇ¢ý§Áø ¦ºÂüÀÎõ ¿¢¸ÃÅ¢¨º ÍÆÂ¢¸ þÕì¸§Åñ Îõ ±ýÈ ¿¢Àó¾¨É, ¦À¡Õû «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕôÀ¾üÌô §À¡ÐÁ¡É¾øÄ ±ýÀ¨¾Ô¾ ÁÉ¾¢ü ¦¸¡ûÇ§Åñ Îõ. (The net force acting on a rigid body must be equal to zero is not enough to ensure its equilibirium) equilibirium ±ýÈ ¬í¸¢ÄîÍ¡ø þÄò¾£ý ¦Á¡ÆÀ¢ÄÕóÐ ¦ÀÈôÀðÎûÇÐ. þÄò¾£ý ¦Á¡ÆÂ¢ø aequus ±ýÈ¡ø equal ºÁõ ±ýÚõ, libra ±ýÈ¡ø balance ºÁ¿¢¨Ä ±ýÚõ ¦À¡ÕûÀÎõ. ¬¸§Å ¦À¡Õû «¨Á¾¢Â¢¸ þÕôÀ¨¾î ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø þÕôÀ¾¡¸ §Áü¦¸¡ûÇ §Åñ Îõ.

§ÁÖõ Å¢¨º ±ýÀÐ ±ýÉ ±ýÚõ Ó¾ø Å¢¾¢Â¢ÄÕóÐ Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

Å¢¨º ±ýÀÐ «¨Á¾¢¿¢¨Ä «øÄÐ §¿÷§¸¡ðÊø º£Ã¡É ¾¢¨º§Å¸ ¿¢¨ÄÂ¢ÖûÇ ¦À¡Õû ´ýÈ¢ø ¦ºÂüÀð Î «ó¿¢¨Ä¨Â Á¡üÈ Î õ ¦ºö¨¸ Â¡Ìõ.

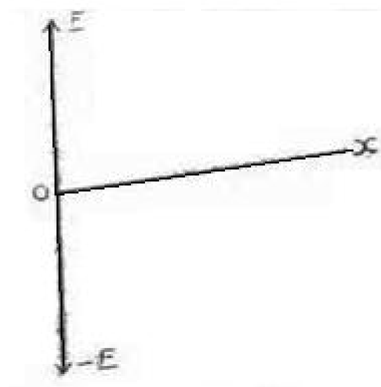
´Õ Å¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚì¸ô À¢ýÅÕõ ÅÇÅí ¸û §¾¨ÅôÀÎõ:

(i) ¾Ìó¾ «ÄÌ§¸¡Ä¢ø Å¢¨ºÂ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ,
(ii) þÂí Ìõ ¾¢¨º(«¾¡ÅÐ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Îõ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÔõ),
(iii) ¦ºÂüÀÎõ ÒûÇ¢ («¾¡ÅÐ ¦À¡Õû ´ýÈ¢ø Å¢¨º ¦ºÂüÀÎõÒûÇ¢)

þ í Ì Å¢¨ºì Ì ±ñ Á¾¢ôÒõ ¾¢¨ºÔõ ¯ ñ ¦¼ýÀ¾¡ø «Ð ´Õ ¾¢¨ºÂ¢(vector) ¬Ìõ.

¦Áð¡¢ì Ó¨ÈÂ¢ø, Å¢¨ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ ÀÊò¾Ã «Ä¸¢ø ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ Å¢¨º (Kgf) ±ýÈ ´ÕÁ Å¢¨º «Ä¸¡Öõ «øÄÐ_¦Áð¡¢ì ¼ý ±ýÈ ´ÕÁÅ¢¨º «Ä¸¡Öõ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. Å¨ÃÀ¼ Å¢Çì¸¯¨ÃÂ¢ø ¾¢¨ºÔ¼ý ÜÊÂ Ð ñ Î

§¿÷§¸¡ð¼¡Öõ «¾¡ÅÐ $\underline{OA}$ ±ýÈ «õÒì ÌÈ¢ÔûÇ §¿÷§¸¡ð¼¡Öõ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ. Å¢¨º ¦ºÂüÀÎõ §¿÷§¸¡Î Å¨ÃÂüÈ¾¡¸×õ, «¾¢ø Å¢¨º ¿ØÅìÜÊÃ¾¡¸×õ (sliding) ¯ûÇÐ. Å¢¨ºìÌ¡¢Â ¾¢¨º¨Â O ±ýÈ Íð¼¨ ÁôÒô ÒûÇ¢Â¢ø ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ Å¨ÃÂôÀÎõ ox.oy.oz ±ýÈ «îÍì¸Ù¼ý Å¢¨º ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î ¾¡íÌõ §¸¡½í¸Ç¢ý ¸¢¼ì¨¸¸Ç¡Öõ «È¢Å¢ì¸Ä¡õ. §ÁÖõ Å¢¨ºìÌ ¯¡¢Â ¾¢¨º, Å¨ÃÀ¼ò¾¢ø Ð ñ Î §¿÷§¸¡ðÊý ÑÉ¢ôÀÌ¾¢Â¢ø Å¨ÃÂôÀÎõ «õÒì ÌÈ¢Â¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ.



À¼õ 1-41

þÕÅ¢¨º¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ¸û ºÁÁ¡¸×õ, ¦ºÂüÀÎõ§¸¡Î ´ýÈ¡¸×õ, ¬É¡ø ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¸û ´ýÚì¦¸¡ýÚ ±¾¢Ã¡¸×õ þÕì ÌÁ¡É¡ø, «¨Å¸û ´Õ Ð¸Ç¢ý§Áø _¦ºÂüÀÎõ§ÀÐ ±¾¢¦Ã¾¢÷ º¡¢¿¢¸÷ Å¢¨Ç×¸¨Ç À¼õ 1.41ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ ñ ÎÀ ñ Ï õ. «ô§ÀÐ Ð¸Ç¢ý§Áø ¦ºÂüÀÎõ ¿¢¸ÃÅ¢¨ºÂ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý ÍÆ¢ò¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ. ±É§Å ÒûÇ¢ «¨Á¾¢¿¢¨ÄÂ¢ø þÕì¸¢ÈÐ.

´Õ ¦À¡Õ¨Çò Ð¸Ç¡ì ¸ÕÐõ§À¡Ð Å¢¨º¸¨ÇòÐõ Ð¸Ç¢ø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡ø, «¨Å¸û ´ÕÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ Å¢¨ºÇ¡Ìõ. (Concurrent forces). «ô§ÀÐ Å¢¨º¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒõ, ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÔõ «È¢Å¢ì¸ôÀð¼¡ø Áð Î ¿ §À¡ÐÁ¡É¾¡ Ìõ.

1.21.3 (2) þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¢¾¢

þÐ Å¢¨º¨Â «ÇÅ¢ÎÅ¾ü Ì ¯¾Å¢Ò¡¢¸¢ÈÐ. ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ÁÍÐ ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ, «ô¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È, «¾¢ø ²üÀÎõ Ó Î ì¸õ ¬¸¢ÂÅü¨È¢ý ¦ÀÕìÌò ¦¾¡¨¸¡ø «ÇÅ¢¼ôÀÎ¸¢ÈÐ. þùÅ¢¾¢Â¢ý ÅüÈ Å¢Çì¸ í¸û þÂì¸ Å¢Â¢ø À Ì¾¢Â¢ø ¾ÃôÀÎõ.

1.21.3 (3) ã ýÈ¡ÅÐ Å¢¾¢

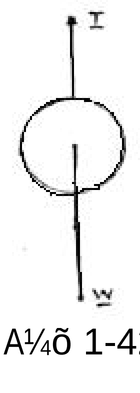
þùÅ¢¾¢ÂÄ¢ÕóÐ Å¢¨º¸û ¾É¢òÐÎ ¦ºÂüÀÎÅ¾¢ø¨Ä. «¨Å ±ô§À¡Ðõ þÃð¨¼Â¡¸§Å «¨ÁóÐ, ´ýÚ ÁüÈ¡ýÈ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒì Ìî ºÁÁ¡¸×õ, ´§Ã §¿÷§¸¡ðÊø, ±¾¢÷ ±¾¢÷ ¾¢¨º¸Ç¢Öõ ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈÉ ±ýÀ¨¾ «È¢ÂÄ¡õ. þÃð¨¼Â¢ÖûÇ Å¢¨º¸û þÃ ñ Îõ ´§Ã§¿Ãò¾¢ø ¦ºÂüÀÎõ ÅÐ þø¨Ä. ¬¾Ä¡ø «¨Å¸Ç¢ø ºÁ¿¢¨Ä¨Â Å¢¨ÇÅ¢ì¸ ÓÊÂ¡Ð.

§Á¨ºÂ¢ýÁ¢Ð ¨Åì¸ôÀð Î ûÇ Ì ñ Î ´ýÚ «¾ý ±¨¼ì Ì î ºÁÁ¡É Å¢¨º¨Â §Á¨ºÂ¢ýÁ¢Ð ¦ºÖòÐ¸¢ÈÐ. §Á¨º§Â¡ «ùÅ¢¨ºì Ì ±¾¢Ã¡ÉÐõ ºÁÁ¡ÉÐÁ¡É Å¢¨º ´ý ¨È Ì ñ ÊýÁ¢Ð Å¢¨ÇÅ¢ì¸¢ÈÐ. «í¹½§Á §Á¨ºÂ¢ý «¨È¨Â ¯û§Ç ¾û Ù õ§À¡Ð «¾üÌ î ºÁÁ¡É Å¢¨º ´ý¨È «¨ÈÂ¡ÉÐ ¾û Ù ÀÅ÷§Áø ¦ºÖòÐ¸¢ÈÐ. ¸Â¢üÈ¢ø ¦¾¡í¸Å¢¼ôÀð¼ ¦À¡Õû, ¸Â¢ü¨Èì ¸¢ú§¿¡ì¸¢ þØì Ì õ§À¡Ð ¿¢¸úò¾¢ Î õ Å¢¨ºì Ì î ºÁÁ¡É Å¢¨º¨Âì ¸Â¢È¡ÉÐ §Áø§¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø ¦À¡ÕÇ¢ý §Áø Å¢¨ÇÅ¢ì¸¢ÈÐ. ¦À¡È¢ Å ñ Êî ºì¸Ãò¾¢ý ¦À¡¾¢¸Åºõ (tyre) À¡¨¾Â¢ý §ÁüÀÃôÀ¢ø ¯óÐ§À¡Ð Óý§É¡ì¸¢ ¿¢¸úò¾¢ Î õ Å¢¨ºì Ì î ºÁÁ¡É Å¢¨º¨Â, ¦À¡È¢Å ñ Ê þÂí Ì õ ¾¢¨ºì Ì ±¾¢÷ò¾¢¨ºÂ¢ø ¾¨ÃÂ¢ý ¯Ã¡ö×Å¢¨º ¦À¡¾¢¸ÅºòÐ¢ý §Áø ¦ºÖòÐ¸¢ÈÐ.

Å¢¨º¸û §º¡ÊÂ¡¸§Å ²üÀÎÅ¾¡ø «ÅüÈ¢ø ±ùÅ¢¨º §Áü¦¸¡ñ¼ ¬ö×ô¦À¡ÕÇ¢ø §¾¨ÅôÀÎ¸¢È§¾¡ «ùÅ¢¨ºì Ì ò¾¡ý ºÁ¢ôÀ¢¼õ «Ç¢ì¸ôÀ¼§Å ñ Î õ. ´Õ ¦À¡Õû ÁüÈô ¦À¡Õû¸Ù¼ý "n" Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¦ºÂø ±¾¢÷¦ºÂø¸¨Ç ¿¢¸úò¾¢ Î õ§À¡Ð «Ð "2n" Å¢¨º¸Ù ì Ì ¯ûÇ¼í¸¢ÔûÇÐ. «ÅüÈ¢ø Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¦À¡ÕÇ¢ý§Áø ¦ºÂüÀÎõ "n" Å¢¨º¸¨Çò ¾¡ý §Áü¦¸¡ûÇ §Å ñ Î õ. «¾¡ÅÐ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¦À¡Õ¨Çò ¾É¢ôÀÎò¾¢ (isolate) ÁüÈô¦À¡Õû¸û «¾ý§Áø ¦ºÂüÀÎòÐõ Å¢¨º¸¨Çò ¾¡ý ¬ö×ì Ì ±ÎòÐì¦¸¡ûÇ §Å ñ Î õ. þùÅ¢¾õ ¦À¡Õ¨Çò ¾É¢ôÀÎò¾¢ «¾ý§Áø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸¨Çì Ì È¢ôÀ¢ÎÅ¾¢ø Å¢Çì¸ôÀ¼¡í¸û ¦À¡¢Ðõ ¯¾Å¢¸¢ýÈÉ. «¾ü¸¡¸ Ó¾Ä¢ø ¾É¢ôÀÎò¾ôÀð¼ ¦À¡ÕÇ¢ý ±ø¨Ä (Outline) Å¨Ãó¾¢¼ §Å ñ Î õ. À¢È Ì «ô¦À¡Õû ÁüÈô¦À¡Õû¸Ù¼ý ¦ºÂø, ±¾¢÷î¦ºÂø¸¨Ç Å¢¨ÇÅ¢ì Ì õ ÀûÇ¢ ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ «ô¦À¡ÕÇ¢ý §Áø ¦ºÂüÀÎõ ÀÈÅ¢¨º¸¨Ç Ù ì Ì ¡¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çì Ì È¢ì¸§Å ñ Î õ. «ô§À¡Ð ¸¢¨¼ì Ì õ Å¨ÃÀ¼ò¾¢ü Ì ò ¾¨¼Âü È ¦À¡Õû Å¢Çì¸ôÀ¼õ (free body diagram) ±ýÚ ¦ÀÂ÷.

1.21.3 (4) ¾¨¼ÂüÈ ¦À¡Õû Å¨ÃÀ¼ Å¢Çì¸í¸Ù ì Ì ´Õ º¢Ä ±ÎòÐì¸¡ð Î ¸û (free body diagrams some illustrations)

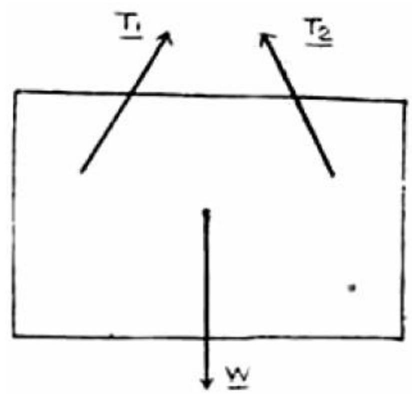
´Õ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼, «ô¦À¡ÕÇ¢ý ÀÅ¢Â÷ôÀò ÀûÇ¢Â¢ø ¸¢ú§¿¡ì¸¢Â Ì òÐ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸ Å¨ÃÂôÀÎõ. ¸Â¢üÈ¢ø ¦¾¡í¸Å¢¼ôÀð¼ Ì ñ Êý ±¨¼(W) ¸¢ú§¿¡ì¸¢Ôõ ¸Â¢üÈ¢ý þØôÒ (T) §Áø§¿¡ì¸¢Ôõ À¼õ 1-42ø ¸¡ðÊÀÊ Ì È¢ì¸ôÀÎõ.



À¼õ 1-42

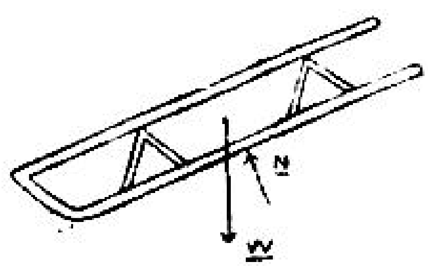
´Õ ¦À¡Õû ÅÆÅÆôÀ¡É ¾¨ÃÂ¢ý§Áø ¨Åì¸ôÀðÊÕì Ì õ§À¡Ð ¾¨ÃÂ¢ý ÒÈÅ¢¨º¨Â, ¦¾¡Î õ ÒûÇ¢Â¢ø ¾¨Ãì Ì î ¦ºí Ì òÐ¾¡É §ÁüÒÈ ¾¢¨ºÂ¢ø, ¦À¡ÕÇ¢ýÁ¢Ð ¦ºÂüÀÎÁ¡Ú Å¨Ã¾ø §Å ñ Î õ. ¯Ã¡ö× Å¢¨ºÂ¡ÉÐ, ¦À¡Õû þÂí Ì õ ¾¢¨ºì Ì ±¾¢÷ò¾¢¨ºÂ¢ø Ì È¢ì¸ôÀÎõ.

¸õÀ¦Â¡ø ¸ð¼ôÀð Î µ÷ ¬ ½¦Â¦ø ¦¾¡ í ¸Å¦¼ôÀð¼ À¼õ ´ ýÈ¦ø $\underline{T_1},\underline{T_2}$ ±ýÈ þØôÒ Å¦¨º¸ ¨Çì ¸õÀ¦Â¦ø ¦¾¡ í ¸Å¦¼ôÀð¼ ÒûÇ¦¨Â §¿¡ì¸¦Ôõ, «¾ý ±¨¼ $\underline{W}$ ³ À¼ò¾¦ý ÒÅ¦Â÷ôÒ ÒûÇ¦Â¦ø ¸¦ú§¿¡ì¸¦Ôõ, À¼õ 1.43ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¨ÃÂ§Å ñ Î õ.



À¼õ 1-43

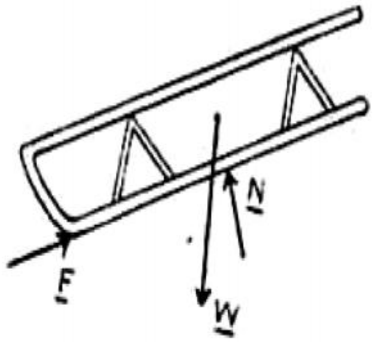
ÅÆÅÆôÀ¡É º¡ö×¾Çò¾¦ø « ¨Áó¾¦Õì Ì õ ºÚì Ì Å ñ Ê ¾Çò ¨¾ò ¦¾¡ Î õ ´ ù¦Å¡Õ ÒûÇ¦Â¦Öõ, ¾Çò¾¦ý ÒÈÅ¦¨º¨Â, ¾Çò¾¦ü Ì î ¦º í Ìò¾¡É ¾¦¨ºÂ¦ø ± Î ôÀ¾ü Ì ô À¾¦Ä¡¸, « ¨Å¸Ç¦ý ¦¾¡ ÌÀÂý Å¦¨º¨Â $(\underline{N})$ ¾Çò¾¦ü Ì Ìò¾¡¸ µ÷ ¯¸ó¾ÒûÇ¦Â¦ø À¼õ 1.44ø ¸¡ðÊÂÀÊ



À¼õ 1-44

¦ºÂüÀ Î Å¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ§Å ñ Î õ. ºÚì¸Å ñ ÊÂ¦ý ±¨¼¨Â $(\underline{W})$ «¾ý ÒÅ¦Â÷ôÒô ÒûÇ¦Âý ÅÆ¦§Â ¸¦ú§¿¡ì¸¦Â Ìò Ð ì§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀ Î Á¡Ú Å¨Ã¾ø §Å ñ Î õ.

ºÚì Ì Å ñ Ê, ¦º¡Ã¦º¡ÃôÀ¡É (rough) ¾Çò¾¦ø « ¨ÁÅ¾¡¸¦ø, §ÁüÜÈ¦Â Å¦¨º¸ Ù¼ý «Ð þÂ í Ìõ ¾¦¨ºì Ì ±¾¦÷ò¾¦¨ºÂ¦ø ¯Ã¡ö×Å¦¨º¨Â $(\underline{F})$ º¡ö× ¾Çò¾¦Ä ¦ºÂüÀ Î Á¡Ú À¼õ 1.45 ø ¸¡ðÊÂÀÊ ÌÈ¦ò¾ø §Å ñ Î õ.



À¼õ 1-45

1.21.3 (4) ¿¢ä ð¼É¢ý ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢¾¢ (Newton's law of gravitation)

þÐ ¿¢ä ð¼É¢ý ã ýÈ¡ÅÐ Å¢¾¢ ¦ºÂüÀ Î Å ¨¾ Å¢Ç ì ¸¢ì ÜÈ¢Å¢ Î õ. þÕ ¦À¡Õû¸ ¨Ç þ ¨ ½òÐ ì ¸ ð Î Å¾ü Ì ¯½÷ó¾È¢Â ì ÜÊÂ º Î ¦À¡Õû (perceptible medium) ²ÐÁ¢ ýÈ¢ « ¨ Å ¸ û ´ ýÚ ì ¦ ¸ ¡ ýÚ ¦ºÂ¦Ä¾¢Ã¡ É ¸ Å÷î º¢ Å¢ ¨ º ¨ Âô ¦ÀüÚ ûÇÉ ± ýÈ Å¢¾¢ ¨ Â ¿¢ä ð¼ ý ¸ ñ Î À¢Êò¾¡÷. þÐ§Å ¿¢ä ð¼É¢ý ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢¾¢Â¡ Ì õ. §ÁÖõ þ ù Å¢¾¢ ì ¸ Å÷î º¢ Å¢ ¨ ºÂ¡ ÉÐ ¦À¡Õû¸ ¨Ç î (Ð ¸ û ¸ ¨ Ç) §º÷ì Ì õ §¿÷§¸ ¡ðÊø ¦ºÂüÀð Î õ «¾ý ± ñ Á¾¢ôÒ ¦À¡Õû ¸ Ù ¨ ¼Â ¿¢ ¨ È ± ñ ¸ Ç¢ý (masses) ¦ÀÕ ì Ì ò¦¾¡ ¨ ÄÅ¢ ý þÕÀÊ ì Ì ±¾¢÷Å¢ ¸ ¢¾ò¾¢Öõ þÕ ì Ì ¦Á ýÚõ ¿¢ä ð¼É¢ý ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢¾¢ ÜÚ ¸ ¢ÈÐ.

þÕ Ð ¸ û ¸ Ç¢ý (¦À¡Õû)¿¢ ¨ È ¸ ¨ Ç Ó ¨ È§Â m_1, m_2 ±É ×õ, « ¨ Å ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å r ±É ×õ ¦ ¸ ¡ûÇ « ¨ Å ¸ û ´ ù¦Å¡ ýÈ¢ý§Áø ¦ºÂüÀ Î õ ¸ Å÷î º¢ Å¢ ¨ º¢ý ± ñ Á¾¢ôÀ¡ ÉÐ ¸ ½ ì ¸ ¢ÂÄ¡ ¸ $F = \frac{G.m_1.m_2}{r^2}$ ± ýÚ «È¢Å¢ì ¸ ôÀ Î õ.

þ í Ì G ± ýÀÐ À ¨ ¼ôÒ ÓØ ¨ Á ì Ì õ ¯ûÇ (universal) ®÷ôÒÅ¢ ¨ ºÂ¢ý Å¡¾« Ç ¨ Å ì Ì È¢ì Ì õ Á¡È¢Ä¢.

Gý Á¾¢ôÒ Á¢ ¸ î º¢È¢Â¾¡É¾¡ø þÕ ¦À¡Õû¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼§Â « ¨ ÁÔõ ¨ ÁÂ®÷ôÒ Å¢ ¨ º Ì È¢ôÀ¢¼ò¾ì ¸ «ÇÅ¢ø þÕôÀ¾ü Ì ¦À¡Õû¸ Ç¢ø ²¾¡Å ¦¾¡ ýÈ¢ý ¿¢ ¨ È Á¢ ¸ ×õ «¾¢ ¸ Á¡ ¸ þÕì ¸ §Å ñ ÊÅÕõ. ± Î òÐì ¸ ¡ð¼¡ ¸ ÒÅ¢Â¢ý §ÁøÀÃôÀ¢Ö ûÇ ¦À¡Õû¸ Ç¢ý ¿¢ ¨ È ¸ û ÒÅ¢Â¢ý ¿¢ ¨ ÈÔ¼ý ´ôÀ¢ Î õ§À¡Ð Á¢ ¸ î º¢È¢Â ¨ Å ¸ Ç¡É¾¡ø ¦À¡Õû¸ Ç¢ý§Áø ¦ºÂüÀ Î õ ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢ ¨ º Á¢ ¸ ×õ Ì È¢ôÀ¢¼ò¾ì ¸ «ÇÅ¢ø ¯ûÇÐ.

1.21.3(4.1)ÒÅ¢Â¢ø µ÷ þ¼ò¾¢ý ÒÅ¢Â÷ôÒ Ó Î ì ¸ ò ¨ ¾ì ¸ ¡ Ï ¾ø

m ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ´Õ Ð ¸ ¨ Ç ÒÅ¢ôÀÃôÀ¢ý§Áø ± Î ì ¸ ×õ. ÒÅ¢ ¨ Âì §¸¡ÇÁ¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î « ¾ý ¿¢ ¨ È, ¬Ãõ ¬ ¸ ¢ÂÅü ¨ È Ó ¨ È§Â M,R ±É ì ¦ ¸ ¡ûÇ×õ. «ô§À¡Ð Ð ¸ Ù ì Ì õ ÒÅ¢ì Ì õ þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ ¸ Å÷î º¢ Å¢ ¨ º $F = \frac{G.M.m}{R^2}$ ± ýÈ ºÁ ýÀ¡ð¼¡ø Å ¨ ÃÂÚì ¸ ôÀ Î õ.

§ÁÖõ Ð ¸ Ç¢ý ± ¨ ¼, «òÐ ¸ Ç¢ý ÁÐ ¦ºÂüÀ Î õ ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢ ¨ ºÂ¡Å¾¡ø, ¿¢ä ð¼É¢ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ,

F = W = mg ¬ Ì õ.

±É§Å $g = \frac{F}{m} = \frac{G.M}{R^2}$ ¬ Ì õ.

þ ¨ ¾§Â Ð¸û þÕì Ìõ þ¼ò¾¢ý ÒÅ¢Â¢÷ôÒ Ó Î ì ¸Á¡¸ ì ¦¸¡ûÇôÀ Î õ. ¦Á¼¡¢ì Ó ¨ ÈÂ¢ø Gý Á¾¢ô ¨ Àô À¢ý ÅÕÁ¡Ú ¦ÀÈÄ¡õ.

$G = 6.54 \times 10^{-4}$ (Á¡ð¼÷)^4 (¸¢.¸¢ Å¢ ¨ º)$^{-1}$ (Å¢É¡Ê) $^{-4}$

ÒÅ¢Â¢ý ¿¢ ¨ È = 6.1×10^{23} (¸¢.¸¢ Å¢ ¨ º) (Á¡ð¼÷)$^{-1}$(Å¢É¡Ê) $^{+2}$

$R =$ ÒÅ¢Â¢ý ¬Ãõ $= 6378$ ¸¢.Á¡ð¼÷.

$= 6378 \times 10^3$ Á¡ð¼÷.

±É§Å

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.54\times10^{-10}\left(\text{Á¡ð¼÷}\right)^4\left(\text{¸¢.¸¢Å¢ ¨ º}\right)^{-1}\left(\text{Å¢É¡Ê}\right)^{-4}\times 6.1\times10^{23}\left(\text{¸¢.¸¢Å¢ ¨ º}\right)\left(\text{Á¡ð¼÷}\right)\left(\text{Å¢É¡Ê}\right)^{-2}}{(6378)^2\times10^6}$$

$$= \frac{6.54\times6.1\times10^{-16}\times10^{23}}{(6378)^2}\left(\text{Á¡ð¼÷}\right)\left(\text{Å¢É¡Ê}\right)^{-2}$$

$$= 9.81\left(\text{Á¡ð¼÷}\right)\left(\text{Å¢É¡Ê}\right)^{-2}$$

¬ Ìõ.

¯ ñ ¨ ÁÂ¢ø ÒÅ¢ ´Õ §¸¡ÇÁ¡Â¢Ã¡¾¾¡ø Rý Á¾¢ôÒõ «¾É¡ø g-ý Á¾¢ôÒõ ÒÅ¢Â¢ý ¨ ÁÂò ¨ ¾ò ÐÅ ì ¸ ôÒûÇ¢Â¡ ¸ ì ¦¸¡ ñ Î «ÇÅ¢ Îõ§À¡Ð Ð¸Ç¢ý ¿¢Ä §¿÷§¸¡ Î (latitude), ¿¢ ¨ Ã§¸¡ Î (longitude) ¬¸¢ÂÅüÈ¢ü Ìõ ²üÈ¡ü§À¡ø Á¡ÚÀ Î õ.

¦À¡Ð¢Â¢Â ¨ Ä î º¡÷ó¾ ¸ ½ ì Ì ¸Ç¢ø, ÒÅ¢ôÀÃôÀ¢ý §Áø ¦À¡Õû « ¨ Áó¾¢Õì Ìõ ¿¢ ¨ Ä ¨ ÁÂ¢ø gý Á¾¢ôÒ 9.81 (Á¡ð¼÷/Å¢É¡Ê^2) ±É ì ¦¸¡ûÇôÀ Î õ.

1.22 Å¢ ¨ º¸Ç¢ý þ ¨ ½ ¸Ã Å¢¾¢(parallelogram law of forces)

þÕÅ¢ ¨ º¸û ´ÕÐ¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î Á¡É¡ø, « ¨ Å¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì À Â ý Å¢ ¨ º ¨ Â þ ¨ ½ ¸Ã Å¢¾¢Â¢ý ãÄõ ¦ÀÈÄ¡õ. Ð¸Çø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º¸ ¨ Çò ¾ Ìó¾ «Ä Ì§¸¡¡Ä¢ø Ð¸û¸ Ù ì Ì ¡¢Â ÒûÇ¢Â¢ø ¾ ¨ ºÂ¢Â¸Ç¡¸ « ¨ ÁòÐ, « ¨ Å¸ ¨ Ç « ñ ¨ ¼ô À Ì ¸ Í ¸Ç¡¸ ì ¦¸ ¡ ñ ¼ µ÷ þ ¨ ½ ¸Ãò ¨ ¾ Å ¨ ÃóÐ, «ôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â « ¨ ÁÔõ þ ¨ ½ ¸Ãò¾¢ý ã ¨ ÄÅ¢ð¼õ þÕÅ¢ ¨ º¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ Å¢ ¨ º ¨ Âò ¦¾¡¢Å¢ì Ìõ.

1.23 «ÊôÀ ¨ ¼ ¦Áöõ ¨ Á¸û (axioms)

¦À¡Ð¢Â¢Â ¨ Ä î º¡÷ó¾ þÂó¾¢ÃÅ¢Âø ´Õº¢Ä «ÊôÀ ¨ ¼ ¦Áöõ ¨ Á¸Ç¡ø ¯ÕÅ¡ì¸ôÀð¼ «È¢×òÐ ¨ ÈÂ¡ Ìõ. þùÅ¢¾ «ÊôÀ ¨ ¼ ¦Áöõ ¨ Á¸û ¸ ½ ì ¸¢ÂÄ¡¸ Å ¨ ÃÂÚì¸ò ¾ì ¸ ¨ ÅÂøÄ. « Û À ÅÓ ¨ ÈÂ¢ø À¡¢§º¡¾ ¨ É¸û Å¡Â¢Ä¡¸ « ¨ Å¸û ²üÚ Î ¦¸¡ûÇò ¾ì¸ É Å¡¸ ¯ûÇÉ.

¿¢ä ð¼É¢ý Å¢¾¸Ç ¨ ÉòÐõ «ÊôÀ ¨ ¼ ¦Áöõ ¨ Á¸Ç¡ Ìõ. ÁüÚõ ´Õ º¢Ä ¦Áöõ ¨ Á¸ ¨ Ç þÃó¾¢ÃÅ¢ÂÄ¢ø ²üÚ ì ¦¸¡ûÇ §Å ñ Ê ¿¢ ¨ Ä ¨ Á¸û ²üÀ Î ¸¢ýÈÉ. « ¨ Å¸û ´ù¦Å¡ýÚõ þ í Ì Å¢Å¡¢ì¸ôÀ Î õ.

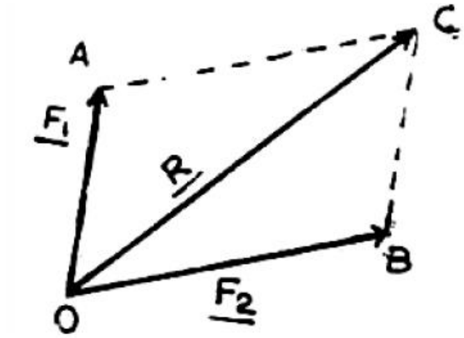
1.23 (1) ¦Áöõ ¨ Á I

Å¢ ¨ º¸Ç¢ý þ ¨ ½ ¸Ã Å¢¾¢ (parallelogram law of forces)

$\underline{F_1}, \underline{F_2}$ ±ýÈ Å¢ ¨ º¸û ¦À¡Õû ´ ýÈ¢ø, O ±ýÈ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀ Î õ§À¡Ð « ¨ Å¸ Ù ì Ì î º¢ºÁÁòÐÅÁ¡É $\underline{R}$ ±ýÈ Å¢ ¨ º ´ýÚ «ôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â

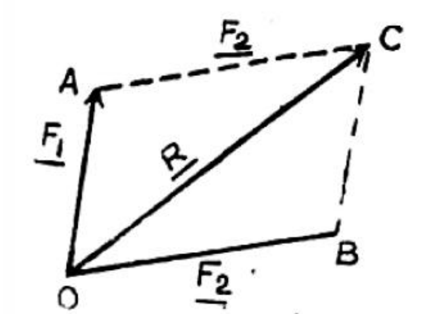
¦ºÂüÀð Î õ, «¾ý ±ñ Á¾¢ôÒ, ¾¢¨º ¬¸¢ÂÅü¨È $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ ¸¨Ç «ñ ¨¼ô Àì¸í¸Ç¡¸ ±Î òÐ «ôÒûÇ¢Âø «¨Áì¸ôÀÎ õ þ¨½¸ÃÁò¾¢ý ã¨ÄÅ¢ð¼õ Å¨ÃÂÚì Î õ ±É þ¨½¸ÃÅ¢¾¢ ÜÚ¸¢ÈÐ.

$\underline{R}$ ±ýÀÐ $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ ±ýÈ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º(Resultant force) ±É ÌÜÈôÀÎ õ. «¨¾ò ¾¢¨ºÂ¢ Ó¨ÈÂ¢ø $\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$ ±É ±Ø¾Ä¡õ,(À¼õ 1.46ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú)



À¼õ 1-46

§ÁÖõ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Â ±Î ò¾ $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ ±ýÈ Å¢¨º¸¨Çò ¾¨¼ÂüÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ (free vectors),



À¼õ 1-47

¨¸Â¡ñ Î $\underline{F}_1$ ý «Ê¨Â 0ø ±Î òÐ «¾ý ÑÉ¢Â¢ø $\underline{F}_2$ ý «Ê¨Âô ¦À¡Õò¾¢ 0¨ÅÔõ $\underline{F}_2$ ÑÉ¢¨ÂÔõ §º÷ò¾¢Î õ «õÒì§¸¡Î Å¨ÃÂÚì Ì õ (À¼õ 1.47ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú)

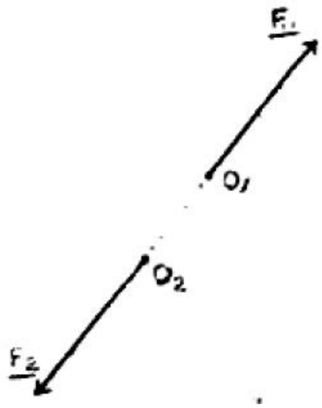
$$\underline{F}_1 = \underline{OA}$$
$$\underline{F}_2 = \underline{OB} = \underline{AC}$$
$$\therefore \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{OA} + \underline{AC}$$

¬ Ì õ.

«¾¡ÅÐ $\underline{R} = \underline{OC}$ ¬ Ì õ.

þÐ§Å Å¢¨ºìÜ Î¾Ä¢ý Óì§¸¡½ Å¢¾¢Â¡ Ì õ. 0 ±ýÈ ÒûÇ¢Âø þÃñ ÎìÌ §ÁüÀð¼ Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎ§ÁÂ¡É¡ø, þ¨½¸ÃÅ¢¾¢¨Âò ¾¢ÕõÀò ¾¢ÕõÀô ÀÂýÀÎ ò¾¢, þÚ¾¢Â¡¸ µ÷ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Â (final resultant force)¾÷Á¡É¢ì¸Ä¡õ «øÄÐ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý "ÑÉ¢ «Ê" ±ýÈ «ÊôÀ¨¼Â¢Öõ þÚ¾¢Â¡¸ ÅÕõ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Âô ¦ÀüÈ¢¼Ä¡õ.

1.23 (2) ¦Áöõ ¨Á II



À¼õ 1-48

$\underline{F}_{1,}\underline{F}_2$ ±ýÈ þÕÅ¨º¸û ´Õ¦À¡ÕÇø ¦ºÂüÀð Î «ô¦À¡Õ¨Ç «¨Á¾ ¿¨ÄÂø þÕì¸î ¦ºöÅ¾¡É¡ø «¨Å¸û ±ñ Á¾ôÒ¸¨Çî ºÁÁ¡¸×õ, ±¾÷ò ¾¨º¸Çø ¦ºÂüÀð Îõ þÄñ Îõ ´§Ã (same) ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ð¨¼ô ¦ÀüÚûÇÉÅ¡¸×õ þÕì¸§Å ñ Îõ. (À¼õ 1.48 ³ô À¡÷ì¸)
¦¸¡û¨¸ÂÇý ÀÊ,

$$\text{«øÄÐ}\quad \underline{F}_{1,} = -\underline{F}_2$$

$$\underline{F}_1 = \underline{F}_2 = 0$$

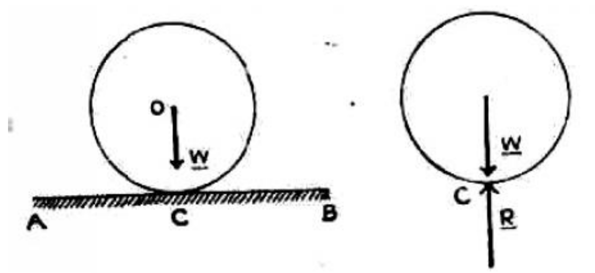
$$\text{«¾¡ÅÐ}\quad \underline{R} = 0$$

±É§Å þí Ì ¦¾¡ ÌÀÂý Å¨º ÍÆÂ¡¸ÈÐ.

¬¾Ä¡ø ¦ÁöÂõ¨Á¸û Iõ,IIõ ´Õ ÒûÇÂø «¨ÁÔõ Å¨º¸û ÒûÇ¨Â «¨Á¾¿¨ÄÂø ¨ÅôÀ¾üÌ «ÅüÈý ¦¾¡ÌÀÂý Å¨º ÍÆÂ¡¸ §Å ñ Î¦ÁýÀ¨¾ Å¨ÃÂÚì¸ýÈÉ.

1.23 (3) ¦Áöõ ¨Á III

´ù¦Å¡Õ ¦ºÂÖìÌõ «¾üÌ ºÁÁ¡É ±¾÷î¦ºÂø ¯ñ Î. þÐ ¿ä ð¼Éý ãýÈ¡ÅÐ Å¾Â¡Ìõ. $\underline{W}$ ±¨¼ÔûÇÐõ, ¯Õ ñ ¨¼ ÅÊÅÓûÇÐÁ¡É, þÕõÒì Ì ñ Î ´ýÚ Áð¼¾Çò¾ø ¨Åì¸ôÀðÊÕôÀ¾¡¸ ¦¸¡ûÇ×õ. Ì ñ Êý ±¨¼, ¾Çò¨¾ò ¦¾¡Îõ ÒûÇÂø ¸ú§¿¡ì¸î ¦ºÂüÀÎ¸ÈÐ. Ì ñ Î «¨Á¾ ¿¨ÄÄÕôÀ¾¡ÖÕõ, «¾ý ±¨¼ ¸ú§¿¡ì¸î ¦ºÂüÀÎÅ¾¡Öõ «¾üÌ ºÁÁ¡É $\underline{R}$ ±ýÈ Å¨º ´ýÚ ¦¾¡ÎõÒûÇÂø §Áø§¿¡ì¸î ¦ºÂüÀ¼ §Å ñ ÊÂ ¿¨Ä¨Á ²üÀÎ¸ÈÐ.



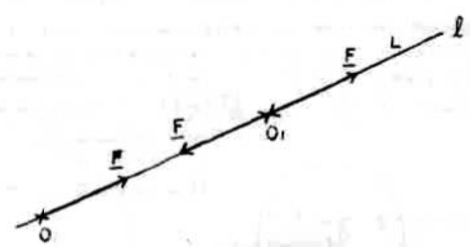
À¼õ 1-49

±É§Å ¦ÁöÂõ ¨Á II ý ÀÊ
$\underline{W} + \underline{R} = 0$ ¬ Ì õ.

$\underline{R}$ ± ý ÀÐ ¾Çò¾¢ ý ±¾¢÷¦ºÂÄ¡üÚõ Å¢¨ºÂ¡ ¸ ì (reaction) ¦ ¸ ¡ û ÇôÀ Î õ (À¼õ 1.49 ³ ô À¡÷ì ¸ ×õ)

1.23 (4) ¦Áöõ ¨Á IV
Å¢ ¨ º ¸ ¼òÐõ § ¸ ¡ ðÀ¡ Î
(The principle of Transmissibility of a force)

´Õ ¦À¡ÕÇ¢ ý §Áø ¦ºÂüÀ Î õ ÒÈÅ¢ ¨ºÂ¢ ý ¸ ½ ò ¨ ¾ì ¸ Å É¢ì Ì õ§À¡Ð ÒÈÅ¢ ¨ º ´ ù ¦Å¡ ý ¨ ÈÔõ ¿Ø×õ ¾¢ ¨ºÂ¢Â¡ ¸ ì (sliding vector) ¦ ¸ ¡ û ÇÄ¡õ. «¾¡ÅÐ ÒÈÅ¢ ¨ º ´ ù ¦Å¡ ý ¨ ÈÔõ ÒÈÅ¢ ¨ º ¦ºÂüÀ Î õ § ¸ ¡ðÊ ý ±ôÒû Ç¢Â¢Öõ ¦ºÂüÀ Î õÀÊ « ¨ Áì ¸ Ä¡õ.



À¼õ 1-50

¦À¡Õû ´ ýÈ¢ ý ÁÐ 0 ± ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø $\underline{F}$ ± ýÈ Å¢ ¨ º l ± ýÈ § ¸ ¡ðÊø, À¼õ 1.50ø ¸ ¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û Ç×õ. « ì§ ¸ ¡ðÊø O_1 ± ýÈ ÒûÇ¢Â¢ ý þÕÒÈí ¸ Ç¢Öõ $\underline{F}$, $\underline{F}$ ± ýÈ Å¢ ¨ º ¸ ¨ Ç ±¾¢¦Ã¾¢Ã¡ ¸ î ¦ºÂøÀ Î õÀÊ « ¨ Áì ¸ ×õ. «ô§À¡Ð ¦À¡Õû Õ ý À¢Õó¾ ¿¢ ¨ ÄÂ¢§Ä§Â þÕì Ì õ.

þ ùÅ¢ ¨ º ¸ Ç¢ ý ¦¾¡ ì ÌÀ ý Å¢ ¨ º ¨ Â ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ç¢ ý Ó ¨ ÈÂ¢ø «È¢Ôõ§À¡Ð Oø OL ± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F}$ õ, O_1 ø O_1O ± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F}$ õ ±¾¢¦Ã¾¢Ã¡ É Å¢ ¨ º ¸ Ç¡Å¾¡ø, « Åü È¢ ý ¦¾¡ ì ÌÀ Â ý Å¢ ¨ º ÍÆÂ¡ Ì õ. «ô§À¡Ð Á¡¾¢Ã¢ì Ì õ $\underline{F}$ ± ýÈ Å¢ ¨ º O_1ø, O_1L ± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î ¸ ¢ÈÐ. ±É§Å $\underline{F}$ ± ý È Å¢ ¨ º ¨ Â ¦ºÂüÀ Î õ ÒûÇ¢ OÅ¢Ä¢ÕóÐ O ì Ì « ¾ ý ¦ºÂüÀ Î õ§ ¸ ¡ðÊ§Ä§Â Á¡üÈ¢Ä¡õ ± ýÀÐ ÒÄ É¡ ¸ ¢ÈÐ. þÐ§Å Å¢ ¨ º ¸ ¼òÐõ § ¸ ¡ðÀ¡¼¡ Ì õ.
þ í Ì

$$\{\underline{F}\}, Oø \equiv \{\underline{F}\}, Oø + \{-\underline{F}\}, O_1ø$$

$$+\{\underline{F}\}, O_1ø \equiv \{\underline{F}\}, O_1ø$$

¬ Ì õ.

1.25 Å¢¨º¸Ç¢ý º¡¢ºÁòÐÅõ(Equivalence of forces)

Å¢¨º¸Ç¢ý þÕ¸½í¸û (two sets of forces) Ð¸û «øÄÐ ¦À¡Õû ´ýÈ¢ø ¦ºÂüÀð Î, ¸½ô¦À¡Ø¾¢ø (instantaneous) Å¢¨ÇÅ¢ì Ìõ ¦ºÂø¸û ºÁÁ¡¸ þÕì Ì§ÁÂ¡É¡ø, «¨Å¸û º¡¢ºÁòÐÅì ¸½Å¢¨º¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ.

þÕÅ¢¨º¸û º¡¢ºÁòÐÅ Å¢¨º¸Ç¡¸ì ¸ÕÐÅ¾üÌ¡¢Â «Å º¢ÂÁ¡ÉÐõ (necessary), §À¡ÐÁ¡ÉÐÁ¡É (sufficient) ¿¢Àó¾¨É¸û À¢ýÅÕÁ¡Ú:

(i) «¨Å¸û ºÁÁ¡É ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡ø «È¢Å¢ì¸ôÀð Îõ

(ii) ´§Ã ¦ºÂüÀÎõ §¿÷§¸¡ð¨¼ô ¦ÀüÚûÇ¾¡¸×õ þÕì¸§Å ñ Îõ.

´§ÃÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸¨Ç ´ýÚ §º÷ò¾¢ÎÅ¾¢ø §º¡¾¨É¸û Å¡Â¢Ä¡¸ «¨Å¸û ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Üð Îî§º÷ì¨¸ Å¢¾¢¨Âô À¢ýÀüÚ¸¢ýÈÉ ±ýÈ ¸¡Ã½ò¾¡ø þ¨½¸ÃÅ¢¾¢ Å¢¨º¸Ù ìÌõ ¦À¡ÕóÐõ ±ýÀÐ ¦¾Ç¢Å¡¸¢ÈÐ.

1.26 Å¢¨º¸½ò¾¢ý ¦¾¡ÌÀÂý (Resultant of a set of forces)

Å¢¨º¸Ç¢ý ¸½õ ´ýÈ¢üÌî º¡¢ºÁòÐÅÁ¡¸ ´Õ ¾É¢ò¾ Å¢¨º þÕôÀ¾¡¸¢ø «¾¨É Å¢¨ºì¸½ò¾¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º ±É ìÜÚÅÐ ÅÆì¸õ.

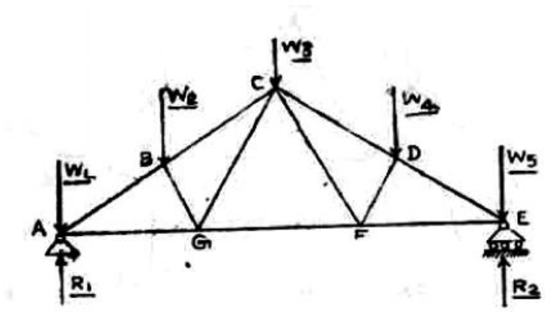
±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸ $\underline{F_1}, \underline{F_2}$ ±ýÈ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸û ´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ºó¾¢ò¾¡ø, «¨Å¸Ç¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º.$\underline{F_1} + \underline{F_2}$, ±ýÈ¡ÅÐ¼ý «Ð Å¢¨º¸û ºó¾¢ìÌõ ÒûÇ¢ ÅÆ¢Â¡¸×õ ¦ºÂüÀÎõ, §ÁÖõ «Ð ºó¾¢ìÌõ ÒûÇ¢Â¢ø $\underline{F_1}, \underline{F_2}$ ¬¸¢ÂÅü¨È «ñ ¨¼ô Àì¸í¸Ç¡¸ì ¦¸¡ñ Î Å¨ÃÂôÀÎõ. þ¨½¸Ãò¾¢ý ã ¨ÄÅ¢ð¼ò¾¡ÖÓõ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

$\underline{F_1}, \underline{F_2}, \underline{F_3}.......\underline{F_i}.....\underline{F_n}$ ±ýÀ¨Å ´Õ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸Ç¡É¡ø «¨Å¸Ç¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º $\underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + ... + \underline{F_i} + ... + \underline{F_n}$ ±ýÈ¡Ìõ. §ÁÖõ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºÔõ «ôÒûÇ¢ ÅÆ¢§ÂºøÖõ. Å¢¨º¸¨Ç ´ýÚ §º÷ôÀ¾¢ø ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çô ÀÂýÀÎòÐÅ¾¡ø, $\underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + ... + \underline{F_i} + ... + \underline{F_n}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Ü Î¾ø, $\sum_{(-)}^{n} \underline{F_i}$ ±ýÚ ÌÈ¢Â¢ðÎ Ó¨ÈÂ¢ø «È¢Å¢ì¸ôÀÎõ. þí Ì Σ ±ýÈ ÌÈ¢Â£Î §Áü¦¸¡ñ¼ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç ì Üð¼§Å ñ Îõ ±ýÀ¨¾ «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ.

1.27 ´§Ã ¾Çò¾¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º «¨ÁôÒ (coplanar force system)

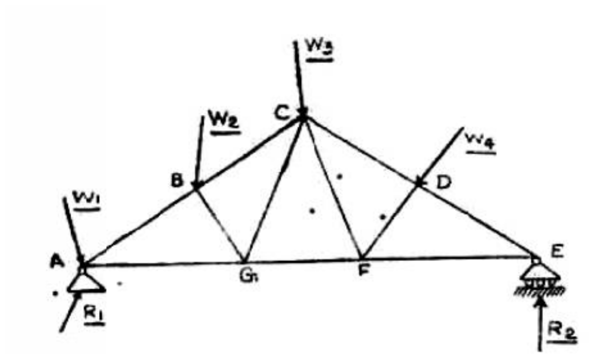
Å¢¨º¸Ç¢ý ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸û ´§Ã¾Çò¾¢ø «¨ÁÔõ§À¡Ð «¨Å¸û ´Õ ¾ÇÅ¢¨º¸¦ÇÉì ÜÈôÀÎõ. ´Õ ¾ÇÅ¢¨º¸û «¨ÉòÐõ ´ÕÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸ «¨ÁÂÄ¡õ. «øÄÐ ´ÕÒûÇ¢Â¢ø ºó¾¢ì¸¡¾ ¾ÇÅ¢¨º¸Ç¡¸×õ þÕì¸Ä¡õ. ±É§Å ¾ÇÅ¢¨º¸¨Ç ´ÕÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ ¾Ç Å¢¨º¸¦Çýõ (concurrent coplanar forces) ´ÕÒûÇ¢Â¢Ä¨ÁÂ¡¾ ¾Ç Å¢¨º¸¦Çýõ (Non concurrent coplanar forces) Å¨¸ôÀÎò¾Ä¡õ. ´ÕÒûÇ¢Â¢Ä¨ÁÂ¡¾ ¾ÇÅ¢¨º¸Ç¢ý ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸û ±øÄ¡õ ´Õ §À¡¸¡Â¡¸ (þ¨½Â¡¸) þÕì¸Ä¡õ. «øÄÐ ±øÄ¡õ þ¨½ÂüÈ¾¡¸ «øÄÐ ´Õ º¢Ä §À¡¸¡Â¡¸×õ ÁüÈ¨Å þ¨½ÂüÈ¾¡¸×õ þÕì¸Ä¡õ.

´Õ Ü¨Ã ¯ò¾Ãò¾¢ý (roof truss) ¦¾¡Ì¾¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸û ´Õ ¾ÇÅ¢¨º¸Ù ìÌ ±ÎòÐì¸¡ð¼¡Ìõ. À¼õ 1.51ø Å¢¨º¸Ç¢ý ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸û ´Õ §À¡¸¡¸¡ ¯ûÇÉ.



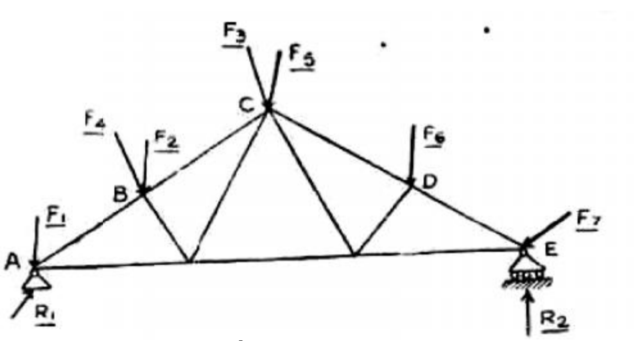
À¼õ 1-51

À¼õ 1.52ø Å¢¨º¸Ç¨ ÉòÐõ ´Õ ¾Çò¾¢ø þ¨ ½ÂüÈ¾¡É « ¨Áô¨Àô ¦ÀüÚûÇÉ.



À¼õ 1-52

À¼õ 1.53ø ´Õ º¢Ä ¾ÇÅ¢¨º¸û ´Õ §À¡¸¡¸×õ, ÁüÈ¨Å ´Õ §À¡¸¡¸ « ¨ÁÂ¡¾ÉÅ¡¸×õ ¯ûÇÉ.



À¼õ 1-53

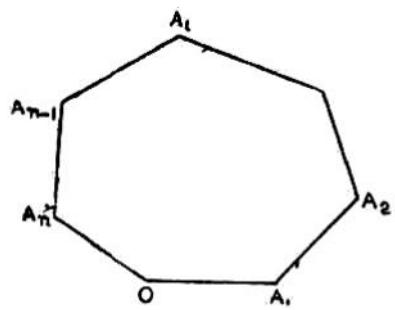
1.27 (1) ¦¾¡ Ì ÀÂ ý (Resultant)

¦¸¡ Î ì¸ôÀð¼Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì Á¢¸ ±Ç¢¾¡¸×õ º¡¢ºÁòÐÅÁ¡¸×õ ¯ûÇ « ¨ÁôÒ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ±ÉôÀ Î õ. ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ´Õ ´ü¨È (single) Å¢¨ºÂ¡¸ ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½Â¡¸ (couple) « øÄÐ ´Õ ¾É¢ò¾ Å¢¨ºÔ¼ý ÜÈÂ ÍÆÄ¢¨ ½Â¡¸ (single force together with a couple) « ¨ÁÂÄ¡õ.

Å¢¨º¸¨Ç ´ýÈ¡¸î §º÷òÐò ¦¾¡ Ì ÀÂ¨ Éô ¦ÀüÈ¢Î õ ¦ºöÓ¨Èì Ì ò ¦¾¡ Ì ôÒ (composition) « øÄÐ ´ Î ì¸õ (reduction) ±Éô ¦ÀÂ÷.

1.27 (2) Å¢¨º¸Ç¢ý Àø§¸¡½õ (polygon of forces)

´Õ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ ´Õ ¾ÇÅ¢¨º¸¨Ç $\underline{F_1}, \underline{F_2}, ...\underline{F_i}.....\underline{F_n}$ ±Éì ¦¸¡ûÇ×õ. þÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Âò ¾¢ÕõÀò¾¢ÕõÀ þ¨½¸Ã Å¢¾¢¨Âô ÀÂýÀÎòÐவதால் அடையலாம்.



À¼õ 1-54

¾Çõ ´ýÈ¢ø À¼õ 1.54ø ¸¡ðÊÔûÇÀÊ 0 ±ýÈ ÒûÇ¢¨Â ±ÎòÐ $\underline{F_1} + \underline{F_2}.......\underline{F_i}.....\underline{F_n}$ ±ýÈ Å¢¨º¸¨Çò ¾Ìó¾ «Ä̧¸¡Ä¢ø Ó¨È§Â $\underline{OA_1}, \underline{A_1A_2}.......\underline{A_iA_i}.......\underline{A_{n-1}A_n}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ñ¼¡ø, þ¨½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ

$$\underline{OA_2} = \underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$$

$$\underline{OA_3} = \underline{OA_2} + \underline{A_2A_3} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3}$$

$$\underline{OA_n} = \underline{OA_{n-1}} + \underline{A_{n-1}A_n}\underline{F_1} + \underline{F_2} + ... + \underline{F_{n-1}} + \underline{F_n}$$ ¬Ìõ.

±É§Å $\underline{OA_n}$ ±ýÀÐ $\{F_1\}$ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ìÌ ²üÈ¾¡É ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º R ³ ÅÃÂÚì¸¢ÈÐ. Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢Âý ±¾¢÷¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º «øÄÐ ºÁÉ¢, $-\underline{R}$ ¬Ìõ. þ¨¾ $\underline{A_nO}$ ±ýÈ «õÒì§¸¡Î ÅÃÂÚì¸¢ÈÐ.

¿¢¨ÄÂ¢ÂÄ¢ø (Statics), Å¢¨º¸¨Çò ¾¨¼ÂüÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ (free vectors) §Áü¦¸¡ñÎ, Óì§¸¡½ ¾¢¨ºÂ¢ì Ü𼠨Å¢¾¢ôÀÊ «øÄÐ "«ÊÑÉ¢" Ó¨È¨Âì ¨¸Â¡ñÎ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Âì ¸¡½Ä¡õ. ¬¾Ä¡ø,

$$\underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} = \underline{OA_2}$$

$$\underline{OA_2} + \underline{A_2A_3} = \underline{OA_3}$$

$$\underline{OA_{n-1}} + \underline{A_{n-1}A_n} = \underline{OA_n}$$ ¬Ìõ.

þÅü¨Èì Üð¼Î§À¡Ð,

$$\underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} + \underline{A_2A_3} + ... + \underline{A_{n-1}A_n} = \underline{OA_n}$$

«¾¡ÅÐ,

$$\underline{OA_n} = \underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} + ... + \underline{A_{n-1}A_n},$$

$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + ... + \underline{F_n},$$

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$$

±ýÈ¡Ìõ.

Å¢¨º¸¨Ç ´ýÈýÀ¢ý ´ýÈ¡¸ ±Î òÐ "«Ê ÑÉ¢" Ó¨ÈÂ¢Ä¨ÁòÐõ ¦¾¡ÌÀÂý ´Å¢¨º¨Â ('R³)ô¦ÀÈÄ¡õ. À¼õ 1.54ø $OA_1, A_2 ... A_n$ ±ýÈ ¯ÕÅõ Å¢¨º¸Ç¢ý Àø§¸¡½õ ±ýÚ ÌÈ¢ôÀ¢¼ôÀÎõ. OA_n ±ýÈ §¸¡Î ÀÄ§¸¡½ò¨¾ ãÊÎõ ÀÌ¸Á¡¸ «¨ÁÔõ. ±É§Å OA_n ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ìÌ ¯¡¢Â ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Â ± ñ Á¾¢ôÀ¢Öõ(magnitude) ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÂ¢Öõ «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ. §ÁÖõ ´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢¨Â þí Ì §Áü¦¸¡ûÅ¾¡ø, «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºÔõ «ôÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºøÄò¾¢ì¸Ð ±ýÀÐõ ¦ÁöÂ¡¸¢ÈÐ.

¾¢¨ºÂ¢ì Üð¼ø (vector addition), Üð¼ü À¡¢Á¡üÚ Å¢¾¢ìÌ (Commutative law of addition) ´ò¾¨ÁÅ¾¡ø, Å¢¨º¸¨Ç Å¨ÃÂÚìÌõ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç, ±ùÅ¢¾ Å¡¢¨º Ó¨ÈÂ¢¦ÄÎòÐõ (in any order) «¾üÌ ²üÈ Å¢¨ºô Àø§¸¡½ò¨¾ Å¨ÃÂÄ¡õ.

´ÕÒûÇ¢Â¢ø ºó¾¢ì¸¡¢¾, ´Õ¾Çò¾¢Ä¨ÁÔõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢¨Â §Áü¦¸¡û Ùõ§À¡Ð ¾Çò¾¢ø, 0 ±ýÈ ÒûÇ¢¨Âò ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¡¸ ±Î òÐ, ¾Ìó¾ «ÄÌ §¸¡Ä¢ø Å¢¨º¸¨Ç Å¨ÃÂÚìÌõ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç ´ýÈ¢ýÀ¢ý ´ýÈ¡¸ ±Î òÐ "«Ê -ÑÉ¢" Ó¨ÈÂ¢Ä¨ÁòÐ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Âô Àø§¸¡½ò¨¾ ãÎõ ÀÌ¸ò¾¡ø Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

þí Ì Å¢¨º¸û ¾¨¼ÂüÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ì (free vector) ¦¸¡ûÇôÀÎÅ¾¡ø ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºÂ¢ý ¦ºÂüÀÎõ ÒûÇ¢ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎÅ¾ø¨Ä. ´ÕÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ìÌ¡¢Â ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º, ÍÆÂ¡Ì¦ÁýÈ¡ø (zero), «ôÒûÇ¢¨Â Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅòÐ¾¢Öì ÌÎõ. «ùÅ¢¾ ¿¢¨ÄÂ¢ø Àø§¸¡½ò¨¾ ãÊÎõ §¸¡ðÊý ¿¦Çõ âîº¢ÂÁ¡ Ìõ. «¾¡ÅÐ þÚ¾¢Â¡¸ «¨Áó¾Îõ Å¢¨ºÂ¢ý ÑÉ¢ôÒûÇ¢, A_n, O ´ýÚÀÎõ. «ô§À¡Ð Å¢¨ºô Àø§¸¡½õ ãÊÂ Àø§¸¡½Á¡¸ «¨Áó¾Îõ.

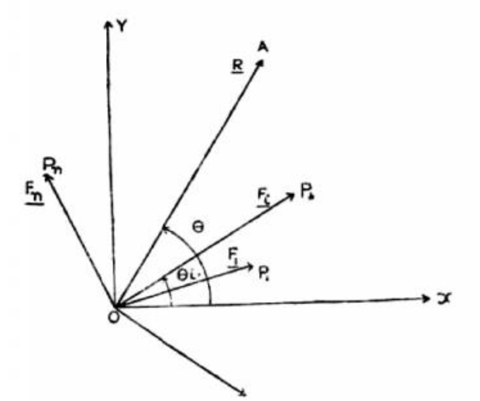
±É§Å ´Õ Ð¸û ºÁ¿¢¨ÄÂ¢Ä¨ÁÂ Ð¸Ç¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸Ù ìÌ¡¢Â Àø§¸¡½õ ã¼ôÀð¼¾¡¸ þÕì¸§Å ñ Îõ ±ýÀ§¾ §Å ñ ÊÂÐõ §À¡¾¢ÂÐÁ¡É ¿¢Àó¾¨ É Â¡ Ìõ.(Necessary and sufficient condition)

1.28 ¾Çõ ´ýÈ¢ø ´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸Ç¢ý À¢¡¢ôÎ (Resolution of coplanar concurrent forces)

Å¨ÃÀ¼ Ó¨ÈÂ¢ø Å¢¨º¸¨Çî §º÷òÐ ¾÷× ¸¡ ñ À¾¢ø Å¢¨ºô Àø§¸¡½õ º¢Èôò¦ÀüÈ¾¡¸ ¯ûÇÐ ¬Ôò¦¾¡¨Ä ÅÊÅ¸½¢¾ Ó¨ÈÂ¢ø Å¢¨º¸Ç¢ý ÜÎ¾¨Ä ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢Â¢ø ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ ×ûÇ þÕ ¾¢¨º¸Ç¢ø (¸¢¨¼, ¿¢¨Ä ¾¢¨º¸Ç¢ø) Å¢¨º¸û ´ù¦Å¡ý¨ÈÔõ À¢¡¢òÐ Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

¾Çõ ´ýÈ¢ø, $\underline{F_1}, \underline{F_2}, ... \underline{F_i} ..... \underline{F_n}$ ±ýÈ Å¢¨º¸û 0 ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. 0³ò ÐÅì¸ ÒûÇ¢Â¡¸×õ, Ox, Oy ±ýÈ ¸¢¨¼, ¿¢¨Ä «îÍì¸¨Ç,i,j ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢¸û Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸×õ ¦¸¡ûÇ×õ. (À¼õ 1.55)

$\underline{R}$ ±ýÀÐ $\{\underline{F_i}\}$ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ÌÀÂ¨ É «È¢Å¢ì¸ð Îõ.



À¼õ 1-55

$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$ ¬ Ì õ. À¼õ 1.55ø $\{\underline{F_i}\}$ ± ý È Å¢ ¨ º ¨ Â $\underline{OP_i}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸¢ÈÐ. P_i Â¢Ä¢ÕóÐ OX ì Ì P_iN_i ± ý È ¦ º í Ì òÐ ì §¸¡ð ¨ ¼ Å ¨ Ã ¸ . $\underline{F_{ix}}, \underline{F_{iy}}$ ± ý À ¨ Å Ó ¨ È§Â OX,OY ¾¢ ¨ º ¸Ç¢ø, þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ôÀÊ, ¬ ì ¸ ì Ü Ú ¸Ç¡ Ì õ (component), F_{ix}, F_{iy} ± ý À ¨ Å OX, OY « î Í ì ¸Ç¢ø Á¾¢ô¦À ñ F_1 ý ¾Ç Å¢úî º¢ ¸Ç¡ Ì õ (projections).

þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ôÀÊ

$$\underline{OP_i} = \underline{ON_i} + \underline{N_iP_i}$$
$$\underline{F_i} = \underline{F_{ix}} + \underline{F_{iy}}$$
$$= F_{ix}\underline{i} + F_{iy}\underline{j}, i = 1, 2, ...n$$

¬ Ì õ.

±É§Å

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = {}_{i=1}{}^{n} \sum (\underline{F}_{ix}\underline{i} + (\underline{F}_{iy}\underline{j})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i (\underline{F}_{ix})\underline{i} + {}_{i=1}{}^{n} \sum (\underline{F}_{iy})\underline{j}$$

« ùÅ¡§È ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º $\underline{R}$ ý ¬ ì ¸ ì Ü Ú ¸ û OX,OY ¾¢ ¨ º ¸Ç¢ø Ó ¨ È§Â R_x, R_y ,± ý È¡ø

$$\underline{R} = \underline{R_x} + \underline{R_y}$$
$$= R_x\underline{i} + R_y\underline{j}$$

¬ Ì õ.

±É§Å $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$ ± ý È ºÁ ý À¡ Î

$$R_x\underline{i} + R_y\underline{j} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)\underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)\underline{j}$$ ± ý È¡ Ì õ.

þÕÒÈí ¸Ç¢Öõ $\underline{i}, \underline{j}$ ±ýÈ µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢¸ Ù ì Ì þ¨ºóÐÅÕõ Á¾¢ôÒ¸¨Çî ºÁýÀ Î ò¾

$$\underline{R_x} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_{ix}}; \underline{R_y} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_{iy}}$$ ±É ×õ ¬ Ì õ.

¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢¨º $\underline{R}$ ý À Ì ¾¢¸Ç¡É R_x, R_y ±ý À¨ Å Ó¨È§Â ox,oy ¾¢¨º¸Ç¢ø Å¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢Ä¨ ÁÔõ Å¢¨º ´ù¦Å¡ýÈ¢ü Ì õ ¯¡¢Â ± ñ ½¢ôÀ Ì ¾¢¸Ç¢ý Ü Î ¾¾Ä¡ Ì õ.

§ÁÖõ

$$R^2 = R_x{}^2 + R_y{}^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F_{ix}}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F_{iy}}\right)^2$$

¬ Ì õ.

¦¾¡ Ì ÀÂÂ ý Å¢¨º $\underline{R}$ ý ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡Î x «î Í¼ý ¯ ±ýÈ §¸¡½ ò¨ ¾ò ¾¡ í Ì Å¾¡¸ ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x}$$ ±ýÈ¡ Ì õ.

«¾¡ÅÐ $\frac{\sin\alpha}{R_y} = \frac{\cos\alpha}{R_x} = \frac{1}{R}$ ±ýÈ¡ Ì õ.

§ÁÖõ $\underline{F_i}$ ±ýÈ Å¢¨º x «î Í¼ý α_i ±ýÈ §¸¡½ò¨¾ «¨Áò¾¡ø

$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i; F_{iy} = F_i \sin\alpha_i$,±ýÈ¡ Ì õ.

¬¾Ä¡ø

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i Cos\alpha_i$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i$$

¬ Ì õ.

1.29 Ð¸û ´ýÚ ¾Çò¾¢ø ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø «¨ÁÅ¾ü Ì ¡¢Â Å¨ÃÂ¨È¸û

¾Çò¾¢ø ´ÕÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢¨º¸û «ôÒûÇ¢Â¢Ä¨ÁÔõ Ð¸¨Ç «¨Á¾ ¿¢¨ÄÂ¢ø «øÄÐ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åò¾¢Õì¸ «ÅüÈ¢ý

(i)¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢¨º ÍÆ¢Â¡¸ §ÅñÎõ

«øÄÐ

(ii) ¾¢¨ºÂ¢ô Àø§¸¡½ ã¼ôÀð¼¾¡¸ «¨ÁÂ §Åñ Î õ.

«øÄÐ

(iii)¾¢¨ºÂ¢ Ó¨ÈÂ¢ø

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = 0,$$ ¬¸ §Åñ Î õ

«øÄÐ

(iv) À Ì Ó ¨ ÈÂ¦ø ¸¦ ¨ ¼, ¿¦ ¨ Ä « î Í ì ¸Ç¦ø Å¦ ¨ º ¸ ¨ Çô À Ì ¾¦ ¸Ç¡ ¸ô À¦¡¦ì ¸

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = 0$$

« ¾¡ÅÐ $Rx = 0, Ry = 0$

« ¾¡ÅÐ, $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$ ± ý È¡ ¸ §Å ñ Î õ

1-30 ÀÃó¾¦ÅÇ¦Â¦ø ´Õ Ð ¸Ç¦ ý ºÁ¿¦ ¨ Ä

(Equilibrium of a particle in space):

´ÕÐ ¸Ç¦ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¦ ¨ º ¸ û, « òÐ ¸ ¨ Ç ì Ì È¦ì Ì õ ÒûÇ¦ ÅÆ¦§Â ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ø « ÅüÈ¦ ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¦ ¨ ºÔõ « ôÒûÇ¦Â¦ ý ÅÆ¦§Â ¦ºÂüÀ Î õ. Ð ¸ û « ¨ Á¾¦¿¦ ¨ ÄÂ¦ø « øÄÐ ºÁ¿¦ ¨ ÄÂ¦ø þ Õ ì ¸, « ¾ ý §Áø ¦ºÂüÀ Î õ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¦ ¨ º ÍÆ¦Â¡ ¸ §Å ñ Î õ ± ý À§¾ §Å ñ ÊÂ (necessary) ¿¦Àó¾ ¨ ÉÂ¡ Ì õ. O ± ý È ÒûÇ¦Â¦ø « ¨ ÁÔõ Ð ¸Ç¦ ý §Áø, $\underline{F}_1, \underline{F}_2 \ldots \underline{F}_i \ldots \underline{F}_n$ ± ý È Å¦ ¨ º ¸ û ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ûÇ×õ. « ¨ Å ¸Ç¦ ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¦ ¨ º ¨ Â $\underline{R}$ ± É ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼¡ø,

$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$ ± ý È¡ Ì õ.

Ð ¸ û « ¨ Á¾¦ ¿¦ ¨ ÄÂ¦Ä¦Õì ¸ò §¾ ¨ ÅÂ¡É ¿¦Àó¾ ¨ É $\underline{R} = zero$ ± ý È¡ Ì õ.

O ± ý È ÒûÇ¦Â¦ø ´ ý Ú ì ¦ ¸ ¡ ý Ú ¦º í Ì ò¾¡ ¸ ¯ûÇ Ox,Oy,Oz ± ý È « î Í ¸ ¨ Ç $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ± ý È µÃÄ Ì ò ¾¦ ¨ ºÂ¦ ¸ û Å ¨ ÃÂÚôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î « ¨ Á ì ¸×õ. $\underline{F_i}$ ± ý È Å¦ ¨ º ¨ Â « ¾ ý ¬ ì ¸ ì Ü Ú ¸Ç¡ ¸ô À¦¡¦òÐ « ¨ Á ì ¸×õ.

« ô¦À¡ØÐ,

$$\underline{F}_i = \underline{F}_{ix} + \underline{F}_{iy} + \underline{F}_{iz}$$
$$= F_{ix} i + F_{iy} \underline{j} + F_{iz} \underline{k}, i = 1, 2 \ldots n$$ ¬ Ì õ.

« ùÅ¡§È, $\underline{R}$ ± ý È ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¦ ¨ ºÔõ.

$$\underline{R} = \underline{R}_x + \underline{R}_y + \underline{R}_z$$
$$= R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$ ± ý È¡ Ì õ.

± É§Å

$$R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \underline{i} + F_{iy} \underline{j} + F_{iz} \underline{k} \right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \right) \underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \right) \underline{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz} \right) \underline{k}$$

¬ Ì õ.

« øÄÐ $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \underline{i}; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \underline{j}; R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \underline{k}$

$$\therefore R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}$$ --------1

$\underline{R}$ ±ýÈ ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢¨ºÂ¢ý ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î , x,y,z «î Í ¸ Ù¼ý $^{-}{}_{x}, {}^{-}{}_{y}, {}^{-}{}_{z}$ ±ýÈ §¸¡ ½ í ¸ ¨ Ç « ¨ ÁôÀ¾¡ ¸¢ø, $R_x = R\cos^{-}{}_x; R_y = R\cos^{-}{}_y; R_z = R\cos^{-}{}_z$ ±ýÈ¡ Ì õ ¬ ¾Ä¡ø, $\frac{\cos^{-}{}_x}{R_x} = \frac{\cos^{-}{}_y}{R_y} = \frac{\cos^{-}{}_z}{R_z} = \frac{1}{R}$ ¬ Ì õ.---------- 2

±É§Å, ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢¨ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒõ, ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢ ¨ ºÔõ (1),(2) ±ýÈ ºÁýÀ¡ Î ¸Ç¡ø Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î ¸¢ýÈÉ. Ð¸û ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢Ä¢ÕôÀ¾¡ ¸¢ø $\underline{R} = 0$ ¬ Ì õ.

«¾¡ÅÐ $\underline{R} = 0$

«¾¡ÅÐ

$R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2 = 0$

«¾¡ÅÐ

$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$

«¾¡ÅÐ

$R_x = \sum F_{ix} = 0,$

$R_y = \sum F_{iy} = 0,$

$R_z = \sum F_{iz} = 0,$

¬ Ì õ.

±É§Å Ð¸û ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢Ä¢ÕôÀ¾¡ É ¡ø x,y,z ¾¢ ¨ º ¸Ç¢ø Å¢ ¨ ºô À¸¢÷× ¸Ç¢ý Ü Î ¾ø ÍÆ¢Â¡ ¸ §Å ñ Î õ.

§ÁÖõ $\underline{R} = 0$ ±ýÀÐ Ð¸û « ¨ Á¾¢ ¿¢ ¨ ÄÂ¢Ä¢ÕôÀ¾ü Ì ô §À¡ÐÁ¡ É (sufficient) Å ¨ ÃÂ ¨ ÈÂ¡ Ì õ.

R=0 ±É¢ø Ð¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º ¸Ç¢ý Ü Î ¾ø ÍÆ¢Â¡ ¸¢ÈÐ. ¯ ±É§Å þÃ ñ ¼¡ÅÐ ¦ÁöÕ ¨ ÁÂ¢ý Å¡Â¢Ä¡ ¸ Ð¸û « ¨ Á¾¢ «øÄÐ ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø ¯ ûÇÐ.

±É§Å, ´Õ Ð¸û « ¨ Á¾¢ «øÄÐ ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢Ä¢Õ ì ¸ §Å ñ ÊÂÐõ, §À¡¾¢ÂÐÁ¡ É ¿¢Àó¾ ¨ É $\underline{R} = 0$ ±ýÀ¾¡ Ì õ. Å ¨ ÃÀ¼ Å¢Ç ì ¸ Ó ¨ ÈÂ¢ø $F_1, F_2, ...F_i, ...F_n$ ±ýÈ Å¢ ¨ º ¸û O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀð Î «ÒûÇ¢ ¨ Â Î ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø ¨ Åò¾¢Õ ì Ì õ§À¡Ð Å¢ ¨ º ¸ ¨ Ç Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç ´ ýÈ¢ýÀ¢ý ´ ýÈ¡ ¸ "«Ê -ÑÉ¢" Ó ¨ ÈÂ¢ø « ¨ Á ì ¸ ´Õ ãÊÂ ÀøÄ§¸¡½õ ¸¢ ¨ ¼ì Ì õ. þ í Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç ±ùÅ¢¾ Å¡¢ ¨ ºÓ ¨ ÈÂ¢ø (in any order) ±Î òÐ ´ ýÈ¢ý Àý ´ ýÈ¡ ¸ « ¨ Áò¾§À¡¾¢Öõ, þÚ¾¢Â¡ ¸ ´Õ ãÊÂ Àø§¸¡½§Á ¸¢ ¨ ¼ì Ì õ ±ýÀ ¨ ¾ÔÁõ «È¢¾ø §Å ñ Î õ. §ÁÖõ, Å¢ ¨ ºô Àø§¸¡½õ, ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸Ç¢ý Ü Î ¾ ¨ Äò ¦¾¡¢ÅôÀ ¨ ¾ì ¾Å¢Ã, Å¢ ¨ º ¸û ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î ¸ ¨ Çî º¡÷ó¾¢ÕôÀ¾¢ø ¨ Ä ±ýÀ ¨ ¾Ôõ ¸ÅÉ¢ ì ¸ §Å ñ Î õ.

1.31 ¸ðÊÚ ì ¸ô ¦À¡Õû ´ ýÈ¢ý ºÁ¿¢ ¨ Ä

´Õ ¸ðÊÚ ì ¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý ÁÐ ¦ºÂüÀ Î ¸¢ýÈ Â¡§¾Ûõ ¦Á¡Õ Å¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢, «ô¦À¡ÕÇ¢ÉÐ Å¢ÕôÀôÀÊ ±Î ì Ì õ Â¡¦¾Ûõ ¦Á¡Õ ÒûÇ¢§Â

¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ ´Õ Å¢¨º§Â¡Î §º÷ó¾ ´Õ ÍÆÄ¢¨½ì Ìî ºÁÁ¡Ìõ ±É Óý§À ¿¢ÚÅôÀð¼Ð. «ùÅ¢¾ "Å¢¨º-ÍÆÄ¢¨½" «¨Áô¨À O ±ýÛõ ÐÅì¸ô ÒûÇ¢Â¢ø, $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Fi}, \underline{Mo}^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{Mi} \wedge \underline{Fi}$ ±ýÀ¨ Å Å¨ÃÂÚì Ìõ.

´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºÔõ, ¦¾¡ÌÀÂý ÍÆÄ¢¨½ôÒò ¾¢ÈÛõ Â¡§¾Û¦Á¡Õ ÒûÇ¢Â¢ø ÍÆ¢Â¡Ì¦ÁÉ¢ø, «ô¦À¡Õû «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

±É§Å, ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý ÁÐ ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ Â¡§¾Û¦Á¡Õ Å¢¨ºò ¦¾¡Ì¾¢ ºÁ¿¢¨Ä¢ø þÕìÌÁ¡É¡ø ¿¢Àó¾¨É¸û $\underline{R} = 0, \underline{Mo}^R = 0$ ¬Ìõ.

þÅü¨È x, y, z «îÍ¸Ç¢ø ÌòÐô À¢¡¢×¸Ç¡¸ô À¢¡¢òÐõ ¦ÅÇ¢ôÀ¼Ä¡õ. «ô¦À¡ØÐ,

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{k} = 0$$

«¾¡ÅÐ

$$(i) \quad R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$(ii) R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i=y=0}$$

$$(iii) R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{fz} = 0$$ ±ýÈ ¿¢Àó¾¨É¸ Ùõ,

$$M^R_{ox}\underline{i} + M^R_{oy}\underline{j} + M^r_{oz}\underline{k} = 0$$

«¾¡ÅÐ, $$(iv) \quad MR_{ox} = \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0$$

$$(v) \quad M^R_{\circ y} = \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0$$

$$(vi) \quad M^R_{\circ z} = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0$$

±ýÈ ¿¢Àó¾¨É¸ Ùõ ¸¢¨¼ì¸ô¦ÀÚõ.

þ¨Å¸¨Ç ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕì¸ò §¾¨ÅÂ¡ÉÐõ (Necessary) §À¡ÐÁ¡ÉÐÁ¡É (Sufficient) ¿¢Àó¾¨É¸Ç¡Ìõ.

þùÅ¢¾ô ¦À¡ÐÅ¡É 6 ºÁ¿¢¨Ä ¿¢Àó¾¨É¸¨Çô ÀÂýÀÎòÐÅ¾ü§¸üÀ «¨Å¸û À¢ýÅÕÁ¡Úõ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ;

I. ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ Â¡§¾Ûõ ãýÚ ¿¢¨ÄÂ¡É ¾¢¨º¸Ç¢ø Å¢¨º¸Ù¨¼Â À¢¡¢ò¾ ÀÌ¾¢¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Üð¼Î¦¾¡¨¸¸¨Çò ¾É¢ò¾É¢§Â âîº¢Âò¾¢ü Ìî ºÁÁôÀÎòÐ¸.

II. ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ Â¡§¾Ûõ ãýÚ ¿¢¨ÄÂ¡É ¾¢¨ºÔõ ÀüÈ¢ ±Î ì Ìõ Å¢¨º¸Ù¨¼Â ¾¢Õôô¾¢Èý¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Üð¼Î¦¾¡¨¸¸¨Çò ¾É¢ò¾É¢§Â âîº¢Âò¾¢ü Ìî ºÁÁôÀÎòÐ¸.

I. II ±ýÛõ ¿¢Àó¾¨É¸û Ó¨È§Â ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÙ ì Ì þ¼ô ¦ÀÂ÷î º¢ (Translocation), ÍÆü º¢ (Rotation) ¬¸¢Â þÂì¸í¸û þÕì¸ ÓÊÂ¡¦¾ýÀ¨¾ ¯Ú¾¢ôÀÎòÐ¸¢ýÈÉ.

þó¾ ¬Ú ºÁ¿¢¨Äî ºÁýÀ¡Î¸Ç¢ý ¯¾Å¢¨Â¦¸¡ñÎ ¬Ú ì Ì Á¢¨¸ôÀ¼¡¾Ð ¦¾¡¢Â¡ÐÁ¡É ¸½¢Â¸Ùì Ì (unknown quantities) ¯ðÀð¼

´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý «¨Á¾¢ «øÄÐ ºÁ¿¢¨Ä¨Âô ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø Å¢Å¡¢òÐì ÜÚõ ¯ò¾¢ì ¸½ìì¸Ùìò ¾÷× ¸¡½ÓÊÔõ. þùÅ¢¾ ¯ò¾¢ì¸½ìì¸û Â¡×õ ¿¢¨ÄÂ¢ÂÄ¡¸ò ¾÷Á¡É¢ì¸ò ¾ì¸¨Å (Statically determinate problems). ¬Úì Á¢Ì¾¢Â¡ÉÐõ ¦¾¡¢Â¡¾ÐÁ¡É ¸½¢Âí¸Ùì ¯ðÀð¼ ¯ò¾¢ì ¸½ìì¸û Â¡×õ ¿¢¨ÄÂ¢ÂÄ¡¸ò §¾ÈôÀ¼¡¾¨ÅÂ¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ (Statically indeterminate problems)

1.32. ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ý Óì¸¢Â Å¨¸¸û (Special cases of Equilibrium).

1.32 (1) Å¨¸ 1 ´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ºó¾¢ì¸¢ýÈ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ (Concurrent System of Forces)

þíÌ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ìÌ¡¢Â Å¢¨Ç× «ôÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºø¸¢ýÈ µ÷ ´ü¨Èò ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º (Single resultant force) ¬Å¾¡ø ºÁ¿¢¨ÄìÌ §Å ñ ÊÂ ¿¢Àó¾¨É $\underline{R} = 0$ ¬Ìõ.

«¾¡ÅÐ $R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} = 0$

«øÄÐ $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$$

¾¢¨ºÂ¢¨Âô ÀüÈ¢Â ¦À¡Ð ¬öÅ¢ø âîº¢Â Å¢¨Ç¨Å ¯Ú¾¢ ¦ºöÅ¾ü Ì ÁüÈ ÅÆ¢¸Ùõ ¯Ç.

±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, ²§¾Û¦Á¡Õ ~ ±ýÛõ «îÍÀüÈ¢ Å¢¨ºò ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý ¾¢ÕôÒ¾¢Èý âîº¢ÂÁ¡Ìõ ±ýÀÐ À¢ýÅÕõ ¿¢¨Ä¸¨ÇÎ º¡÷óÐûÇÐ;

(a) ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º âîº¢ÂÁ¡¸ ¯ûÇ ¿¢¨Ä.

(b) ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º ±Îò¾ «î¨º§Â ¦ºÂøÀÎõ §¸¡¼¡¸ô ¦ÀüÈ¢Õì Ìõ ¿¢¨Ä.

(c) ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º ±Îò¾ «îÍìÌ þ¨½Â¡É ¦ºÂøÀÎõ §¸¡ð¨¼ô ¦ÀüÈ¢Õì Ìõ ¿¢¨Ä.

~ ±ýÛõ «îÍìÌ þ¨½ÂüÈ¾¡¸ ±ÎìÌõ ±ýÛõ «îÍ ÀüÈ¢ Å¢¨ºò ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý ¾¢ÕôÒ¾¢Èý âîº¢ÂÁ¡Ìõ ±ýÀ¨¾ô À¢ýÅÕõ ¿¢¨Ä¸Ç¢ø ²§¾Ûõ ´ýÚ Å¨ÁÂÚìÌõ.

(a) ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º§Â âîº¢ÂÁ¡Ìõ ¿¢¨Ä; «øÄÐ

(b) ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º ~; ±ýÛõ þÕ «îÍ¸Ç¢ý ° §¼ (through both axes) ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ð¨¼ô ¦ÀüÈ¢Õì Ìõ ¿¢¨Ä.

þÕ þ¨½ÂüÈ «îÍ¸Ùìì ´Õí§¸ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ þ¨½Â¡¸ «¨ÁÂ ÓÊÂ¡¾¡¾¡ø, ã ýÈ¡Å¾¡É (c) ±ýÛõ ¿¢Àó¾¨É ±ýÛõ «îÍìÌô ¦À¡Õò¾ÁüÈÐ.

¥ ±ýÛõ ã ýÈ¡ÅÐ «îº¡ÉÐ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º ¦ºÂøÀÎõ §¸¡Î, þõ ã ýÚ ~, ,¥ ±ýÛõ «îÍ¸¨Ç ¦Åð¼¡¾ ¿¢¨Ä «øÄÐ ~, ±ýÛõ «îÍ¸¨Ç ¦Åð¼¡Áø ã ýÈ¡Å¾¡É ¥ ±ýÛõ «îÍìÌ þ¨½Â¡¸ «¨ÁÔõ ¿¢¨Ä ±ýÀ¨Å¸Ùìì ²ÈÈ¾¡¸ò §¾÷ó¦¾Îì¸ôÀðÎûÇ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. §ÁÖõ ~, ±ýÛõ «îÍ¸û ÀüÈ¢ ±Îò¾ Å¢¨ºò ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý ¾¢ÕôÒ¾¢Èý âîº¢ÂÁ¡ÅÐ¼ý, ã ýÈ¡ÅÐ «îÍÀüÈ¢Ôõ âîº¢ÂÁ¡Ìõ§À¡Ð ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º â î º¢ÂÁ¡ Ì õ.

±É§Å, ´Õ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂøÀ Î õ Å¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ¯¡¢Â ºÁ¿¢¨Ä ¨Â ¯Ú¾¢ôÀ Î ò¾ Áü¦È¡Õ ÅÆ¢Â¡ ÉÐ

$\sum M_{\sim}=0, \sum M \quad =0, \sum M_{¥}=0;$ ± ý È¡ Ì õ.

« ùÅ¡§È ºÁ¿¢¨Ä ì Ì ¡¢Â ¿¢Àó¾¨É ¨Â ¦ÅÇ¢Â¢ Î Å¾ü Ì Áü¦È¡Õ ºÁ ý À¡ Î ¸Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ¾¢ À¢ ý ÅÕÁ¡Ú þÕ ì ¸§Å ñ Î õ ±É ×õ ¿¢ åÀ¢ì ¸Ä¡õ. « ¨Å ¸Ç¡ÅÉ;

1. Y « î Íò ¾¢¨ºÂ¢ø Å¢¨º¸ Ù ¨¼Â À¸¢÷×¸Ç¢ ý Ì È¢Â¢Âø Ü ð Î ò ¦¾¡ ¨ ¸ â î º¢ÂÁ¡ÅÐ¼ ý , « ¾Å¡Ð $\sum_{i=0}^{0} F_{iy}=0$ ± ý È¡ÅÐ¼ ý ,

2. Å¢¨º¸û ºó¾¢ì Ì õ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â¡û x z ¾Çò¾¢ü Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ Å ¨ÃÔõ ¾Çò¾¢ø « ¨ÁÂ¡¾Ðõ, þ ¨ ½ÂüÈÐÁ¡É d, Ø ¢ ý Ûõ þÕ « î Í ¸û ÀüÈ¢ ± Î ì Ì õ Å¢¨º¸ Ù ¨¼Â ¾¢ÕôÒ¾¢È¢ý¸Ç¢ ý Ì È¢Â¢Âø Ü ð Î ò ¦¾¡ ¨ ¸ ´ù ¦Å¡ ý Úõ â î º¢ÂÁ¡ ¸ ×õ, « ¾¡ÅÐ $\sum Md=0, \sum M\emptyset=0,$ ± ý Úõ þÕ ì Ì õ§À¡Ð Å¢¨º ¸Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ¾¢Â¡ø ¾¡ì ¸ôÀ Î õ ¦À¡ÕÇ¢ ý Ú ¦À¡Õû « ¨Á¾¢ « øÄÐ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕì Ì õ.

±É§Å, ´Õ ÒûÇ¢Â¢Ä ¨ÁÔõ Å¢¨º¸Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ã ý Ú ¾É¢ò¾ ºÁ¿¢¨Äî ºÁ ý À¡ Î ¸û Ó ì ¸¢ÂÁ¡ ¸ ò §¾ ¨ÅôÀ Î õ ±É þÚ¾¢Â¡ ¸ ì ÜÈÄ¡õ.

6-2. (2) Å ¨ ¸ 2; ´Õ ¾Ç Å¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ (Coplanar force system)

´Õ ¸ðÊÚì ¸ô ¦À¡ÕÇ¢ ý ÁÐ ´§Ã¾Çò¾¢ø ¦ºÂüÀ Î ¸¢ ý È ±ùÅ¢¾ Å¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢Ôõ ´Õ ¾É¢Å¢¨ºÂ¡ ¸§Å¡ « øÄÐ ´Õ ¾É¢î ÍÆÄ¢¨ ½Â¡ ¸§Å¡ ´ Î ì ¸ôÀ¼Ä¡õ Ü Î õ. ¬ ¸§Å, « ùÅ¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕì ¸, Ó¾Ä¡Å¾¡ ¸,

$R_x=\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, R_y=\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0$

± ý È¢Õì ¸ §Å ñ Î õ. þÃ ñ ¼¡Å¾¡ ¸, ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ÍÆÄ¢¨ ½Â¡ ¸ ´ Î ì ¸ôÀ¼ ¦¾¡ ý À¨ ¾ ¯Ú¾¢ôÀ Î ò¾ Å¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ ¦ºÂøÀ Î õ ¾Çò¾¢ü Ì î º¡öóÐ « ¨ÁÔõ Â¡§¾ Û ¦Á¡Õ ~ ± ý Úõ « î Í ÀüÈ¢ò ¾¢ÕôÒ¾¢È ¨ É ± Î ì ¸, «Ð $\sum Ma=0$ ± ý Úõ þÕ ì ¸§Å ñ Î õ.

´§Ã¾ÇòÐ Å¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ~ ± ý Ûõ « î Í ÀüÈ¢ ± Î òÐ ¯ ñ ¼¡ Ì õ $\sum Ma=0$ ± ý Ûõ ¿¢Àó¾¨É ì Ì ô À¾¢Ä¡ ¸ « ùÅ¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ « ¨ÁÔõ ¾Çò¾¢§Ä Â¡§¾ Û ¦Á¡Õ ÒûÇ¢ ÀüÈ¢ ± Î ì Ì õ « ò¦¾¡ Ì ¾¢ Å¢¨º¸ Ù ¨¼Â ¾¢ÕôÒ ¾¢Èý ¸Ç¢ ý Ì È¢Â¢Âø Ü ð Î ò¦¾¡ ¨ ¸ ¨Âô â î º¢Âò¾¢ü Ì î ºÁôÀ Î ò¾Å¾¡ ¸ ×õ ¦ ¸ ¡ûÇÄ¡õ.

±É§Å, Â¡§¾ Û ¦Á¡Õ ¦ ¸ ¡ Î ì ¸ôÀð¼ Å¢¨ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì §ÁüÜÈ¢Â ºÁ¿¢¨Ä ¿¢Àó¾¨É ¸ ¨ Çô ÀÂý ÀÎòÐÅ¾ü Ì À¢¡¢ì Ì õ ¾¢¨º ¸ ¨ Çò ¾ Ì ó¾ÀÊ §¾÷ó¦¾ Î ò¾¡ø Á¢ ¸ î Í Õì ¸ Á¡ É ºÁ ý À¡ Î ¸ ¨ Çô ¦ÀÈÄ¡õ.

¦À¡ÐÅ¡ ¸ ¸¢¨¼ò¾¢¨ºÂÔõ ¿¢¨Ä Ì òÐ¾¢¨ºÂÔõ Á¢ ¸ ×õ ²üÈ¾¡ ¸ þÕì Ì õ.

§ÁÖõ ¾¢ÕôÒ¾¢È ý ¸ û ± Î ì Ì õ ÒûÇ¢Â¢ÉÐ ¿¢¨ÄÔõ Óì ¸¢ÂÁ¡ÉÐ. «ôÒûÇ¢Â¡ÉÐ ÜÊÂÅ ¨ Ã Ì ¨ÈÅ¡ ± ñ ½¢ì ¨ ¸ Â¢ Ù ûÇ Å¢¨º¸§Ç ¾¢ÕôÒ ¾¢È ý ºÁ ý À¡ð Ê ø þ¼õ¦ÀÈ¡ ¾ Å¡Ú ¾ ¸ ×õ §¾÷ó¦¾ Î ì ¸ôÀ¼ §Å ñ Î õ. þùÅ¢¾ ã ý Ú ¿¢¨ÄÂ¢ø ºÕÀó¾ ¸ ¨ Ç Ú õ,

« ¾¡ÅÐ,

« øÄÐ,

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0, M_{oz}{}^{R}=\sum_{i=1}^{n}(x_i F_{iy}-y_i F_{ix})=0, \left[M_O=\sum_{i=1}^{n}(x_i F_{iy}-y_i F_{ix})=0\right]\right\}$$

þÕÅ¨ºò ¦¾¡Ì¾Âý ÜüÚô ÀÌ¾¸Ùì¸¨¼§ÂÔûÇ ÅÊÅ¸½¾ò ¦¾¡¼÷Ò¸§Ç¡Î ÜÊ, ´Õ ¾ÇòÐ Å¨º¸Ç¡§Ä ¦ºÂøÀÎ¸ýÈ Â¡§¾Û¦Á¡Õ ¦¾¡Ì¾Âý ºÁ¿¨Ä¨Â Å¨ÃÅÚôÀ¾üÌô ¦À¡ÐÅ¡¸ô §À¡¾ÂÉÅ¡Ìõ.

¦úì¸¡Ïõ ¿Àó¾¨É¸¨Ç ¿¨È§ÅüÈÉ¡Öõ ´Õ ¾Ç Å¨ºò ¦¾¡Ì¾ ºÁ ¿¨ÄÂÄÕìÌõ.

´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇýÁÐ ´Õ ¾Ç Å¨ºò ¦¾¡Ì¾ ¦ºÂøÀ¼, ´§Ã §¿÷§¸¡ðÊÄøÅ¡¾ ã ýÚ ÒûÇ¸¸û ´ù¦Å¡ýÚ ÀüÈ ±Îì Ìõ «ùÅ¨º¸Ù¨¼Â ¾ÕôÒ¾Èý¸Çý ÌÈÂÂø Üð Îò¦¾¡¨¸, ¾ÉÐ¾É§Â âîºÂÁ¡É¡ø, «ù Å¨ºò ¦¾¡Ì¾ ºÁ¿¨ÄÂÄÕìÌõ.

«ùÅ¡§È ¦úì¸¡Ïõ ¿Àó¾¨É¸û ¿¨È§ÅÈÉ¡Öõ ´Õ ¾ÇÅ¨ºò ¦¾¡Ì¾ ºÁ¿¨ÄÂÄÕìÌõ;

´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇýÁÐ ´Õ ¾ÇòÐ§Ä ´Õ Å¨ºò ¦¾¡Ì¾ ¦ºÂøÀ¼, ²§¾Ûõ þÕ ÒûÇ¸¸Çø ´ù¦Å¡ýÚ ÀüÈÔõ ±Îì Ìõ ¾ÕôÒ¾Èý¸Çý ÌÈÂÂø ÜðÎò¦¾¡¨¸ ¾ÉÐ¾É§Â âîºÂÁ¡¸×õ, «ôÒûÇ¸¨Ç§Çî §º÷òÐ ¯ñ ¼¡Ìõ §¸¡ðÊø Å¨º¸Ù¨¼Â À¸÷Å¡Î¸Çý ÜðÎò¦¾¡¨¸ âîºÂÁ¡¸×õ þÕìÌ¦ÁÉø, «ùÅ¨ºò ¦¾¡Ì¾ ºÁ¿¨ÄÂÄÕìÌõ."

´Õ ¾Ç «¨ÁôÒìÌ ¯¸ó¾ ±¾÷¾¡ìÌ¾ø¸¨Ç (reactions) ´Õ ¦À¡Õû ÁüÈô¦À¡Õû¸Ù¼ý «ØòÐÁ¼ÁòÐ «øÄÐ À¨½ì¸ôÀÎÁ¼ÁòÐ ²üÀÎòÐ¾ø;

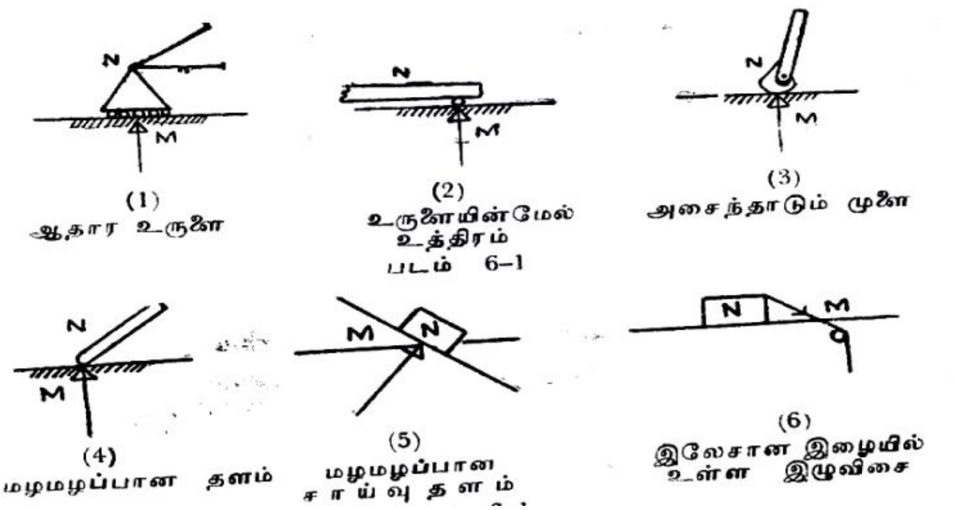
¿¨¼Ó¨ÈÂø ±ùÅ¡¾ô ¦À¡ÕÙõ þÕ À¡Á¡½í¸¨Çô ¦ÀüÚûÇ «¨Áô¨ÀÎ¯º¡÷ó¾Ã¡Ð. þÕó¾§À¡¾Öõ Ü¨Ã ¯ò¾Ãí¸Çý ¦¾¡Ì¾ (roof trusses), ¯ò¾Ãí¸û (beams) ¬¸ÂÅüÈý ºÁ¿¨Ä¨Â Å¨ÃÅÚì Ìõ ¦À¡Õðì «¨Å¸û þÕ À¡Á¡½ «¨Áô¨Àô ¦ôÈÚûÇ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. þùÅ¡ «¨ÁôÒ¸Çø ÒÈÅ¨º¸Ç ¨ÉòÐõ þÕ À¡Á¡½í¸¨Çô ¦ÀüÈ¡¸×õ (two dimensional forces), ºÁ¿¨ÄÌ ±Îò¾ ¦À¡ÕÇý ¾ÇòÐ§Ä§Â ¦ºÂøÀÎÅ¾¡¸×õ ¦¸¡ûÇ§Å ñ Îõ.

þÕ À¡Á¡½ «¨Áô¨À¦ÂðÊ ¦À¡Õû¸Çø ¦ºüÀÎõ ±¾÷¾¡ì¸ Å¨º¸¨Çô ÀýÅÕÁ¡Ú 3 ¦¾¡Ì¾¸Ç¡¸ô À¡ÌòÐ «È¢ÂÄ¡õ.

1.¦¾¡ó¾ §¸¡ðÊø ¦ºÂøÀÎõ Å¨ºìÌî ºÁ¡É ±¾÷¾¡ì¸õ.;

þò¦¾¡Ì¾Âø «¨ÁÂìÜÊÂ ¬¾¡Ãí¸Ùìì (supports) ¯Õ¨Ç¸û (rollers), «¨ºó¾¡Îõ Ó¨ÉìÌ¸ð¨¼¸û (rockers), ÁÆÁÆôÀ¡É À¡ôÒ¸û (smooth surfaces) ±ýÀ¨Å ´Õ ºÄ ±ÎòÐì¸¡ðÎ¸Ç¡Ìõ. «ÅüÈý «¨ÁôÒì¸û À¼õ 1.80 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÕìÌõ.

Ó¾ø ¿¢ýÌ ±Îò¾ì¸¡ðÎ¸Çø N ±ýÛõ ¦À¡Õ¨Ç ¸¨¼Â¡¸ÅÕôÀôÀÊ ¿¸÷ò¾Ä¡õ. ±É§Å ¸¨¼Â¡É Å¨º ²Ðõ þùÅ¡ ¬¾¡Ãí¸Ùìì (M) ¸¨¼Â¡. ¬¸§Å ±¾÷¾¡ì¸ Å¨º ¿¨ÄÂ¡¸§Å¡ý À¼ò¾ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨ÁÔõ. þùÅ¡ ±¾÷¾¡ì¸ Å¨º ¿¨Äì§¸¡ðÊø §Áø§¿¡ì¸ «øÄÐ ¸úè§¿¡ì¸, ±Îò¾ ¦À¡ÕÇý ºÁ¿¨Ä « ¨ÁôÒì ²üÈÅ¡Ú ÌÈì¸ôÀÎõ.

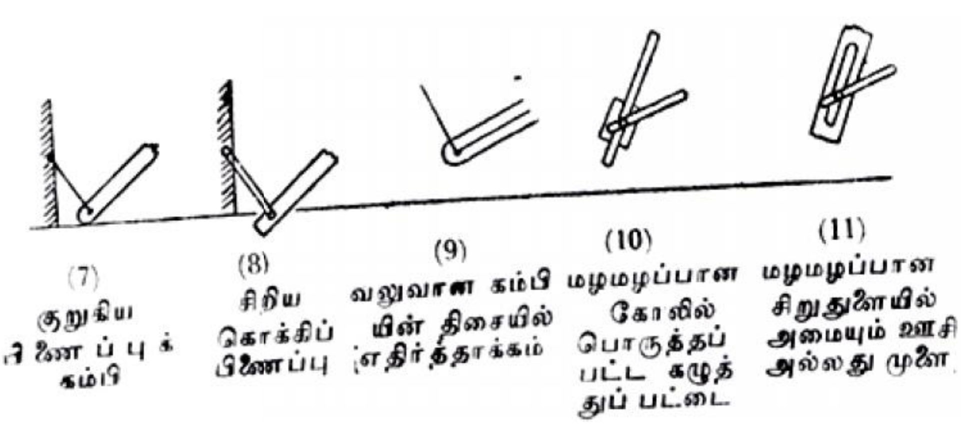


À¼õ 1-80

5ÅÐ ±Î òÐì¸¡ðÊø ±¾¢÷¾¡ì¸õ -- ±ýÛõ ¦À¡ÕÇ¢ý§Áø º¡ö× ¾Çò¾¢ü Ì ì Ìò¾¡É ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎõ.

6ÅÐ ±Î òÐì¸¡ðÊø Â¡§¾Û ¦Á¡Õ ¾¡í¸õ þ¨ÆÂ¢ÉÐ ¿¦Çò¾¢ü Ì µ÷ þØ Å¢¨º¨Âì ÌÈ¢ì¸§Å ñ Îõ.

ÌÚ¸¢Â À¢¨½ôÒì ¸õÀ¢¸û (Short Cables), º¢È¢Â ¦¸¡ì¸¢ô À¢¨½ôÒì¸û (Short links) ÅÖÅ¡É ¸õÀ¢¸û (Cables) ÁÆÁÆôÀ¡É §¸¡ø¸Ç¢ø ¦À¡Õò¾ôÀðÎ ¸ØòÐô Àð¨¼¸û (collars on smooth rods). ÁÆÁÆôÀ¡É º¢ÚÐ¨ÇÂ¢Ä¨ÁÔõ °º¢ «øÄÐ Ó¨ÉÂ¡ø Ìò¾ô À¢¨½ì¸ôÀð¼ Ó¨É (Pin in a smooth slot) ¬¸¢Â¨Å¸Ùõ þò¦¾¡Ì¾¢Â¢ø þ¼õ¦ÀÚõ. «ÅüÈ¢ý «¨ÁôÒ¸û À¼õ 1.81ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÕì Ìõ.



À¼õ 1-81

ÌÚ¸¢Â þ¨½ôÒì¸õÀ¢, º¢È¢Â ¦¸¡ì¸¢ô À¢¨½ôÒ, ÅÖÅ¡É ¸õÀ¢Â¢ý ¾¢¨ºÂ¢ø ±¾¢÷¾¡ì¸õ, ÁÆÁÆôÀ¡É §¸¡Ä¢ø ¦À¡Õò¾ôÀðÎ ¸ØòÐ Àð¨¼ ÁÆÁÆôÀ¡É º¢ÚÐ¨ÇÂ¢ø «¨ÁÔõ °º¢ «øÄÐ Ó¨Ç þùÅ¢¾ «¨ÁôÒì¸¨Ç Éò¾¢Öõ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ ÁðÎõ¾¡ý ¦¾¡¢Â¡¾¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

2.¦¾¡¢Â¡¾ §¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨ºì ÌÎ ºÁÁ¡É ±¾¢÷ò ¾¡ì¸õ.

þò¦¾¡Ì¾¢Â¢Ä¨ÁÂì ÜÊÂ ¬¾¡Ãí¸Ù ì Ì ¦À¡Õò¾ôÀðÎ ÁÆÁÆôÀ¡É

Ó¨Ç¸û «øÄÐ °º¢ Ó¨É¸û (smooth pin fixed in position), À¢¨½Âø¸û (hinges), ÅÆÅÆôÀüÈ ¾Çí¸û (rough surfaces) ¬¸¢Â¨Å ²üÈ¾¡É ´Õ º¢Ä ±Îòòì¸¡ðÎ¸Ç¡Ìõ. (À¼õ 1.82 ³ô À¡÷ì¸).

உத்திரத் தொகுதியைத் தாங்கும் ஊசிமுனையின் அமைப்பு — ஊசிமுனையில் பிணைக்கப்பட்ட உத்திரம் — மழமழப்பற்ற தளத்தின் மேல் அமையும் உத்திரம் — மழமழப்பற்ற தளத்தின் மேல் அமையும் பொருள்

À¼õ 1-82

þùÅ¢¾ ¬¾¡Ãí¸û ±Îò¾¦À¡ÕÇ¢ý ºÁ¿¢¨Ä «¨ÁôÒìÌ ´ÕÅ¢¾ þÂì¸ò¨¾Ôõ ±ò¾¢¨ºÂ¢Öõ ²üÀ¼¡Åñ½õ ¾Îì¸ìÜÎõ. ¬É¡ø þùÅ¢¾ «¨ÁôÀ¢ø ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ ¾Çò¾¢ø À¢¨½ì¸ôÀð¼ þ¼ò¾¢ø ÍÆÄìÜÎõ.

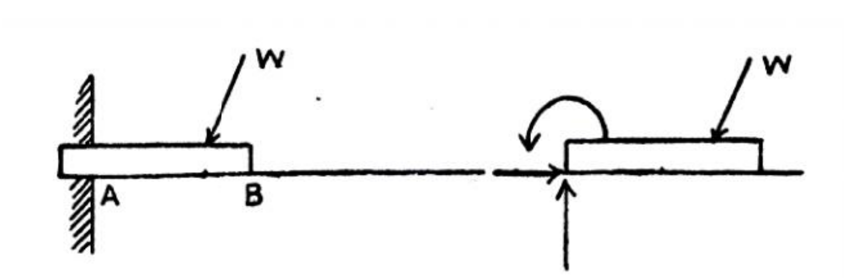
þò¦¾¡Ì¾¢Â¢ø ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º¸Çý ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¸Ùõ, ±ñ Á¾¢ôÒ¸Ùõ ¦¾¡¢Â¡¾¨ÅÂ¡Ìõ.

¦À¡ÐÅ¡¸ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢ý À¸¢÷×¸¨Çì ¸¢¨¼ò ¾¢¨ºÂ¢Öõ ¿¢¨ÄìÌò¾¢¨ºÂ¢Öõ ²üÀÎòÐÅÐ ÅÆì¸õ.

3. ´Õ Å¢¨ºÔ¼ý ÜÊÂ ÍÆÄ¢¨½ìÌî ºÁÁ¡É ±¾¢÷ò¾¡ì¸õ.

¿¢¨ÄÂ¡¸ô ¦À¡Õò¾ôÀðÎûÇ ¬¾¡Ãí¸û þùÅ¨ºÂ¢ø þ¼õ ¦ÀÚõ.

þíÌ ¿¢¨ÄÂ¡¸ «¨ÁÔõ ¬¾¡Ãí¸û ±Îò¾ ¦À¡ÕÙìÌ ±ò¾¢¨ºÂ¢Öõ þÂì¸Á¢Õì¸ ÅÀ¼¡Åñ½õ ¸ðÎôÀÎòÐõ. þùÅ¢¾ ¬¾¡Ã¦Á¡ýÈ¢ø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¨Ç ²§¾Û¦Á¡Õ ¦¾¡¢Â¡¾ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ð¨¼ô ¦ÀüÈ ´Õ ¾É¢ Å¢¨ºÔ¼ý ÜÊÂ µ÷ ÍÆÄ¢¨½Â¡¸ ´Îì¸ ÓÊÔõ. ±É§Å ±¾¢÷¾¡ì¸Á¡ÉÐ, ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨ºÂ¢ý þÕ ÌòÐôÀ¢¡¢×¸Ç¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ¸û, «òÐ¼ý §º÷óÐ «¨ÁÔõ ÍÆÄ¢¨½ôÒò ¾¢ÈÉ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ ¬¸¢Â ãýÚ ¦¾¡¢Â¡¾ ¸½¢Âí¸¨Ç ¯û «¼ì¸¢Â¸ì ¦¸¡ñÎûÇÐ. (À¼õ 1.83 ³ô À¡÷¸¸)



(16)
பொருத்தப்பட்ட வளைவுச் சட்டம் அல்லது உததிரம்

À¼õ 1-83

¬¸§Å ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ýÁÐ ´Õ ¾Çò¾¢§Ä ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÖÇì¸ ãýÚ ºÁ¿¢¨Äî ºÁýÀ¡Î¸§Ç ¯Ç¾¡ø ¬¾¡Ãí¸Ç¢ø ¿¢¸Øõ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º¸¨Çô ÀüÈ¢ ¦¾¡¢Â¡¾ ¸½¢Âí¸Ç¢ý ±ñ½¢ì¨¸

ã ýÈ¢ü Ì §ÁüÀ¼¡ÁÄ¢Õ ì ¸ §Å ñ Î õ.

1.32 (3) Å ¨ ¸ 3 : ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¾¢ ¨ º ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ î ¦ºÂøÀ Î õ Å¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ (Parallel forces in space):

ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¾¢ ¨ º ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ î ¦ºÂøÀ Î õ Å¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ ¨ Â ´Õ ¾É¢ Å¢ ¨ ºÂ¡ ¸ §Å¡ « øÄÐ ´Õ ¾É¢î ÍÆÄ¢ ¨ ½Â¡ ¸ §Å¡ ´ Î ì ¸ ÓÊÔ¦ÁÉ ÓÂý §À ÜÈôÀð¼Ð.

Å¢ ¨ º ¸ Ç ¨ ÉòÐõ z « î Í ì Ì ´Õ §À¡ ¸ ¡ ¸ («¾¡ÅÐ oxy ¾Çò¾¢ü Ì î ¦º í Ì ò¾¡É ¾¢ ¨ ºÂ¢ø) « ¨ ÁÔ¦ÁÉ¢ø «ò¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ¯¡¢Â ¦¾¡ Ì ÀÃý Å¢ ¨ º ´ ýÚ þÕì ¸ ìÜ¼¡¦¾ýÀ ¨ ¾ ¯Ú¾¢ôÀ Î ò¾, §Å ñ ÊÂ ¿¢Àó¾ ¨ É $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$ ¬ Ì õ

§ÁÖõ ¦¾¡ Ì ÀÃý ÍÆÄ¢ ¨ ½Ôõ þÕì ¸ ìÜ¼¡¦¾ýÀ ¨ ¾ ¯Ú¾¢ôÀ Î ò¾ þ ¨ ½ Å¢ ¨ º ¸ û ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢ ¨ º ì Ì Ìò¾¡É ²§¾Û¦Á¡Õ ¾Çò¾¢ø, ²§¾Ûõ ´ ýÚ ì¦ ¸ ¡ ýÚ Ìò¾¡ ¸ « ¨ ÁÔõ x,y ±ýÛõ « î Í ¸ û ÀüÈ¢ ±Î ì Ì õ þ ¨ ½ Å¢ ¨ º Ù ¨ ¼Â ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¸ Ç¢ý Ì È¢Â¢Âø Üð Î ò¦¾¡ ¨ ¸ ¸ û ¾É¢ò¾É¢§Â â îº¢ÂÁ¡¾§Ä §Å ñ ÊÂ¾¡É ¿¢Àó¾ ¨ É ¸ Ç¡ Ì õ. «Åü ¨ È

$$M_{ox} = \sum_{i=1}^{n} y_i F_{iz} = 0$$

$$M_{oy} = -\sum_{i=1}^{n} X_i F_{iz} = 0$$ ±É ×õ ¦ ¸ ¡ûÇ §Å ñ Î õ.

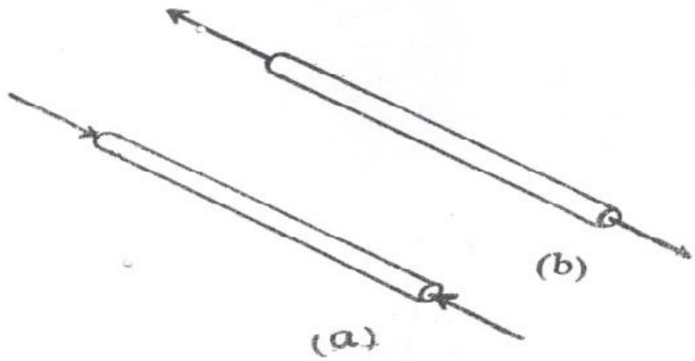
±É§Å ã ýÚ ¾É¢ò¾ ± ñ ½¢î ºÁýÀ Î ¸ û ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ±Î ò¾ þ ¨ ½ Å¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢Ä¢ÕôÀ¾ü Ì ¯¾Å¢Â¡Ö ûÇÉ.

Å¢ ¨ º ¸ û þ ¨ ½Â¡ ¸ ´§Ã ¾Çò¾¢Ä¢Õì Ì ¦ÁÉ¢ø §ÁüÜÈ¢Â ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¸ Ç¢ý Ì È¢Â¢Âø Üð Î ò¦¾¡ ¨ ¸ ¸ û â îº¢ÂÁ¡¾ ¨ Ä «È¢Å¢ì Ì õ ²§¾Û¦Á¡Õ ºÁýÀ¡§¼ §¾ ¨ ÅôÀ Î õ. ¬ ¸ §Å ´Õ¾ÇòÐ þ ¨ ½ Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø þÕôÀ ¨ ¾ «È¢Å¢ì ¸ , þÕ ± ñ ½¢î ºÁýÀ¡ Î ¸ û $\{\sum F_{iz} = 0, M_{ox} = 0\}$ « øÄÐ $\{\sum F_{iz} = 0, M_{ox} = 0\}$ ¯ûÇÉ. þ ¨ Å ¸ §Ç §¾ ¨ ÅÂ¡ÉÐõ §À¡¾¢ÂÐÁ¡É ¿¢Àó¾ ¨ É ¸ Ç¡ Ì õ.

1.32 (4) Å ¨ ¸ 4 ; þÕ Å¢ ¨ º ¸ Ç¡ø ¾¡ì ¸ ôÀ Î õ ´Õ þÚì ¸ ô¦À¡ÕÇ¢ý ºÁ¿¢ ¨ Ä (Body in Equilibrium with Two Forces);

«ùÅ¢¾ Å¢ ¨ º ¸ û ´§Ã ¦ºÂüÀ Î õ § ¸ ¡ðÊø ºÁÛõ ±¾¢ÃÁ¡Ôõ « ¨ Áó¾¡ÄýÈ¢ ¦À¡ÕÇû ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø þÃ¡ ±ýÀÐ ¦ÅÇ¢ôÀ ¨ ¼ ¯ ñ ¨ ÁÂ¡ Ì õ.

¦ÀÕõÀ¡Öõ ¦À¡È¢Â¢ÂÄ¢ø º¢Ú Ð ñ Î ¸ Ç¡ø À¢ ¨ ½ ì ¸ ôÀð Î ûÇ « ¨ Áô¦ ¨ Ç ¬Ã¡Â§Å ñ ÊÂ ¿¢ ¨ Ä ¸ û ¯ÇÇÉ. «ùÅ¢¾ « ¨ Áô ´ýÈ¢ø, º¢Ú ¾ ñ Êý þÕÓ ¨ É ¸ Ç¢Öõ ¦ºÂøÀ Î õ Å¢ ¨ º ¸ û «ò¾ ñ Êý ¨ ÁÂÂò¾¢ø ¿¦ÇÅ¡ðÊø « ¨ ÁÔõ § ¸ ¡ðÊø ºÁÛõ ±¾¢ÃÁ¡ ¸ þÕì Ì õ. À¼õ 1.84ø



À¼õ 1-84

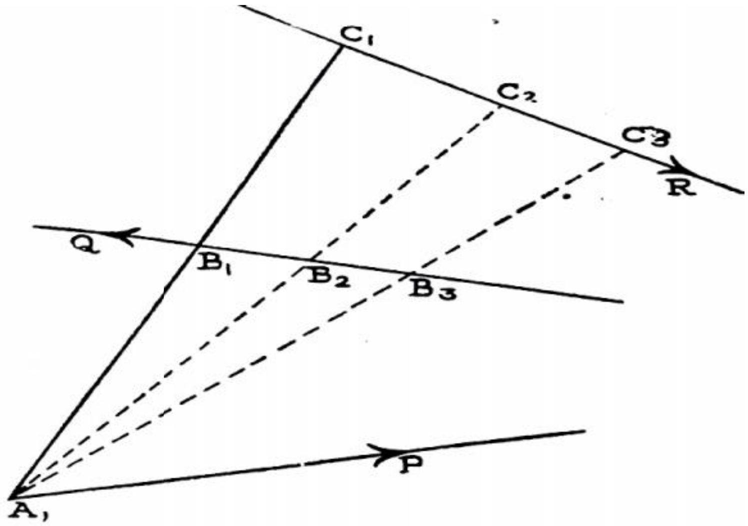
(a) ± ý Û õ « ¨ÁôÀ¢Ö û Ç º¢Ú¾ ñ Êø ¦ºÂüÀ Î õ ºÁ Û õ ±¾¢ÕÁ¡É Å¢ ¨ º ¸ û ¦¿Õ ì ¸ Å¢ ¨ º ¸ Ç¡ ¸ ×õ (Comressive forces). (b) ± ý Û õ « ¨ÁôÀ¢Ö û Ç º¢Ú¾ ñ Êø ¦ºÂüÀ Î õ ºÁ Û õ ±¾¢ÕÁ¡É Å¢ ¨ º ¸ û þØÅ¢ ¨ º ¸ Ç¡ ¸ ×õ (Tensile forces) ¦ ¸ ¡ û ÇôÀ Î õ.

1.32 (5) Å ¨ ¸ 5 : ¸ ðÊÚ ì ¸ ô ¦À¡ÕÇ¢ý ÁÐ ¦ºÂüÀ Î ¸ ¢ ý È ã ý Ú Å¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ ¸ Ç¢ ý ºÁ¿¢ ¨ Ä (Equilibrium of Three Forces)'

´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ÁÐ ¦ºÂüÀ Î ¸ ¢ ý È ã ý Ú Å¢ ¨ º ¸ û « ¾ ¨ É î ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø ¨ Åò¾¢Õ ì Ì Á¡ É ¡ø « ¨ Å ´ Õ ¾Çò¾¢Ä ¨ ÁÂ §Å ñ Î õ.

§ÁÖõ « õ ã ý Ú Å¢ ¨ º ¸ Ù ¨ ¼Â ¦ºÂüÀ Î õ §¸ ¡ Î ¸ û ´ÕÒûÇ¢Ä¢ø ºó¾¢ì ¸ §Å ñ Î õ. « øÄÐ « ¨ Å ¾Çò¾¢ø þ ¨ ½Â¡ ¸ þÕ ì ¸ §Å ñ Î ¦Á ý À ¨ ¾Ôõ ¿¢ÚÅÄ¡õ.

þÅü ¨ È À¢ýÅÕÁ¡Ú ¿¢ÚÅÄ¡õ; ¦À¡ÕÇ¢ý ÁÐ ¦ºÂüÀ Î ¸ ¢ ý È ã ý Ú Å¢ ¨ º ¸ ¨ ÇÔõ $\underline{P},\underline{Q},\underline{R}$ ±É ì ¦ ¸ ¡ û ¸ . $\underline{P},\underline{Q}$ ± ý ÀÅüÈ¢ Ù ¨ ¼Â ¦ºÂüÀ Î õ §¸ ¡ Î ¸ Ç¢ø Ó ¨ È§Â A_1,B_1 ± ý È ²§¾ Û õ þÕÒûÇ¢ ¸ ¨ Çô À¼õ 1.85ø ¸ ¡ðÊÂÅ¡Ú ± Î ì ¸ « ùÅ¢ ¨ º ¸ û ã ý Úõ ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ÄÕôÀ¾¡ø «ÅüÈ¢ü Ì ´ÕÁ¢òÐ «ô¦À¡Õ ¨ Ç A_1,B_1 ± ý Û õ § ¸ ¡ Î ÀüÈ¢ ¾¢Õôÿ¾ø ÓÊÂ¡Ð. ¬ É ¡ø $\underline{P},\underline{Q}$ ± ý Û õ Å¢ ¨ º ¸ û þ ì § ¸ ¡ð ¨ ¼ º ó¾¢ ì ¸ ¢ ý È É . ¬ ¸ §Å « ÅüÈ¢ü Ì «ô¦À¡Õ ¨ Ç A_1,B_1 ± ý Û õ § ¸ ¡ Î ÀüÈ¢ ì ¾¢Õôÿ¾ü Ì Å¢ ¨ Ç× (resultant) ²Ðõ ¾É¢ò¾É¢Â¡ ¸ ò ¸ ¢ ¨ ¼Â¡Ð. þ¾É¡ø ã ýÈ¡õÅ¢ ¨ ºì Ì õ A_1,B_1 ± ý Û õ § ¸ ¡ Î ÀüÈ¢ ¾¢Õôÿ¾ü Ì Å¢ ¨ Ç× Â¡Ðõ þÕ ì¾¡ø ÓÊÂ¡Ð (À¼õ 1.85)

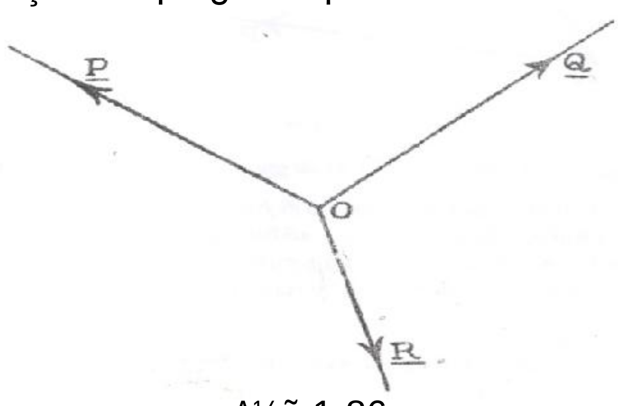


A¼õ 1-85

¬ ¸§Å A_1, B_1 ±ý Ûõ §¸¡Î $\underline{R}$ ±ýÀ¨¾î ºó¾¢ì¸ §Å ñ Î õ. þÐ§À¡Ä B_2, B_3 ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸¨Ç $\underline{Q}$ Å¢ÉÐ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊø ±ÎôÀ¾¡Â¢ý A_1B_2, A_1B_3 ±ý Ûõ §¸¡Î ¸û $\underline{R}$ ³î ºó¾¢ì¸ §Å ñ Î õ. ¬¾Ä¡ø $\underline{R}$ ¬ ÉÐ A_1 ãÄÁ¡¸ $\underline{Q}$ Å¢ÉÐ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊý °¼¡¸î ¦ºøÖõ ¾Çò¾¢ø «¨ÁÂ§Å ñ Î õ. «¾¡ÅÐ $\underline{Q}, \underline{R}$ ±ýÀÅüÈ¢ý ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡Î ¸û A_1 ìÌ °¼¡¸î ¦ºøÖõ ´Õ ¾Çò¾¢ø «¨ÁÂ §Å ñ Î õ.

¬É¡ø A_1 ±ýÀÐ $\underline{P}$ Â¢ÉÐ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊÖûÇ Â¡§¾Û ¦Á¡Õ ÒûÇ¢. ¬¾Ä¡ø §ÁüÜÈ¢Â ¾Çõ $\underline{P}$ Â¢ÉÐ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊÖûÇ Â¡§¾Û ¦Á¡Õ ÒûÇ¢ìÌ °¼¡¸î ¦ºøÖõ. ¬ ¸§Å $\underline{P}$ Â¢ø ¯ûÇ ´ù¦Å¡ÕÒûÇ¢ ÅÆ¢Â¡¸×õ ¦ºøÖõ.

«¾¡ÅÐ «ò¾Çõ $\underline{P}$ Â¢ÉÐ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ð¨¼Ôõ ¦¸¡ñ Î ûÇÐ. §ÁÖõ «õã ýÚ Å¢¨º¸ Ùõ ´ÕÒûÇ¢Â¢ø ºó¾¢ì¸ §Å ñ Î õ «øÄÐ þ¨½Â¡¸ þÕì¸ §Å ñ Î ¦ÁýÀ¨¾Ôõ ¸¡úÅÕÁ¡Ú ¿¢ÚÅÄ¡õ.



A¼õ 1-86

«¾ü¸¡¸ $\underline{P}; \underline{Q}, \underline{R}$ ±ý Ûõ Å¢¨º¸û ´Õ ¾Çò¾¢ø ¦ºÂüÀð Î ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õ¨Çî ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

Ó¾Ä¡Å¾¡¸ «ùÅ¢¨º¸¦ÇøÄ¡õ þ¨½ÂüÈÉÅ¡Â¢Â¢ý «ÅüÚû Â¡§¾Ûõ þÃñ Î Å¢¨º¸û ºó¾¢ò¾ø §Å ñ Î õ. «¨Å¸¨Ç $\underline{P}, \underline{Q}$ ±Éì ¦¸¡û¸. þÅüÈ¢Û ¨¼Â ¦ºÂüÀ Î õ.

§¸¡Î¸û À¼õ 1.86 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú O Å¢ø ºó¾¢ì¸ð Îõ. þô¦À¡Ø¾¢ $\underline{P},\underline{Q}$ ±ýÀÉÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý OÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ Â¡§¾Û¦Á¡Õ Å¢¨ºÂ¡¾ø §Å ñ Îõ. ¬É¡ø $\underline{P},\underline{Q},\underline{R}$ ±ýÛõ Å¢¨º¸û ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø þÕò¾Ä¡ø $\underline{P},\underline{Q}$ ±ýÀÉÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý $\underline{R}$ ±ýÀ¨¾î ºÁôÀÎò¾ø §Å ñ Îõ.

¬É¡ø ´§Ã ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊø þÕó¾¡ÄýÈ¢ þÕ Å¢¨º¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ ºÁÁ¡ì¸ ÓÊÂ¡Ð. ¬¸§Å $\underline{R}$ ý ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Îõ O ÅÆ¢î ¦ºøÄ §Å ñ Îõ.

þÃ ñ ¼¡Å¾¡¸ $\underline{P},\underline{Q}$ ±ýÛõ Å¢¨º¸û þ¨½Â¡¸ «¨ÁÂð Îõ. «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºÔõ «¨Å¸ Ùì Ì þ¨½Â¡¸ þÕì Ìõ. ¬É¡ø ãýÚ Å¢¨º¸ Ùõ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕÅÀ¾¡ø $\underline{R}$ ±ýÀÐ $\underline{P},\underline{Q}$ ±ýÀÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºì Ìî ºÁÉ¡¦Á¡¾ÕÁ¡¸×õ «ò¦¾¡ÌÀÂÉ¢ý ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊÖõ «¨ÁÂ §Å ñ Îõ. ¬¸§Å $\underline{R}$ ±ýÈ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢¨º, $\underline{P},\underline{Q}$ ±ýÛõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¾¢¨ºì Ìõ þ¨½Â¡¸ þÕì¸ §Å ñ Îõ.

±É§Å $\underline{P},\underline{Q},\underline{R}$ ±ýÛõ Å¢¨º¸¦ÇøÄ¡õ ´ýÚì¦¸¡ýÚ þ¨½Â¡ì Ìõ.

´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕûÁ¢Ð ´§Ã ¾Çò¾¢§Ä ãýÚ Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀð Î «¨¾î ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅòÐó¾¡ø «¨Å ´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ºó¾¢ì¸ §Å ñ Îõ. ¬¾Ä¡ø ºÁ¿¢¨Ä ¿¢Àó¾¨É¸û ´Õ ¾É¢Ð¿¢¨Ä ºÁ¿¢¨Ä ¿¢Àó¾¨É¸Ùì Ì ´ Î í Ì ¦Áý À¨¾ôÀÕõ «È¢¾ø §Å ñ Îõ.

¬¸§Å þÄ¡Á¢ÂÉÐ (Lami's theorem) §¾üÈò¨¾ô ÀÂýÀÎò¾¢§Â¡ «øÄÐ «ùÅ¢¨º¸¨Ç ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ þÕ ¾¢ÈÉ¢¸¨Ç À¢¡ò§¾¡ «øÄÐ ´Õ Å¨ÃÀ¼ «¨ÁôÀ¢ý Ð¨½ ¦¸¡ ñ §¼¡ §Å ñ ÊÂ ¿¢Àó¾¨É¸¨Çô ¦ÀÈÄ¡õ.

Á¡¾¡ì ¸ ½ ì Ì ¸ û:

Á¡¾¡ 1-1

¸ú ì ¸ ¡ Ï õ Ã¡º¸ Çý À¡Á¡ ½ í ¸ ¨ Ç Å ¨ ÃÂÚ ì ¸
(«) « ¼÷ò¾ (¬) « Øò¾õ (þ)À Í ôÒ ¨ Á(Viscosity)

$$(\text{«})\ \text{«¼÷ò¾} = \frac{\text{¿¨È}}{\text{ÀÕÁý}}$$

$$\therefore[\text{«¼÷ò¾}] = \frac{[\text{¿¨È}]}{[\text{ÀÕÁý}]} = \frac{[M]}{[L^3]} = [ML^{-3}]$$

(¬) « Øò¾õ « Øò¾õ ± ý ÀÐ µÃÄ Ì ô ÀÃôÀÇÅø ¦ºÂüÀ Î õ §¿÷ Ì òÐ Å ¨ º

$$\text{« Øò¾õ} = \frac{\text{Å ¨ º}}{\text{ÀÃôÀÇ ×}}$$

$$\therefore[\text{« Øò¾õ}] = \frac{[\text{Å ¨ º}]}{[\text{ÀÃôÀÇ ×}]}$$

$$= \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$$

(þ)À Í ôÒ ¨ Á

Á¡¾¡ 1-2

À¡ð¼ý Ó ¨ ÈÂø («) "ŠÄ ì , « Ê, ÅÉ¡Ê" (¬) "À× ñ Î , ¿ ¨ È, « Ê, ÅÉ¡Ê "¬ ¸Â « Ä Ì ¸ Ù ì Ì î º¡Â¡É « ¼÷ò¾Âý « Ä ¨ ¸ , ¦Áð¡ì Ó ¨ ÈÂø ¦º ýÊÁð¼÷-¸Ã¡õ-ÅÉ¡Ê ¬ ¸Â « Ä Ì ¸Çø Å ¨ ÃÂÚ ì ¸.

ÀÊò¾Ã « Ä¸ø = 0.51 $[10^{-3}\ \text{¸¸}/[10^{-3}\ \text{Á}]^3$

Á¡¾¡ 1-3

$\underline{F} = 12\underline{i} + 3\underline{j} - 4\underline{k}$ ± ýÈ ¾ ¨ ºÂ- ý ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊø µÃÄ Ì ò ¾ ¨ ºÂ ¨ Â ì ¸ ¡ ñ ¸.

þ í Ì $\hat{F} = \left(12\underline{i} + 3\underline{j} - 4\underline{k}\right)$

$$= \sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}$$

$$= \frac{12}{13}\underline{i} + \frac{3}{13}\underline{j} - \frac{4}{13}\underline{k}$$

$$= 13\left(\frac{12}{13}\underline{i} + \frac{3}{13}\underline{j} - \frac{4}{13}\underline{k}\right)$$

¬ Ì õ.

Á¡¾¡ 1-4

$\underline{R} = 180\underline{i} - 90\underline{j} + 60\underline{k}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºì Ì ±¾¢÷ ¾¢¨ºÂ¢ø µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢¨Âì ¸¡ñ ¸.

þíÌ $\underline{R} = 180\underline{i} - 90\underline{j} + 60\underline{k}$

$$\hat{R} = \frac{R}{|R|}$$

$$= \frac{180\underline{i} - 90\underline{j} + 60\underline{k}}{\sqrt{180^2 + 90^2 + 60^2}}$$

$$\hat{R} = \frac{6}{7}\underline{i} - \frac{3}{7}\underline{j} + \frac{2}{7}\underline{k}$$

¬ Ìõ.

«¾¡ÅÐ, $R = 210\underline{r}$ ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø, $\underline{r}$ ±ýÀÐ, $\underline{R}$ ý ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â «¨ÁÔõ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ìõ. ±É§Å, $\underline{F}$ ý ±¾¢÷ò¾¢¨º¨Â «È¢Å¢ì Ìõ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢,

$$-\frac{6}{7}\underline{i} + \frac{3}{7}\underline{j} - \frac{2}{7}\underline{k}$$ ¬ Ìõ.

Á¡¾¢¡¢ 1-5

$\underline{F}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢-ý ± ñ Á¾¢ôÒ 490 ±ýÚõ, «Ð ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¨Â $\left(\frac{2}{7}\underline{i} + \frac{9}{7}\underline{j} + \frac{6}{7}\underline{k}\right)$ ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢ «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ ±ýÚõ ¦¸¡ ñ ¼¡ø, F³ Å¨ÃÂÚì¸.

þíÌ $F = |\underline{F}| = 490$ ±ýÚõ, «¾ý ¾¢¨º¨Â $\underline{f} = \frac{1}{7}(2\underline{i} - 9\underline{j} + 6\underline{k})$ ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢Â¡Öõ «È¢Å¾¡ø,

$$\underline{F} = F\underline{f}$$

$$= 490\left[\frac{1}{7}(2\underline{i} - 9\underline{j} + 6\underline{k}\right]$$

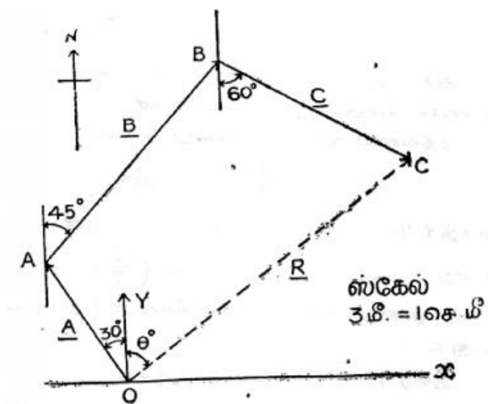
$$= 70(2\underline{i} - 9\underline{j} + 6\underline{k})$$

$$= 140\underline{i} - 630\underline{j} + 420\underline{k}$$ ¬ Ìõ.

Á¡¾¢¡¢ 1-6

´Õ ¿¢Ä «ÇÅ¡Â÷ (Surveyor) ¸¡Ä¢¿¢Äõ ´ýÈ¢ý ±ø¨Ä¸û Å¨ÃÂÚì¸, Ó¾Ä¢ø ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ±ø¨ÄôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ, $N30°W$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ø («¾¡ÅÐ Å¼¾¢¨ºÂ¢Ä¢ÕóÐ $30°$ §Áü Ì ¾¢¨ºÂ¢ø «øÄÐ Å¼¾¢¨ºì Ì $80°$ §Áü Ì ¾¢¨ºÂ¢ø) 12 Á¨ð¼÷ ¦ºýÚ, «í¸¢ÕóÐ N45°E; ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ø $15\sqrt{2}$ Á¨ð¼÷ ¦¾¡¨Ä¨Åì ¸¼óÐ, À¢ÈÌ «í¸¢ÕóÐ $S60°$E ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ø $10\sqrt{3}$ Á¨ð¼÷ ¦ºø¸¢È¡÷. þÚ¾¢Â¡¸ Åó¾¨¼¼ó¾ ÒûÇ¢¨ÂÔõ, ÐÅì¸ôÒûÇ¢¨ÂÔõ §º÷ò¾Îõ §À¡Ð, ¸¡Ä¢¿¢Äõ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ ±ýÈ¡ø, «¨Å¸Ù ìÌûÇ ¦¾¡¨Ä¨ÅÔõ, ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ þÚ¾¢Â¡¸ Åó¾¨¼ó¾ ÒûÇ¢ ±ò¾¢¨ºÂ¢Ä¨ÁÔõ ±ýÀ¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.

À¼õ 1-18 þø, A, B, C ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨º¸Ç¢ø ¸¼ó¾ ¦¾¡¨Ä×¸¨Ç ÌÈ¢ì¸ð Î õ. ±É§Å, §¾¨ÅÂ¡É ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{OC}=\underline{R}$ ±ýÈ¡ Ì õ.



À¼õ 1-18

þí Ì - $|\underline{A}| = A = 12$Á¢. = OA

$|\underline{B}| = B = 15\times\sqrt{2}$மீ

$|\underline{C}| = 10\times\sqrt{3}$மீ

¾¢¨ºÂ¢¸û ´ù¦Å¡ý¨ÈÔõ «¨Å¸Ù ìÌ ¯¸ó¾ ¬ì¸ìÜÚ¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸×õ. «ô¦À¡ØÐ,

$$A_x = -A\sin 30^\circ = -6; B_x = B\sin 45^\circ = 15; C_x = C\sin 60^\circ = 15$$

$$A_y = ACos30^\circ = 6\sqrt{3}; B_y = BCos45^\circ = 15; \; C_y = -CCos60^\circ = -5\sqrt{3}$$ ¬ Ì õ.

±É§Å,

$R_x = A_x + B_x + C_x$ $\qquad$ $R_y = A_y + B_y + C_y$

$= -6+15+15$ $\qquad$ $= 6\sqrt{3}+15-5\sqrt{3}$

$= 24$Á¢ð¼÷. $\qquad$ $= \sqrt{3}+15$

$= 16\cdot 732$Á¢ð¼÷.

¬¾Ä¡ø $R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$

$= \sqrt{(24)^2 + (16\cdot 732)^2}$

$= \sqrt{855\cdot 9}$

$= 29\cdot 2$Á¢.

þÚ¾¢Â¡¸ «¨ÁÔõ C ±ýÈ ÒûÇ¢, ÐÅì¸ôÒûÇ¢ìÌ Å¼ì¸¢Ä¢ÕóÐ ¯° ¸¢Æì Ì ¾¢¨ºÂ¢Ä¢Õì Ì ¦Áý È¡ø (N ¯° E),

$$\tan\text{¯} = \frac{R_x}{R_y}$$

$$= \frac{24}{16\cdot 732}$$

$= 1.434$ ± ý È¡ Ì õ.

« øÄÐ $\bar{\ } = 55°7'$ ¬ Ì õ.

±É§Å OC = 29.2 Á¦ð¼÷ ; $\bar{\ }° = 55°7'$ ¬ Ì õ.

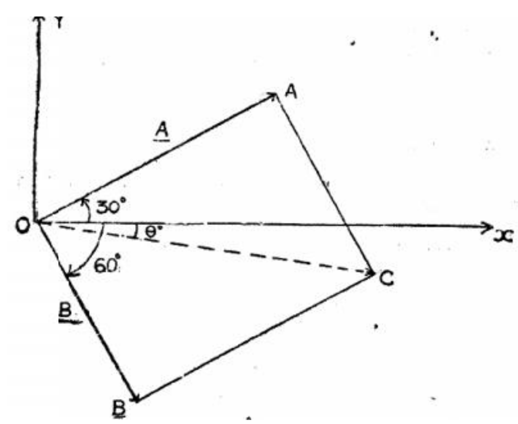
Ì È¢ôÒ: Å ¨ ÃÀ¼ò¾¢ø OC Â¢ ý ¿¦Çõ ²Èì Ì ¨ ÈÂ 9.8 ¦º.Á¦ ¬ ¸ ×õ, $\bar{\ }° = 55°$ ì Ì î ºÁÁ¡ ¸ ×õ þÕôÀ ¨ ¾ì ¸ ¡ ñ ¸ .

Á¡¾¢¡¢ 1-7 A, B ± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ç¢ ý ± ñ Á¾¢ôÒ ¸ Ù õ, « ¨ Å ¸ û ¸ ¢ ¨ ¼ « î º¢ø « ¨ Áì Ì õ §¸ ¡ ½ í ¸ Ù õ À¢ ý ÅÕÁ¡Ú;

¾¢ ¨ ºÂ¢	± ñ Á¾¢ôÒ	¸ ¢ ¨ ¼ « î º¢ø ¾¡ í Ì õ §¸ ¡ ½ õ
A	48	30°
B	36	−60°

þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ ¨ Âô ÀÂ ýÀ Î ò¾¢, « ¨ Å ¸ Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â ì ¸ ¡ ñ ¸ .
À¼õ 1-19ø ¸ ¡ðÊÔûÇ « ¨ ÁôÀ¢ø þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ôÀÊ,

$$\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OC}$$ ¬ Ì õ.



À¼õ 1-19

Å ¨ ÃÀ¼ò¾¢ø OC ý ¿¦Çõ 5 ¦º.Á¦ ¬ Ì õ.
±É§Å ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ¾¢ ¨ ºÂ¢, R ý ± ñ Á¾¢ôÒ

$$= 5\times 12 = 60$$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ À¼ò¾¢ø $AOC = 37°$ (²Èì Ì ¨ ÈÂ)

þÃ ñ ¼¡ÅÐ Ó ¨ È (Second Method)

OX, OY « î Í ¸ Ç¢ø $\underline{i}, \underline{j}$ ± ýÈ µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç ± Î ì Ì õ§À¡Ð,

$$\underline{A} = 48 Cos 30° \underline{i} + 48 Sin 30° \underline{j}$$

$$= 24\sqrt{3}\underline{i} + 24\underline{j}$$

$$\underline{B} = 36 Cos 60° \underline{i} - 36 Sin 60° \underline{j}$$

$$= 18\underline{i} - 18\sqrt{3}\,\underline{j}$$

$$\therefore \underline{R} = \underline{A} + \underline{B}$$

$$= \left(24\sqrt{3} + 18\right)\underline{i} + \left(24 - 18\sqrt{3}\right)\underline{j}$$

$$R_x = 24\sqrt{3} + 18, R_y = 24 - 18\sqrt{3}$$

$$\therefore R^2 = \left|\underline{R}\right|^2 = (24\sqrt{3} + 18)^2 + (24 - 18\sqrt{3})^2$$

$$= 36(4\sqrt{3} + 3)^2 + 36(4 - 3\sqrt{3})^2$$

$$= 3600$$

$$\therefore R = 60$$

¯° ±ýÀÐ OC ±ýÈ §¿÷§¸¡Î, X «îÍ¼ý «¨ÁìÌõ §¸¡½ò¨¾ì ÌÈ¢ì Ì¦Áý È¡ø

$$\tan ¯ = \frac{R_y}{R_x} = \frac{24 - 18\sqrt{3}}{24\sqrt{3} + 18}$$

$$= \frac{4 - 3\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 3}$$

$$= -\frac{1 \cdot 196}{9 \cdot 928}$$

$$= -0 \cdot 1205$$

$$\therefore ¯° = -6°53'$$

¬ Ìõ.

Á¡¾¢¡¢ 1-8

A, B ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ¸Ùõ, «¨Å¸û ¸¢¨¼ «îº¢ø ¾¡í Ìõ §¸¡½í¸Ùõ À¢ý ÅÕÁ¡Ú;

¾¢¨ºÂ¢	±ñ Á¾¢ôÒ	¸¢¨¼«îº¢ø ¾¡í Ìõ §¸¡½õ
A	12 $\left[10^{-2}\right]$Á¢	$150°$
B	8 $\left[10^{-2}\right]$Á¢	$30°$

þ¨½¸Ã Å¢¾¢¨Âô ÀÂýÀÎò¾¢, «¨Å¸Ç¢ý ¦¾¡ÌÀÂý ¾¢¨ºÂ¢¨Âì ¸¡ñ¸.

Ó¾ø ÅÆ¢;

À¼õ 1-20þø ¸¡ðÊÔûÇ «¨ÁôÀ¢ø þ¨½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ,

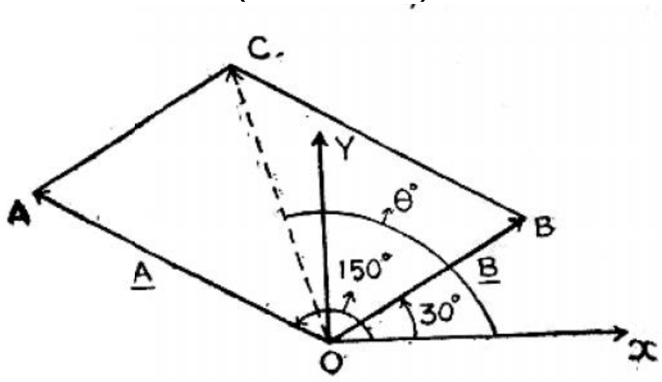
OA+ OB+OC ¬ Ìõ.

Å¨ÃÀ¼ò¾¢ø OC Â¢ý ¿¦Çõ 5.3 $\left[10^{-2}\right]$Á¢. ¬ Ìõ.

±É§Å, ¦¾¡ ÌÀÂý ¾¢¨ºÂ¢ R ý ±ñ Á¾¢ôÒ

$$= 5.3 \times 2 = 10.6\left[10^{-2}\right]$$

§ÁÖõ À¼ò¾¦ø COB=109° (²Èì Ì ¨ÈÂ) ¬ Ì õ.



À¼õ 1-20

þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÅÆ¢;

OX, OY ¾¢ ¨ º ¸ ¨ Ç $\underline{i}, \underline{j}$ ± ý È µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û Å ¨ ÃÂÚ ì Ì ¦Á ý È¡ ø,

$$\underline{A} = 12\left(Cos150\underline{i} + Sin150\underline{j}\right) = -6\sqrt{3}\underline{i} + 6\underline{j}$$

$$\underline{B} = 8\left(Cos30\underline{i} + Sin30\underline{j}\right) = 4\sqrt{3}\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$\therefore \underline{R} = \underline{A} + \underline{B}$$

$$= -2\sqrt{3}\underline{i} + 10\underline{j}$$

$$\therefore R_x = -2\sqrt{3}; R_y = 10$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{112} = 4\sqrt{7} = 10.584\left[10^{-2}\right]$$ Á¢

OC ± ý È §¿÷§¸¡ Î , x « î Í¼ý , ¯° ± ý È §¸¡ ½ ò ¨ ¾ « ¨ Áì Ì ¦Á ý È¡ ø,

$$\tan^{-} = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{10}{2\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{3} = -2.887$$

$$\therefore^{-\circ} = 180 - 70^\circ 54'$$

$$= 109^\circ 6'$$ ¬ Ì õ.

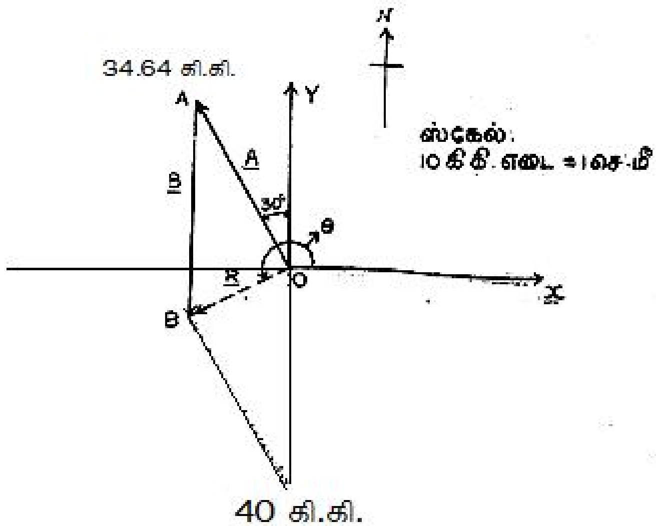
Á¡¾¢¡¢ 1-9

$N30^\circ W$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ 34.64 ¸¢.¸¢. ± ¨ ¼ Á¾¢ôÒ û Ç A ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â, ¦¾ü Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ 40 ¸¢.¸¢. ± ¨ ¼ Á¾¢ôÒ û Ç B ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢Ô¼ ý Óì§¸¡ ½ Å¢¾¢ôÀÊ ´ ý Ú §º÷òÐ ¯ ñ ¼¡ Ì õ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Âì ¸¡ ñ ¸.

Ó¾ø ÅÆ¢

"ÑÉ¢- « Ê" « ¨ Áôò Ó ¨ ÈÂ¢ø À¼õ 1-21þ ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú

$\underline{OA} + \underline{AB} = \underline{OB}$ ¬ Ì õ.



A¼õ 1-21

Å¨ÃÀ¼ò¾¢ø OB þý ¿£Çõ =2 $\left[10^{-2}\right]$Á£, ¬ Ì õ. ±É§Å $|\underline{R}| = 2\times 10 = 20$ ¸¢.¸¢ ±¨¼ ¬ Ì õ. Å¨ÃÀ¼ò¾¢ø $X\hat{O}B = 210^\circ$ ¬ Ì õ.

þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÅÆ¢

$\underline{i}, \underline{j}$ ±ýÈ µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Ç ox, oy « î Í ¸Ç¢ø Å¨ÃÂÚ ì ¸ ×õ, «ô¦À¡ØÐ,

$$\underline{A} = 34.64\left(Cos120^\circ \underline{i} + Sin120^\circ \underline{j}\right)$$

$$= 34.64\left(-\frac{1}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j}\right)$$

$$= 17.32\left(-\underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}\right)$$

$$\underline{B} = 40.00\left(Cos270^\circ \underline{i} + Sin270^\circ \underline{j}\right)$$

$$= 40.00\left(0.\underline{i} - \underline{j}\right)$$

$$= -40\underline{j}$$

$$\therefore \underline{R} = \underline{A} + \underline{B}$$

$\left(-17.32\underline{i} - 10\underline{j}\right)$ ¸¢.¸¢. ±¨¼

$$\therefore R_x = -17.32; R_y = -10$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$$

$$= \sqrt{(-17.32)^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2 + (10)^2}$$

$$= \sqrt{300 + 100}$$

=20 ¸¢.¸¢. ±¨¼.

OB ±ýÈ §¸¡Î, x «îÍ¼ý, ¯°¯ ûÇ §¸¡½ò¨¾ «¨Áì Ì ¦ÁýÈ¡ø,

$$\tan\text{¯} = \frac{R_y}{R_x}$$

$$= \frac{-10}{-17.32}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{¯} = 180^\circ + 30^\circ$$

$$= 210^\circ$$ ¬ Ì õ.

Á¡¾¢¡¢ 1-10

¸¦úì ¸¡ Ï õ þ¼ô¦ÀÂ÷î ºì ¾¢¨ ºÂ¢¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂý ¾¢¨ ºÂ¢¨Â ÀÄ §¸¡½ ¾¢¨ ºÂ¢ Å¢¾¢õÀÊ ¸¡ ñ ¸.

$\underline{A} = 420$ Á¦. $, S75^\circ W.$

$\underline{B} = 400$ Á¦. $, N45^\circ E.$

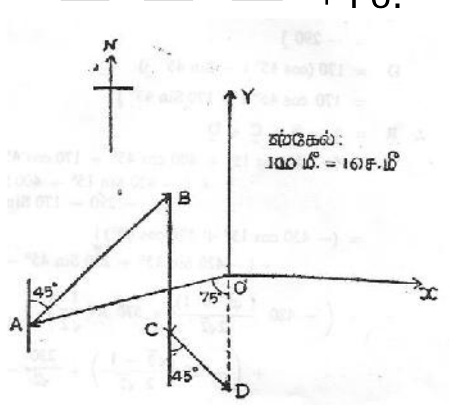
$\underline{C} = 290$ Á¦. $, S$

$\underline{D} = 170$மீ$, S45^\circ E$

Ó¾ø ÅÆ¢

À¼õ 1.22ø ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú, "ÑÉ¢-«Ê" «¨ÁôÀ¢ø,

$$\underline{OA} + \underline{AB} + \underline{BC} + \underline{CD} = \underline{OD}$$ ¬ Ì õ.



À¼õ 1-22

Å¨ÃÀ¼ò¾¢ø OD ý ¿¦Çõ 2.4 ¦º.Á¦. ¬ Ì õ.

±É§Å $|R| = 2.4 \times 100$

$= 240$ Á¦. ¬ Ì õ.

Å¨ÃÀ¼ò¾¢ø $\text{¯} = x\hat{O}D = 270^\circ$ ¬ Ì õ.

þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÅÆ¦

$\underline{i}, \underline{j}$ ± ý È µÃÄ Ì ò ¾¦ ¨ ºÂ¦¸ ¨ Ç x,y « î Í ¸ Ç¦ø « ¨ Á ì ¸ ×õ. «ô¦À¡ØÐ,

$$\underline{A} = 420\left(\cos 195^\circ \underline{i} + Sin 195 \underline{j}\right)$$
$$= 420\left(-\cos 15^\circ \underline{i} - Sin 15^\circ \underline{j}\right)$$
$$= -420\cos 15^\circ \underline{i} - 420 Sin 15^\circ \underline{j}$$
$$\underline{B} = 420\left(\cos 45^\circ \underline{i} + Sin 45^\circ \underline{j}\right)$$
$$= 420\cos 45^\circ \underline{i} + 400 Sin 45^\circ \underline{j}$$
$$\underline{C} = 290\left(-\underline{j}\right)$$
$$= -290\underline{j}$$
$$\underline{D} = 170\left(\cos 45^\circ \underline{i} - Sin 45^\circ \underline{j}\right)$$
$$= 170\cos 45^\circ \underline{i} - 170 Sin 45^\circ \underline{j}$$
$$\therefore \underline{R} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D}$$
$$\left(-420\cos 15^\circ + 400\cos 45^\circ + 170\cos 45^\circ\right)\underline{i} + \left(-420\sin 15^\circ + 400\sin 45^\circ - 290 - 170\sin 45^\circ\right)\underline{j}$$
$$= \left(-420\cos 15^\circ + 570\cos 45^\circ\right)\underline{i} + \left(-420\sin 15^\circ + 230\sin 45^\circ - 290\right)\underline{j}$$
$$= \left(-420\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}} + 570\times\frac{1}{2}\right)\underline{i} + \left(-420\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{230}{\sqrt{2}} - 290\right)\underline{j}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(360 - 210\sqrt{3}\right)\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(440 - 210\sqrt{3} - 290\sqrt{2}\right)\underline{j}$$
$$= -(2.631\underline{i} + 236.053\underline{j})$$
$$\therefore R_x = -2.63; R_y = -236.053$$
$$\therefore R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$$
$$= \sqrt{\left(-2.63\right)^2 + \left(-236.053\right)^2}$$ Á¦.
$$= 236.05$$

OD ± ý È §¸¡ Î x « î Í¼ý ¯ ± ý È §¸¡ ½ ò ¨ ¾ « ¨ ÁôÀ¾¡ø,

$$\tan ¯ = \frac{R_y}{R_x}$$
$$= \frac{-236.053}{-2.63}$$
$$= 89.07$$
$$\therefore ¯ = 180^\circ + 89^\circ 21'$$

$= 269^\circ 21'$ ¬ Ì õ.

Á¡¾¦¡¦ 1-11

þ¼ô¦ÀÂ÷î º¦ 30 Á¦ð¼÷ ¯ ûÇ ¾¦ ¨ ºÂ¦ ´ ý Ú, (-2, 2, 1) ± ý È ¾¦ ¨ º Å¦¸¦¾ í ¸ ¨ Ç ì

¦ ¸¡ ñ ¼ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î ¸¢È¦¾ýÈ¡ø « ¾ý ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸ ¨ ÇÔõ, « î Í ¸Ç¢ø « ¾ý ± ñ ½¢ôÀ Ì ¾¢ ¸ ¨ ÇÔõ ¸ ¡ ñ ¸.
± ýÀÐ

$\underline{a}$ ± ýÈ $\underline{A}$ ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¢ì Ì ´ Õ §À¡ ¸ ¡ ¸ « ¨ ÁÔõ µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ± ýÈ¡ø,

$$\underline{A} = A\underline{a}$$
$$= 30\underline{a}$$ ¬ Ì õ.

þ í Ì

$$\underline{a} = \frac{1}{\left(\sqrt{-2}\right)^2 + (2)^2 + (1)^2}\left(-2\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-2\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}\right)$$ ¬ Ì õ.

±É§Å $l = -\frac{2}{3}, m = \frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}$ ± ýÀ ¨ Å ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸Ç¡ Ì õ.

¬ ¾Ä¡ø $\underline{A} = 30\left(-\frac{2}{3}\underline{i} + \frac{2}{3}\underline{j} + \frac{1}{3}\underline{k}\right)$ ¬ Ì õ.

« ¾¡ÅÐ $A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k} = -20\underline{i} + 20\underline{j} + 10\underline{k}$ ¬ Ì õ.

$A_x = -20$ß, $A_y = -20$ß, $A_z = -20$ß ¬ Ì õ.

Á¡¾¢¡¢ 1-12

420 ¸¢.¸¢ ± ¨ ¼Ôû Ç Å¢ ¨ º ´ ý Ú, (-3, 7, 0), (-5, 10, -6) ± ýÈ ÒûÇ¢ ¸ ¨ Ç î §º÷ì Ì õ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀ Î ¸¢È¦¾ýÈ¡ø, Å¢ ¨ º ¨ Â Å ¨ ÃÂÚì Ì õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ý ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸ ¨ ÇÔõ, « ¾ý ± ñ Á¾¢ô ¨ ÀÔõ ¸ ¡ ñ ¸.

ÀÃó¾¦Å Ç¢Â¢ø O ± ýÈ Íð¼ ¨ ÁôÒ ÒûÇ¢Â¢ø (-3, 7, 0), (-5, 10, -6) ± ýÀ ¨ Å, $\underline{P}, Q$ ± ýÈ ÒûÇ¢ ¸ ¨ Ç Å ¨ ÃÂÚôÀ¾¡ø,

$$\underline{OP} = -3\underline{i} + 7\underline{j} + 0\underline{k}$$
$$\underline{OQ} = -5\underline{i} + 10\underline{j} - 6\underline{k}$$ ¬ Ì õ.

$$\therefore \underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$
$$= \left(-5\underline{i} + 10\underline{j} - 6\underline{k}\right) - \left(-3\underline{i} + 7\underline{j} + 0\underline{k}\right)$$
$$= -2\underline{i} + 3\underline{j} - 6\underline{k}$$
$$= 7\left(-\frac{2}{7}\underline{i} + \frac{3}{7}\underline{j} - \frac{6}{7}\underline{k}\right)$$
$$= 7\underline{f}$$ ¬ Ì õ.

±É§Å $\underline{PQ}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢-ý ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º ¨Â, ±ýÈ $\underline{f} = -\frac{2}{7}\underline{i} + \frac{3}{7}\underline{j} - \frac{6}{7}\underline{k}$ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢ Å¨ÃÂÚì Ìõ.

¬¾Ä¡ø $l = -\frac{2}{7}, m = \frac{3}{7}, n = \frac{6}{7}$

§ÁÖõ

$$\underline{F} = F\,\underline{f}$$

$$= 420\left(-\frac{2}{7}\underline{i} + \frac{3}{7}\underline{j} - \frac{6}{7}\underline{k}\right)$$

$$= -120\underline{i} + 180\underline{j} - 360\underline{k}$$ ¬ Ìõ.

$\therefore F_x = -120$ ¸¢.¸¢.±¨¼; $\therefore F_y = 180$ ¸¢.¸¢.±¨¼; $\therefore F_z = -360$ ¸¢.¸¢.±¨¼ ¬ Ìõ.

Á¡¾¢¡¢ 1-13

15 Á¡./Å¢^{2} Á¾¢ôÒûÇ Ó Î ì¸õ, (5,8,14) ±ýÈ ÒûÇ¢¨Â, (7, 3, 0) ±ýÈ ÒûÇ¢Ô¼ý §º÷ì Ìõ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎÁ¡É¡ø, Ó Î ì¸ò¨¾ Å¨ÃÂÚì Ìõ ¾¢¨ºÂ¢-ý ¾¢¨ºì¸¢¼ì¨¸ ¸¨ÇÔõ, «îÍì¸Ç¢ø x, y, z Ó Î ì¸ò¾¢ý ±ñ ½¢ôÀÌ¾¢¸¨ÇÔõ ¸¡ñ ¸.

P, Q ±ýÈ ÒûÇ¢¸û Ó¨ÈÂ (5, 8, 14), (7, 3, 0) ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢Ä¨ÁÔÁ¡¸¢ø

$$\underline{OP} = 5\underline{i} + 8\underline{j} + 14\underline{k}$$

$$\underline{OQ} = 7\underline{i} + 3\underline{j} + 0\underline{k}$$ ¬ Ìõ.

$$\therefore \underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$

$$= \left(7\underline{i} + 3\underline{j}\right) - \left(5\underline{i} + 8\underline{j} + 14\underline{k}\right)$$

$$= 2\underline{i} - 5\underline{j} - 14\underline{k}$$

$$= 15\left(\frac{2}{15}\underline{i} - \frac{5}{15}\underline{j} - \frac{14}{15}\underline{k}\right)$$

$$= 15\underline{f}$$

þíÌ $\underline{f}$ ±ýÀÐ PQ ±ýÈ §¿÷§¸¡ðÊÄ¨ÁÔõ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ. ±É§Å $\underline{f} = \frac{2}{15}\underline{i} - \frac{5}{15}\underline{j} - \frac{14}{15}\underline{k}$ ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢ «È¢Å¢ì Ìõ.

¬¾Ä¡ø, Ó Î ì¸õ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊý ¾¢¨ºì¸¢¼ì¨¸¸û Ó¨ÈÂ

$$l = \frac{2}{15}; m = -\frac{1}{3}; n = -\frac{-14}{15}$$

§ÁÖõ $\underline{a} = a\underline{f}$ ¬ Å¾¡ø $a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k} = 15\left(\frac{2}{15}\underline{i} - \frac{5}{15}\underline{j} - \frac{4}{15}\underline{k}\right)$ ¬ Ì õ.

¬ ¾Ä¡ø, $a_x = 2$ Á./Å^2

$a_y = -5$ Á./Å^2

$a_z = -14$ Á./Å^2 ¬ Ì õ.

Á¡¾¡ 1-14

190 Á ¿ÇÓ û Ç $\underline{L}$ ± ý Û õ ¾ ¨ ºÂ (-3, -1, -11) ± ý È Òû ÇÂÄÕóÐ (15, 0, -5)± ý È Òû Çì Ì Å ¨ ÃÔõ §¿÷ì §¸¡ðÊø ¦ºÂüÀ Î ¸ÈÐ. $\underline{L}$ ì Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ (5, -7, 0) ± ý È Òû Ç ÅÆ§Â $\underline{M}$ ± ý È ¾ ¨ ºÂ ¦ºÂüÀ Î ¸ÈÐ. $\underline{M}$ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊø Áü¦È¡Õ Òû Ç ¨ Â ì ¸ ¡ ñ ¸.

(-3, -1, -11), (15, 0, -5) ± ý À ¨ Å P,Q ± ý È Òû Ç¸ ¨ Ç ì Ì Èì ¸ ð Î õ. « ô ¦ À¡ØÐ

$$\underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$

$$= \left(15\underline{i} - 5\underline{k}\right) - \left(-3\underline{i} - \underline{j} - 11\underline{k}\right)$$

$$= 18\underline{i} + \underline{j} + 6\underline{k}$$

$$= 19\left(\frac{18}{19}\underline{i} + \frac{1}{19}\underline{j} + \frac{6}{19}\underline{k}\right), 19 = \sqrt{18^2 + 1^2 + 6^2}$$

$= 19\underline{f}$ ¬ Ì õ.

$$\therefore \underline{f} = \frac{18}{19}\underline{i} + \frac{1}{19}\underline{j} + \frac{6}{19}\underline{k}$$

$$\therefore \underline{L} = L\underline{f}$$

$$= 190\left(\frac{18}{19}\underline{i} + \frac{1}{19}\underline{j} + \frac{6}{19}\underline{k}\right)$$

$= 180\underline{i} + 10\underline{j} + 60\underline{k}$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ $\underline{M} = M\underline{f}$

$= M\left(\frac{18}{19}\underline{i} + \frac{1}{19}\underline{j} + \frac{6}{19}\underline{k}\right)$ ¬ Ì õ.

(5, -7, 0)± ý ÀÐ R ± ý È Òû Ç ¨ Â ì Ì Èì ¸ ð Î õ. $\underline{M}$ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊø S(x,y,z) ± ý ÀÐÁü¦È¡Õ Òû ÇÂ¡ ¸ø

$$\underline{RS} = \underline{OS} - \underline{OR}$$

$$= \left(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}\right) - \left(5\underline{i} - 7\underline{j}\right)$$

$= (x-5)\underline{i} + (y+7)\underline{j} + z\underline{k}$ ¬ Ì õ.

$$= \sqrt{(x-5)^2 + (y+7)^2 + z^2}$$

$$= \left(\frac{x-5}{\sqrt{(x-5)^2+(y+7)^2+z^2}} \underline{i} + \frac{y+7}{\sqrt{..}} \underline{j} + \frac{z}{\sqrt{..}} \underline{k} \right)$$

±ýÈ¡ Ì õ. PQ, RS ±ýÀ¨Å þ¨ ½§¸¡ Î ¸Ç¡Å¡¾¡ø

$$\frac{x-5}{\sqrt{(x-5)^2+(y+7)^2+z^2}} = \frac{18}{19}$$

$$\frac{y+7}{\sqrt{(x-5)^2+(y+7)^2+z^2}} = \frac{1}{19}$$

$$\frac{z}{\sqrt{(x-5)^2+(y+7)^2+z^2}} = \frac{6}{19}$$ ¬ Ì õ

$\therefore \frac{x-5}{18} = \frac{y+7}{1} = \frac{z}{6} = r \quad (r \neq 0),$ ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø

X=18r+5
Y=r-7
Z=6r ±ýÈ¡ Ì õ.

r - ì Ì ±ó¾ Á¾¢ô¨ÀÔõ ¦¸¡ Î ì ¸Ä¡õ. ²¾¡ÅÐ ´Õ òûÇ¢¨Â Å¨ÃÂÚ ì ¸ r = 1 ±É ì ¦¸¡ûÇ×õ. «ô¦À¡ØÐ

X=18+5=23

Y=1-7=-6

Z=6 ±ýÈ¡ Ì õ.

±É§Å $\underline{M}$ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊø (23, -6, 6) ±ýÀÐ Áü¦È¡Õ òûÇ¢Â¡ Ì õ.

Á¡¾¢¡¢ 1 - 15 P,Q ±ýÈ òûÇ¢¸Ç¢ý «î Í ¦¾¡¨Ä×¸û Ó¨È§Â (2, -4, 1), (7, 10, 5) ±É ì ¦¸¡ Î ì ¸ôÀð Î ûÇÉ. P-Ä¢ÕóÐ Q-ì Ì Ó¨È§Â (3,0,4) (-4, 1, 8), (1, 2, -2) ±ýÈ ¾¢¨º Å¢¸¢¾ ± ñ ¸û ¦¸¡ ñ ¼ ¾¢¨º¸Ç¢ý ÅÆ¢Â¡¸ î ¦ºýÈ¡ø þ¨¼¢Â¢ø ¦ºýÈ ÅÆ¢¸Ç¢ý ¦¾¡¨Ä×¸¨ Ç ì ¸¡ ñ ¸.

O ±ýÈ òûÇ¢¨Âò ÐÅì ¸ô òûÇ¢Â¡¸ ±Î ì Ì õ §À¡Ð $\underline{OP} = 2\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{k}$
$\underline{OQ} = 7\underline{i} + 10\underline{j} + 5\underline{k}$ ±ýÈ¡ Ì õ.

$$\therefore \underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$

$$= \left(7\underline{i} + 10\underline{j} + 5\underline{k}\right) - \left(2\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{k}\right)$$

$$= 5\underline{i} + 14\underline{j} + 4\underline{k}$$ ¬ Ì õ

P-Ä¢ÕóÐ Q-ì Ì ¦ºøÖõ ±ò¾¢¨º¸Ç¢ý ÅÆ¢Â¡¸î ¦ºøÄ §Å ñ Î õ ±ýÀ¨¾ ¾¢¨º Å¢¸¢¾í ¸û Å¨ÃÂÚì Ì õ. «ò¾¢¨º¸Ç¢ø ¸¼ì Ì õ ¦¾¡¨Ä×¸¨Ç A, B, C±É ì ¦¸¡ûÇ×õ. «ô¦À¡ØÐ

$\underline{PQ} = \underline{PA} + \underline{AB} + \underline{BQ} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}$ ±ýÈ¡ Ì õ.

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ¬ ¸¦Â ¾¦¨ ºÂ¦¸ û ¦ºÂüÀ Î õ ¾¦¨ º ¸Ç¦ø $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ±ýÈ µÃÄ Ì ò ¾¦¨ ºÂ¦¸ ¨ Ç Ó¾Ä¦ø Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ×õ.

$\underline{a}$ ±ýÈ µÃÄ Ì ò ¾¦¨ ºÂ¦ (3, 0, 4) ±ýÈ ¾¦¨ º Å¦¸¦¾ í ¸ ¨ Çô ¦ÀüÈ ¾¦¨ ºÂ¦Ä ¨ ÁÅ¾¡ø

$$\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}\left(3\underline{i}+0\underline{j}+4\underline{k}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(3\underline{i}+4\underline{k}\right)$$ ±ýÈ¡ Ì õ.

« ùÅ¡§È,

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{16+1+64}}\left(-4\underline{i}+\underline{j}+8\underline{k}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(-4\underline{i}+\underline{j}+8\underline{k}\right)$$ ±ý Úõ

$$\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}}\left(\underline{i}+2\underline{j}-2\underline{k}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{i}+2\underline{j}-2\underline{k}\right)$$ ±ý Úõ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ, ¬ ¾Ä¡ø

$$\underline{A} = A\underline{a} = \frac{A}{5}\left(3\underline{i}+4\underline{k}\right)$$

$$\underline{B} = B\underline{b} = \frac{B}{9}\left(-4\underline{i}+\underline{j}+8\underline{k}\right)$$

$$\underline{C} = C\underline{c} = \frac{C}{3}\left(\underline{i}+2\underline{j}-2\underline{k}\right)$$ ±ýÈ¡ Ì õ

±É§Å,

$\underline{PQ} = \underline{A}+\underline{B}+\underline{C}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ Î

$$5\underline{i}+14\underline{j}+4\underline{k} = \left(\frac{3A}{5}-\frac{4B}{9}+\frac{C}{3}\right)\underline{i}+\left(\frac{B}{9}+\frac{2C}{3}\right)\underline{j}+\left(\frac{4A}{5}+\frac{8B}{9}-\frac{2C}{3}\right)\underline{k}$$ ±ýÈ¡ Ì õ.

þÕÒÈ í ¸Ç¦Öõ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ¬ ¸¦ÂÅüÈ¦ý ¦ ¸Ø ì ¸ ¨ Ç (coefficients)î ºÁôÀ Î ò¾

$$\frac{3A}{5}-\frac{4B}{9}+\frac{C}{3}=5..............(i)$$

$$\frac{B}{9}+\frac{2C}{3}=14.....................(ii)$$

$$\frac{4A}{5}+\frac{8B}{9}+\frac{2C}{3}=4............(iii)$$

± ý È ºÁ ý À¡ Î ¸ û ¸ ¨ ¼ì Ì õ

$(i)\times 2+(iii)\rightarrow \frac{6A}{5}-\frac{8B}{9}+\frac{2C}{3}+\frac{4A}{5}+\frac{8B}{9}-\frac{2C}{3}=10+4$ ± ý È¡ Ì õ.

« ¾¡ÅÐ $\frac{10A}{5}=14$

$\therefore A=7$ ¬ Ì õ

$(i)+(iii)\rightarrow \frac{4A}{5}+B=14+4$ ± ý È¡ Ì õ.

« ¾¡ÅÐ

$$=18-\frac{28}{5}$$

$$=\frac{90-28}{5}$$

$$=\frac{62}{5}$$ ¬ Ì õ.

(ii) - ÅÐ ºÁ ý À¡ðÊÄ¢ÕóÐ

$$\frac{2C}{3}=14-\frac{B}{9}$$

$$=14-\frac{62}{5}\times\frac{1}{9}$$

$$=\frac{630-62}{45}$$

$$=\frac{568}{45}$$

$$C=\frac{568}{45}\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{284}{9}$$

$\therefore A=7; B=\frac{62}{5}; C=\frac{284}{9}$ ¬ Ì õ

Á¡¾¡ 1-16

A (4, 0, 3), B (−8, 6, 0) ±ýÈ Ò̂ûÇ¸ ¨Çò ÐÅì¸ôÒ̂ûÇ O ¯¼ý§º÷òÐ ¯ ñ ¼¡ Ì õ þÕ §¿÷§¸¡ Î ¸ Ùì Ì þ ¨¼ÂÄ ¨ÁÔõ §¸¡½ò ¨¾ì ¸¡ ñ ¸.

O ±ýÈ Ò̂ûÇ ¨Âî Íð¼ ¨ÁôÀ¡¸ ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø, A,B ±ýÈ Ò̂ûÇ¸Çý ¿ ¨Äò ¾ ¨ºÂ¸ û Ó ¨È§Â

$\underline{A}=\underline{OA}=4\underline{i}+3\underline{k}; \underline{B}=\underline{OB}=-8\underline{i}+6\underline{j}$ ±ýÈ¡ Ì õ

$\underline{A},\underline{B}$ ±ýÈ ¾ ¨ºÂ¸ Ùì Ì þ ¨¼ÂÄ ¨ÁÔõ §¸¡½ò ¨¾ ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø, ± ñ ½ô¦ÀÕì ¸ Å¾ôÀÊ

$$\cos^{-} = \frac{\underline{A}.\underline{B}}{AB}$$

$$=\frac{(4\underline{i}+3\underline{k})(-8\underline{i}+6\underline{j})}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{(-8)^2+6^2}}$$

$$=\frac{-32}{5\times10}=-0.64$$ ¬ Ì õ.

±É§Å, $^{-}=(180°-50.2°)=129.8$ ¬ Ì õ.

Á¡¾¡ 1-17.

$\underline{A}=3\underline{i}-6\underline{j}-9\underline{k}$ ±ýÈ ¾ ¨ºÂ-þ ý À¸÷ ¨Å, $\underline{E}=\frac{1}{3}\underline{i}-\frac{2}{3}\underline{j}-\frac{2}{3}\underline{k}$ ±ýÈ µÃÄ Ì ò ¾ ¨ºÂ- ì Ì þ ¨ ½Â¡É ¾ ¨ºÂø ¸¡ ñ ¸.

§¾ ¨ÅÂ¡É À¸÷ ¨Å A_E ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø,

$A_E = \underline{A}.\underline{E}$

$$=(3\underline{i}-6\underline{j}-9\underline{k}).\left(\frac{1}{3}\underline{i}-\frac{2}{3}\underline{j}-\frac{2}{3}\underline{k}\right)=11$$ ¬ Ì õ.

Á¡¾¡ 1-18

¸úì ¸¡ Ï õ Å ¨ÃÂ ¨È¸Çø ¾ ¨ºÂ¸ Ùì Ì þ ¨¼ÂÄ ¨ÁÔõ §¸¡½ò ¨¾ ¸¡ ñ ¸.

(i) ¾ ¨ºÂ¸ û.. $2\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}, 3\underline{j}-4\underline{k}$

(ii) (0,5,2),(-6,-6,3) ±ýÈ Ò̂ûÇ¸ Ùì Ì ¯¡Â ¿ ¨Äò ¾ ¨ºÂ¸ û.

. (iii) A(-2,6,3) ±ýÈ Ò̂ûÇ ¨Â B(-2,7,5) , C(-1,6,1) ±ýÈ Ò̂ûÇ¸ Ù¼ý §º÷òÐ ¯ ñ ¼¡ Ì õ AB, AC ±ýÈ §¸¡ Î ¸ û

(iv) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3}\right)\right\},\left\{\left(\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$ ± ý È ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ ì ¨ ¸ ¸ ¨ ÇÔ ¨ ¼Â §¸ ¡ Î ¸ û

$\underline{A}=2\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k},\underline{B}=3\underline{j}-4\underline{k}$ ± ý È ¡ ø

$$\cos^{-}=\frac{\underline{A}.\underline{B}}{AB}=\frac{\left(2\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}\right).\left(3\underline{j}-4\underline{k}\right)}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+16}}$$

$=\frac{-3+8}{3\times5}=\frac{1}{3}$ ¬ Ì õ

$$\therefore^{-}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=70.5°$$

(ii) A(0,5,2) , B (-6,-6,3) ± ý È ¡ ø

$\underline{A}=\underline{OA}=5\underline{j}+2\underline{k};\underline{B}=\underline{OB}=-6\underline{i}-6\underline{j}+3\underline{k}$ ¬ Ì õ

$$\therefore\cos^{-}=\frac{\underline{A}.\underline{B}}{AB}=\frac{\left(5\underline{j}+2\underline{k}\right).\left(-6\underline{i}-6\underline{j}+3\underline{k}\right)}{\sqrt{25+4}\sqrt{36+36+9}}=\frac{-30+6}{\sqrt{29\times9}}$$

$$=-\frac{8}{3\sqrt{29}}=0.49517$$

$$\therefore^{-}=\left(180°-60.3°\right)=119.7°$$

(iii) A (-2, 6, 3), B (-2, 7, 5), C (-1, 6, 1) ± ý È Òû Ç¢ ¸ Ù ì Ì ¯ ¡¢Â ¿¢ ¨ Äò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û Ó ¨ È§Â

$\underline{OA}=-2\underline{i}+6\underline{j}+3\underline{k};\underline{OB}=-2\underline{i}+7\underline{j}+5\underline{k};\underline{OC}=-\underline{i}+6\underline{j}+\underline{k}$ ¬ Ì õ.

$\therefore\underline{AB}=\underline{OB}-\underline{OA}=\underline{j}+2\underline{k}$

$\underline{AC}=\underline{OC}-\underline{OA}=\underline{i}-2\underline{k}$ ¬ Ì õ

$\underline{P}=\underline{j}+2\underline{k};\underline{Q}=\underline{i}-2\underline{k}$ ± É ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼ ¡ ø

$\cos^{-}=\frac{\underline{P}.\underline{Q}}{PQ}=\frac{-4}{5}=\frac{4}{5}$ $\therefore^{-}=\left(180°-36.8°\right)$

$=143.2°;$ ¬ Ì õ.

(iv) $\cos^{-}=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$ ± ý È ¿¢Â¾¢ôÀÊ þ í Ì $\cos^{-}=\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=0$ ¬ Ì õ.

± É §Å $^{-}=90°$ ± ý È ¡ Ì õ.

Á¡¾¢¡¢ 1-19 $\underline{A}=16\underline{i}+3\underline{j};\underline{B}=-6\underline{i}+10\underline{k};\underline{C}=4\underline{j}$ ± É ¢ ý À¢ ý ÅÕÅ É Åü ¨ È ì ¸ ¡ ñ ¸

$(i)\underline{C}\left(\underline{A}.\underline{C}\right)+\underline{B}$

$(ii)-\underline{C}+\left[\underline{B}.\left(-\underline{A}\right)\underline{C}\right]$

$(iii)\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)$

$(iv)\,\underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)$

$(i)\,\underline{A}=16\underline{i}+3\underline{j};\underline{B}=-6\underline{i}+10\underline{k};\underline{C}=4\underline{j}$

$\therefore\left(\underline{A}.\underline{C}\right)=\left(16\underline{i}+3\underline{j}\right)\left(4\underline{j}\right)=12$

±É§Å $\underline{C}\left(\underline{A}.\underline{C}\right)+\underline{B}=12\left(4\underline{j}\right)+\left(-6\underline{i}+10\underline{k}\right)$

$=-6\underline{i}+48\underline{j}+10\underline{k}$ ¬ Ì õ.

$(ii)\left[\underline{B}.\left(-\underline{A}\right)\underline{C}\right]=\left(-6\underline{i}+10\underline{k}\right)\left(16\underline{i}+3\underline{j}\right)=96$

±É§Å $-\underline{C}+\left[\underline{B}.\left(-\underline{A}\right)\underline{C}\right]$

$=-4\underline{j}+96\left(4\underline{j}\right)$

$=380\underline{j}$ ¬ Ì õ.

$$(iii)\,\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=\begin{pmatrix}16 & 3 & 0\\ -6 & 0 & 10\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$=16\left(0-14\right)-3\left(0\right)+0=-640$$

$$(iv)\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=\begin{pmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ -6 & 0 & 10\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\underline{i}\left(0-40\right)-\underline{j}\left(0\right)+\underline{k}\left(-24-0\right)$$

$$\therefore\underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=\begin{pmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 16 & 3 & 0\\ -40 & 0 & -24\end{pmatrix}$$

$$=\underline{i}\left(-72-0\right)-\underline{j}\left(-384-0\right)+\underline{k}\left(0+120\right)$$

$$=-72\underline{i}+384\underline{j}+120\underline{k}$$

$\therefore\underline{A}\wedge\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=24\left(-3\underline{i}+16\underline{j}+5\underline{k}\right)$ ¬ Ì õ

Á¡¾¢¡¢ 1-20 $\underline{A}=5\underline{i}-6\underline{j}+7\underline{k};\underline{B}=7\underline{i}-8\underline{j}+9\underline{k};\underline{C}=3\underline{i}+\underline{j}-5\underline{k}$ ±ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û ´ Õ ¾Çò¾¢Ä ¨ ÁÔõ ±É ¿¢Ú× ¸ .

$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$, ±ý À ¨ Å ´ Õ ¾Çò¾¢Ä ¨ ÁÅ¾ü Ì ¡¢Â Å ¨ ÃÂ ¨ È, $\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=0$ ¬ Ì õ.

±É§Å, Ó ì Ü ð Î ± ñ ½¢ô ¦ÀÕ ì ¸¢ ¨ Â « ½¢ì§ ¸ ¡ ¨ Å « ¨ ÁôÀ¢ø ±Ø¾¢¼,

$$\underline{A}.\left(\underline{B}\wedge\underline{C}\right)=\begin{vmatrix}5 & -6 & 7\\ 7 & -8 & 9\\ 3 & 1 & -5\end{vmatrix}$$ ±ý È¡ Ì õ

« ¾ý Á¾¢ôÒ $=5(40-9)-7(30-7)+3(-54+56)=255-161+6$ = 0 ¬ Ì õ

±É§Å, $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ±ý À ¨ Å ´ Õ ¾Çò¾¢Ä ¨ ÁÔõ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ç¡ Ì õ.

Á¡¾¢¡¢ 1-21

$A(2,3,5), B(4,-3,-2), C(0,5,4), D(-2,5,-1)$ ±ýÈ ÒûÇ¢¸û ´Õ ¾Çò¾¢Ä¨ ÁÔõ ±É ì ¸¡ ñ ¸.

O ±ýÈ ÒûÇ¢ ¨Âò ÐÅì ¸ô ÒûÇ¢Â¡¸ì ¸ÕÐõ§À¡Ð,

$\underline{OA} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k}, \underline{OB} = 4\underline{i}, -3\underline{j}, -2\underline{k}, \underline{OC} = 5\underline{j}, 4\underline{k},$

$\underline{OD} = -2\underline{i}, 5\underline{j}, -\underline{k}$ ±ýÈ¡ Ìõ. «ô¦À¡ØÐ,

$\underline{P} = \underline{AB} = \underline{OB} - \underline{OA} = 2\underline{i} - 6\underline{j} - 7\underline{k}$

$\underline{Q} = \underline{AC} = \underline{OC} - \underline{OA} = -2\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$

$\underline{R} = \underline{AD} = \underline{OD} - \underline{OA} = -4\underline{i} + 2\underline{j} - 6\underline{k}$ ¬ Ìõ.

$\underline{P}, \underline{Q}, \underline{R}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´Õ ¾Çò¾¢Ä¨ ÁÅ¾üÌ ¡¢Â Å¨ÃÂ¨È $\underline{P}.(\underline{Q} \wedge \underline{R}) = 0$ ¬ Ìõ.

±É§Å Óì Üð Î ± ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢ $\underline{P}.(\underline{Q} \wedge \underline{R}) = 0$ ý Á¾¢ô¨À «½¢ì§¸¡¨Å «¨ÁôÀ¢ø ±Ø¾¢¼,

$$\underline{P}.(\underline{Q} \wedge \underline{R}) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -7 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$ ±ýÈ¡ Ìõ.

«¾ý Á¾¢ôÒ $= 2(-12+2) + 6(12-4) - 7(-4+8)$

$= -20 + 48 - 28$

$= 0$ ¬ Ìõ.

±É§Å $\underline{P}, \underline{Q}, \underline{R}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´Õ ¾Çò¾¢Ä¨ ÁÔõ.

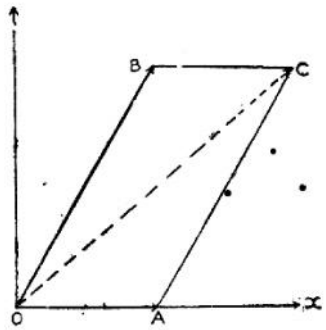
«¾¡ÅÐ A, B, C, D ±ýÈ ÒûÇ¢¸û ´Õ ¾Çò¾¢Ä¨ ÁÔõ.

Á¡¾¢¡¢ 1-22

25 ¸¢.¸¢. ±¨¼ÔûÇ Å¢¨º ´ýÚ X «îº¢ý Á¢¨ ¸ò ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎ ¸¢ÈÐ. 50 ¸¢.¸¢. ±¨¼ÔûÇ Áü¦È¡Õ Å¢¨º, Ó¾ø ¸¡ø Åð¼ôÀÌ¾¢Â¢ø (in the first quadrant) ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â X «îÍ¼ý 60° §¸¡½ò¨¾ «¨Áì Ìõ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎ ¸¢ÈÐ. «ùÅ¢¨º¸û ¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨º¨Âì ¸¡ ñ ¸.

Å¨ÃÀ¼ Å¢Çì ¸õ

þ í Ì þÕ Å¢¨º¸ Ùõ ÐÅì¸ÒûÇ¢ O ÅÆ¢§Â ¦ºø¸¢ýÈÉ. OX, OY ±ýÈ ¸¢¨¼, ¿¢¨Ä «îÍì¸Ç¢ý ¾¢¨º¸ ¨Ç $\underline{i}, \underline{j}$ ±ýÈ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢¸û «È¢Å¢ì ¸ ð Î õ.



À¼õ 1-33

¾ Ì ó¾ « ÇÅ Î ± Î òÐ, À¼õ 1-33ø ¸¡ðÊÂÀÊ, x « î º ø OA=2.5 ¦º.Á. ¯ûÇÅ¡Ú, A ±ýÈ ÒûÇ ¨Â ì Ì È ì¸ ×õ. X « î Í¼ý 60° §¸¡½ò¨¾ò ¾¡ í Ì õ §¸¡ðÊø, OB-5 ¦º.Á. ¦¾¡ ¨Ä ¨Å Ì È ì Ì õ B ±ýÈ ÒûÇ ¨Â ± Î ì¸ ×õ. þ ¨ ½ ¸Ã Å ¾ôÀÊ, OC ±ýÈ ã ¨ ÄÅ ð¼õ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å ¨ º ¨ Â « ÈÅ ì Ì õ.

Å ¨ ÂÀ¼ò¾ø OC ý ¿Çõ 6.6 ¦º.Á ¬ Å¾¡ø, ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å ¨ ºÂ ý ± ñ Á¾ôÒ $= 6.6 \times 10 = 66$ ¸ . ¸ ± ¨ ¼Â¡ Ì õ. « Ð ¦ºÂüÀ Î õ ¾ ¨ º, X « î Í¼ý $C\hat{O}A = {}^{-} = 41^\circ$ ±ýÈ §¸¡½ò ¨ ¾ « ¨ Á ì ¸ÈÐ.

þÂü¸ ½ ¾ ÅÇ ì ¸ õ;

þ í Ì Å ¨ º ¸ û

$\underline{F_1} = 25\underline{i}, \underline{F_2} = 50\cos 60^\circ \underline{i} + 50\sin 60^\circ j = 25i + 25\sqrt{3}j$ ±ýÈ¡ Ì õ.

Å ¨ º ¸ Ç ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å ¨ º ¨ Â R ±É ì ¦ ¸¡ ñ ¼¡ø,

$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$$

$$= 25\underline{i} + 25\underline{i} + 25\sqrt{3}j \text{ ¬ Ì õ.}$$

$$= 50\underline{i} + 25\sqrt{3}j$$

$$R_x = 50, R_y = 25\sqrt{3}$$

±É§Å,

$$R^2 = R_x{}^2 + R_y{}^2$$

$$= (50)^2 + (25\sqrt{3})^2$$

$$= 2500 + 1875$$

$$= 4375$$

$\therefore R = \sqrt{4375} = 25\sqrt{7} = 66.13$ ¸ . ¸ . ± ¨ ¼.

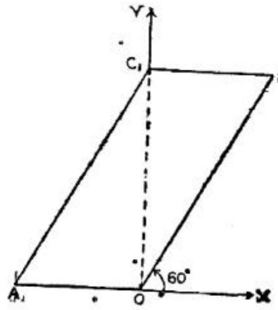
¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å ¨ º, X « î Í¼ý ¯ ±ýÈ §¸¡½ò ¨ ¾ « ¨ ÁôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸¡ ñ ¼¡ø,

$$\tan^{-} = \frac{R_y}{R_x} = \frac{25\sqrt{3}}{50} = \sqrt{3} = 0.866 \text{ ¬ Ì õ.}$$

« ¾¡ÅÐ, $^{-} = 40^\circ 55'$ ¬ Ì õ.

Á¡¾ ¡ 1-22

Á¡¾¢¡¢ 2-21ÅÐ ¸½ì¸¢ø, 25¸¢¸¢ Å¢¨º X «îº¢ý Ì¨È×ò ¾¢¨ºÂ¢ø (Negative direction of through X axis) ¦ºÂüÀÎÁ¡É¡ø Å¢¨º¸Ù ìÌ¡¢Â ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ¸. (À¼õ 1-34)

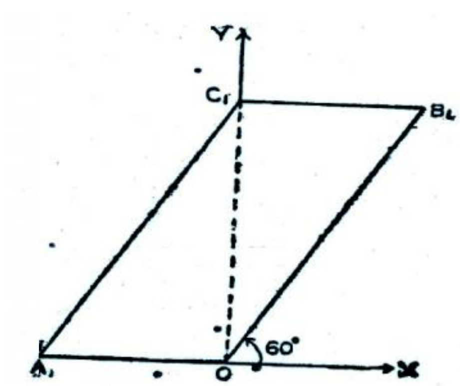


À¼õ 1-34

OA-- =2.5 ¦º.Á£.

$B_1\hat{O}X = 60^\circ, OB_1 = 5$ ¦º.Á£.

$OB_1C_1A_1$ ±ýÈ þ¨½¸Ãò¾¢ø, ã¨ÄÅ¢ð¼õ OC_1 ý ¿£Çõ 4.4 ¦º.Á£. ±ýÈ¡¸¢ÈÐ. ¬¾Ä¡ø ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºÂ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ $= 4\cdot 4\times 10 = 44$ ¸¢.¸¢. ±¨¼Â¡Ìõ. §ÁÖõ $C_1\hat{O}X = 90^\circ$ ±ýÚõ ¯ûÇÐ.



À¼õ 1-35

þÂü¸½¢¾ Ó¨ÈôÀÊ,

$$\underline{R_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$$

$$= -25\underline{i} + 50Cos60^\circ \underline{i} + 50Sin60^\circ \underline{j}.$$

$$= -25\underline{i} + 25\underline{i} + 25\sqrt{3}\,\underline{j}$$

$$= 25\sqrt{3}\,\underline{j}$$

$\therefore R_x = 0, R_y = 25\sqrt{3}$ ±ýÈ¡Å¾¡ø, $R_1 = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$

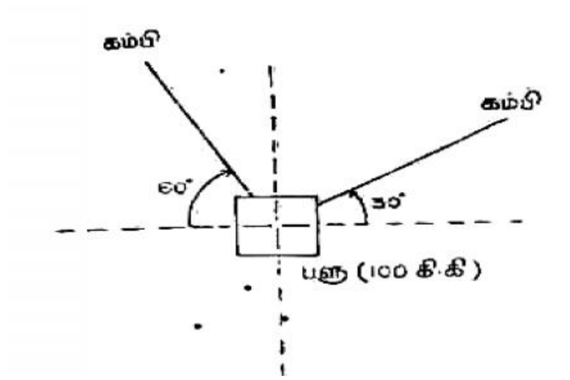
$= R_y = 25\sqrt{3} = 43.3$ ¸¢.¸¢. ±¨¼ ¬Ìõ.

§ÁÖõ $\tan^{-} = \frac{R_y}{R_x} = \sim$ ¬ Å¾¡ø, $^{-} = 90^\circ$ ¬ Ì õ.

Á¡¾¢¡¢ 1.23

100¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ ÀÙ (load) ´ ýÚ, ¸¢¨¼ì§¸¡ðÊø $30^\circ, 60^\circ$ §¸¡½í ¸¨Ç «¨Áì Ì õ þÕ ÅÖÅ¡É ¸õÀ¢¸Ç¡ø ¾¡í ¸ôÀð Î ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åì ¸ôÀð Î ûÇÐ ±ýÈ¡ø ¸õÀ¢¸Ç¢ø ¦ºÂüÀÎ õ þØ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ ñ ¸.

¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ Å¢ÅÃí ¸ Ùì Ì ²üÈÅ¡Ú À¼ò¨¾ «¨Áì ¸. «Ð À¼õ 1-36 þø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÕì Ì õ. þùÅ¢¾ Å¢É¡ì ¸ Ùì Ìò ¾÷× ¸¡½, Ó¾Ä¢ø ¾¨¼ÂüÈ



À¼õ 1-36

¦À¡Õ¨Ç (free body) Å¨ÃÂÚòÐì ¦¸¡ ñ Î, «¾ý §Áø ¦ºÂüÀÎ õ Å¢¨º¸¨Çì ÌÈ¢ì ¸§Å ñ Î õ.

±Ç¢Â ¸ÕòÐ¸û:

- Ð¸û ´ýÚ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø þÕôÀ¾üÌ «òÐ¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎ õ «¨ÉòÐ Å¢¨º¸Ùõ ¦Á¡ò¾Á¡¸ â ìº¢ÂÁ¡¸ þÕì ¸§Å ñ Î õ.

$\sum \underline{F} = \underline{0}$

¾í Ì¾¨¼ÂÂ¢ýÈ¢ ¦À¡Õû ´ýÈ¢ý Å¨ÃÀ¼ò¨¾ Å¨ÃÅ¾ü¸¡É ¦ºÂøÓ¨ÈÂ¢ø ¸¨¼À¢Êì ¸ §Å ñ ÊÂÐ ÅÕÁ¡Ú

(1) ÅÊ×ÕÅò¾¢ý ±ø¨Äì§¸¡ð¨¼ Å¨Ã¸

(2) «¨ÉòÐ ¦ºÂøÀÎ õ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ð Î ¸

(3) ´ù¦Å¡Õ Å¢¨º¨ÂÔõ «¨¼Â¡Çõ ¸¡ð Î õÀÊ Å¨Ã¸.

- Å¢¨º ¦ºÖò¾ôÀÎ õ ¾ý ¨ÁÂ¢ý ¾òÐÅõ Å¢Çì Ì ÅÐ ±ýÉ ¦ÅÉ¢ø «Ð ¦ºÂøÀÎ §¸¡ðÊø ±ôÀûÇ¢Â¢Öõ «¨ÁÂÄ¡õ.
- $p(x_i, y_i, z_i), Q(x_j, y_j, z_j)$ ±ýÈ þÕôÀûÇ¢¸Ç¢ý ÅÆ¢§Â¦ºøÖõ Å¢¨º $\underline{F}$ ±É¢ø, «ùÅ¢¨º¨Â $\underline{F} = F\underline{a}$ «È¢Å¢ì ¸Ä¡õ.

(1) þÄ¡Á¢Â¢ý Å¢¾¢ôÀÊ (Lami's Theorem) T_1T_2 ì¸ ¨Çì ¸¡ Ï ¾ø:

þí Ì ã ýÚÅ¢ ¨º¸Ùõ ´Õ Òû Ç¢Â¢ø ¦ºÂüÀð Î, « ¨¾î ºÁ¿¢ ¨ÄÂ¢ø ¨Åò¾¢ÕôÀ¾¡ø Óì§¸¡½ Å¢¾¢ôÀÊ,

$\underline{OA}+\underline{AB}+\underline{BO}=0$ ¬ Ìõ.

±É§Å $\Delta 0AB$ ø

$$\frac{OA}{Sin A\hat{B}O}=\frac{AB}{Sin B\hat{O}A}=\frac{BO}{Sin O\hat{A}B}$$

$$\frac{100}{Sin 90^\circ}=\frac{T_1}{Sin 30^\circ}=\frac{T_2}{Sin 60^\circ}$$ ¬ Ìõ

$$\therefore T_1=\frac{100\times Sin 30^\circ}{Sin 90^\circ}=50$$ ¸¢.¸¢

$$\therefore T_2=\frac{100\times Sin 60^\circ}{Sin 90^\circ}=50\sqrt{3}$$ ¸¢.¸¢

(2) ¬ Âò¦¾¡ ¨Ä ÅÊÅ ¸ ½¢¾ Ó ¨ÈÂ¢ø T_1T_2 ì¸ ¨Çì ¸¡ Ï ¾ø:

0 ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø Ox, Oy ±ýÈ ¸¢ ¨¼, ¿¢ ¨Ä « î Í ¸ ¨Ç Å ¨ÃÂÚ ì ¸×õ. Oø ¦ºÂüÀÎõ ´ ù¦Å¡Õ Å¢ ¨ºÂ¢ý ¬ ì ¸ ìÜÚ ¸ ¨Ç Ox, Oy ¾¢ ¨º¸Ç¢ø ¸ ñ Î «ÅüÈ¢ý þÂü¸ ½¢¾ì ÜÎ ¾ ¨Äî ÍÆ¢ì Ì î ºÁýÀÎ ò¾¢×õ. þí Ì Å¢ ¨º¸Ç¢ý ± ñ ½¢ô ÀÌ ¾¢¸Ç¢ý ÜÎ ¾ø Ó ¨È§Â Ox, Oy¾¢ ¨º¸Ç¢ø

$T_1\cos 30^\circ - T_2\cos 60^\circ$ ±ýÚõ,

$T_1\cos 60^\circ + T_2\cos 30^\circ - 100$ ±ýÚõ ¬ Ìõ.

±É§Å, $R_x=0, R_y=0$

±ýÈ Å ¨ÃÂ ¨È¸û Ó ¨È§Â

$$T_1\cos 30^\circ - T_2\cos 60^\circ = 0$$

$$T_1\cos 60^\circ + T_2\cos 30^\circ - 100 = 0$$

¬ Ìõ

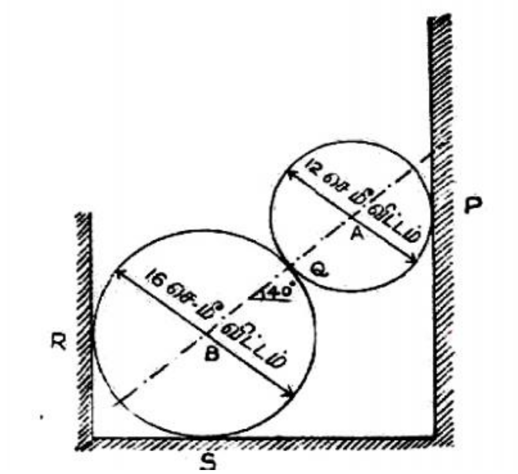
«¾¡ÅÐ $\sqrt{3T_1}-T_2=0,$

$T_1+\sqrt{3T_2}=200$ ¬ Ìõ

«øÄÐ $T_1=50$ ¸¢.¸¢., $T_2=50\sqrt{3}$ ¸¢.¸¢. ¬ Ìõ.

Á¡¾¢¡¢ 1-24.

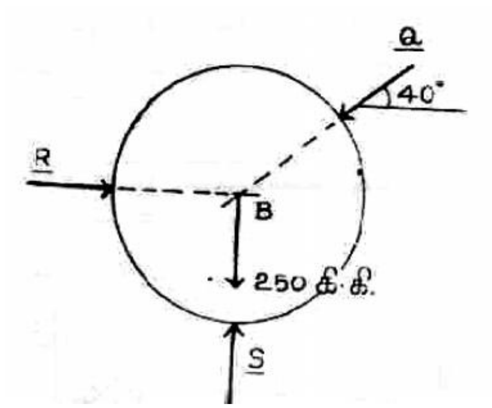
150 ¸¢.¸¢., 250 ¸¢.¸¢. ±¨¼Ôû Ç A,B ±ýÈ þÕ§¸¡Ç í ¸û À¼õ 1-37 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¾¡í ¸ôÀÎ ¸¢ýÈÉ.



À¼õ 1-37

ÀÃôÒ¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡Î õ P,Q,R,S ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¢ø ¿¢¸Øõ ¯Ã¡ö× Å¢¨º¸¨Çô ÒÈì¸½¢òÐ R,S ±ý Û Å¢¼í¸Ç¢ø B §¸¡Çò¾¢ø ¦ºÂüÀÎõ ±¾¢÷Å¢¨º¸¨Çì (reactions) ¸¡ñ¸.

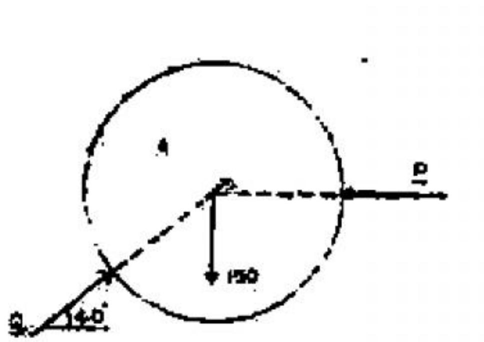
[§¸¡Çí¸Ç¢ý ±¨¼¸û, ¦¾¡Îõ ÒûÇ¢¸Ç¢ø «¨ÁÔõ ±¾¢÷Å¢¨º¸Ç¨ÉòÐõ ´Õ ¾Çò¾¢Ä¨ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ.]
À¼õ 1-38,1-39 ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø §¸¡Çõ B, §¸¡Çõ A ±ýÀ¨Å ¾É¢ôÀÎò¾ôÀðÎ. «ÅüÈ¢ý§Áø ¦ºÂüÀÎõ ÒÈÅ¢¨º¸ÙõÌÈ¢ì¸ôÀðÎûÇÉ. §¸¡Çõ A¨Â



À¼õ 1-38

«¨Á¾¢¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅìÌõ Å¢¨º¸û À¢ýÅÕÁ¡Ú:
(i) §¸¡Çõ Aý ±¨¼150¸¢.¸¢. þ¨Å¸û þÃñÎõ §¸¡Çõ Aý ¨ÁÂò¾¢ø ºó¾¢ì¸¢ýÈÉ.
(ii) ÒÈÅ¢¨º p-
(iii) ÒÈÅ¢¨º $Q,\measuredangle 40^\circ$

þíÌ Ó¾ø þÕÅ¢¨º¸û §¸¡Çõ Aý ¨ÁÂò¾¢ø ºó¾¢ôÀ¾¡ø, «Ð «¨Á¾¢¿¢¨ÄÂ¢ÄÕì¸, ãýÈ¡ÅÐ Å¢¨º Q×õ ¨ÁÂôÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºøÄ§Å ñÎõ. (À¼õ (1.39)



À¼õ 1-39

±É§Å $\boxed{\uparrow+}\sum F_{iy}=0$ ±ý ÀÐ,

$QSin40^\circ - 150 = 0$

$Q = \dfrac{150}{Sin40^\circ} = 233.5$ ¸¦.¸¦. ¬ Ìõ.

§¸¡Çõ B « ¨Á¾¦¿¦¨ ÄÂ¦ø ¨Å ì Ìõ Å¦¨º¸û À¦ý ÅÕÁ¡Ú:

(i) §¸¡Çõ Bý ±¨¼ 250 ¸¦.¸¦.$\downarrow$

(ii) ÒÈ Å¦¨º $R\rightarrow$

(iii) ÒÈ Å¦¨º $S\uparrow$

(iv) ÒÈ Å¦¨º $Q = 233.5\measuredangle 40^\circ$

þ¨Å¸Ç¨ ÉòÐõ §¸¡Çõ Bý ¨ÁÂôÒûÇ¦ ÅÆ¦§Â ¦ºø¸¦ýÈÉ.

±É§Å $\boxed{\uparrow+}\sum F_{iy}=0$ ±ý ÀÐ,

$S - 250 - QSin40^\circ = 0$

$S = 250 - QSin40^\circ$

$= 250 + 150$

=400¸¦.¸¦. ¬ Ìõ.

§ÁÖõ $\boxed{\overset{\rightarrow}{+}}\sum F_{iy}=0$ ±ý ÀÐ,

$R - Q\cos 40^\circ = 0$

$R = Q\cos 40^\circ$

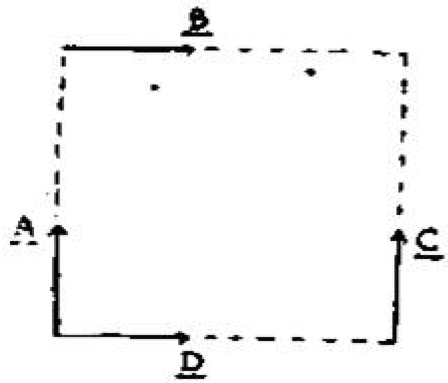
$= 233.5\cos 40^\circ$

=179¸¦.¸¦. ¬ Ìõ

Á¡¾¦¡¦ 1.25:

ºÁÁ¡¸ ¯ûÇ ¿¡ý Ì Å¦¨º¸û, ´Õ ºÐÃò¾¦ý À ì ¸í ¸Ç¦ø À¼õ 1.40ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ²üÀ Î ¸¦ýÈÉ. «ÅüÈ¦ý ¦¾¡ ÌÀÂý Å¦¨º¨Â Â¨ÃÂÚì¸.

þ í Ì Å¢¨º¸¨Ç ±ùÅ¢¾ò¾¢ø §º÷ò¾§À¡¾¢Öõ, ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º, ¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ Å¢¨º¸Ù ì Ì¡¢Â ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Ü Î¾Ä¡ Ìõ.



À¼õ 1-40

Å¢¨º¸û ´¦Å¡ýÈ¢ý ± ñ Á¾¢ô¨À a ±É ì¦¸¡ûÇ×õ.
þ í Ì ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º,

$$\underline{F} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D}$$

$$= (\underline{A} + \underline{D}) + (\underline{B} + \underline{C})$$

$$= 2(\underline{A} + \underline{D}) = 2(\underline{B} + \underline{C})$$ ¬ Ìõ.

$$\therefore F = |\underline{F}| = 2\sqrt{|\underline{A}|^2 + |\underline{D}|^2}$$

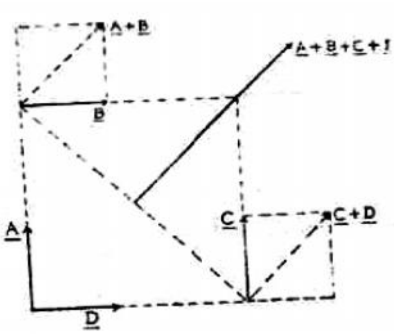
$$= 2\sqrt{a^2 + a^2}$$

$$= 2\sqrt{2a}$$

= 2.828a ¬ Ìõ.

$\underline{F}$ ý ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ð¨¼Ôõ, ¾¢¨º¨ÂÔõ À¢ýÅÕõ Ó¨È¸Ç¢ø ¦ÀÈÄ¡õ. Ó¾Ä¡Å¾¡¸ $\underline{A},\underline{B}$ ±ýÈ Å¢¨º¸¨Çî §º÷ì¸×õ. «ùÅ¡§È $\underline{C},\underline{D}$ ±ýÈ Å¢¨º¸¨ÇÔõ §º÷ì¸×õ.

A,B ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý $= \underline{A} + \underline{B}$ ¬ Ìõ. «ùÅ¡§È $\underline{C},\underline{D}$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º $= \underline{C} + \underline{D}$ ¬ Ìõ. ¬É¡ø $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C} + \underline{D}$ ±ýÀ¾¡ø $(\underline{A} + \underline{B}), (\underline{C} + \underline{D})$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º, þ¨½Å¸Ù ì Ì þ¨¼¦Â¢ø, ¿Î ¨ÁÂò¾¢ø,

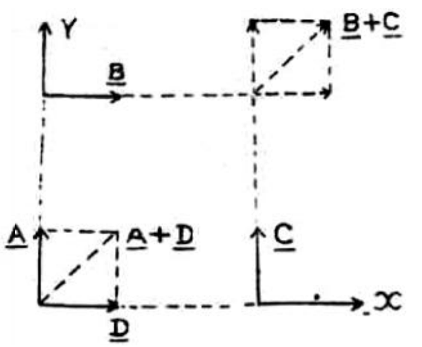


À¼õ 1-41

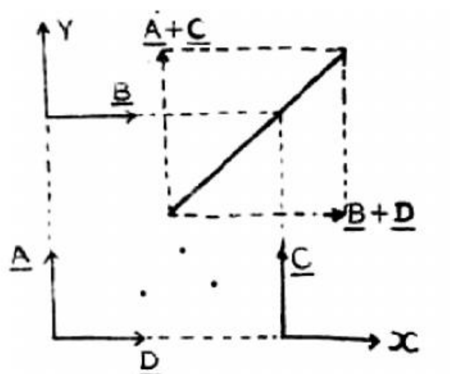
« ¨ Å ¸ û ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î ¸ Ù ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ ×õ, « ¨ Å ¸ Ù ¨ ¼Â ± ñ Á¾¢ôÒ¸Ç¢ý þÕÁ¼í ¸¡ ¸ ×õ À¼ò¾¢ø 1.41 ø ¸¡ðÊÂÀÊ « ¨ Á ¸¢ÈÐ.

þÃ ñ ¼¡Å¾¡ ¸ $(\underline{A},\underline{D});(\underline{B},\underline{C})$ ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È §º÷ì ¸ « ¨ Å ¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º ¸ û Ó ¨ È§Â $(\underline{A}+\underline{D}),(\underline{B}+\underline{C})$ ± ý Ú ¸ ¢ ý È É. §ÁÖõ $(\underline{A}+\underline{D}),(\underline{B}+\underline{C})$ ± ý À ¨ Å ¸ û ´ §Ã ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ð ¨ ¼ô ¦ÀüÈ¢ÕôÀ¾¡ø, « ¨ Å ¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º $(\underline{A}+\underline{B}+\underline{C}+\underline{D})$Ôõ À¼õ 1.42 ø ¸¡ðÊÂÀÊ «§¾ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀ Î ¸¢ÈÐ.

ã ýÈ¡Å¾¡ ¸ þ ¨ ½ Å¢ ¨ º ¸ û, $(\underline{A}+\underline{C})$ ì ¸ ¨ ÇÔõ $(\underline{B},\underline{D})$ ì ¸ ¨ ÇÔõ ´ ý Ú §º÷ì ¸ ×õ. « ¨ Å ¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º ¸ û Ó ¨ È§Â $(\underline{A}+\underline{C}),(\underline{B}+\underline{D})$ ± ý È¡ Ì õ. $(\underline{A}+\underline{C})$ ± ý È Å¢ ¨ º, $\underline{A},\underline{C}$ Å¢ ¨ º ¸ û ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢ø ¿ Î ¨ ÁÂò¾¢ø « ¨ ÁóÐõ, « ¨ Å ¸ Ù ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ ×õ, «¾ ý ± ñ Á¾¢ôÒ $\underline{A}$ «øÄÐ $\underline{C}$ Â¢ ý ± ñ Á¾¢ôÀ¢ ý þÃ ñ Î Á¼í ¸¡ ¸ ×õ þÕôÀ ¨ ¾ì ¸ ¡ ½ Ä¡õ. «ùÅ¡§È $(\underline{B}+\underline{D})$ ± ý È ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º, $\underline{B}$ «øÄÐ $\underline{D}$ Å¢ ¨ º ¨ Âô§À¡ø



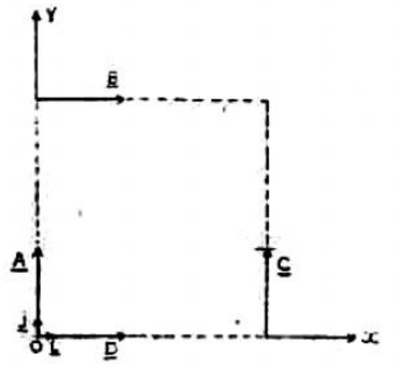
À¼õ 1.42



À¼õ 1.43

þÃ ñ Î Á¼í ¸¡ ¸ ×õ « ¨ Å ¸ Ù ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ þ ¨ ¼Â¢ø ¿ Î ¨ ÁÂò¾¢Öõ « ¨ Á ¸¢ÈÐ. ±É§Å $(A+C),(B+D)$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º, þ ¨ ½ ¸ Ã Å¢¾¢ôÀÊ À¼õ 1-43ø ¸¡ðÊÂÀÊ ¦ºÂüÀ Î õ.

þõ ã ýÚ Ó ¨ È ¸ÇÖõ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º $2\sqrt{2}a$ ± ý È ± ñ Á¾¢ô ¨ Àô ¦ÀüÚõ ºÐÃò¾¢ý ã ¨ ÄÅ¢ð¼ò ¨ ¾î ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡¼¡ ¸ ×õ ¦ÀüÈ¢ÕôÀ ¨ ¾ «È¢ÂÄ¡õ.



À¼õ 1-44

¬Âò¦¾¡¨Ä ÅÊÅ¸½¢¾ Ó¨ÈÂ¢ø ºÐÃò¾¢ý ¸¢¨¼, ¿¢¨Äô Àì¸í¸¨Ç x,y «îÍ¸Ç¡¸ì ¦¸¡ñÎ «¨Å¸Ç¢ý ¾¢¨º¸¨Ç $\underline{i}, \underline{j}$ ±ýÈ ´ÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢¸û Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. «ô¦À¡ØÐ, À¼õ 1.44 ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú.

$$\underline{A} = a\underline{j}$$
$$\underline{D} = a\underline{i}$$
$$\underline{B} = a\underline{i}$$
$$\underline{C} = a\underline{j}$$
$$F = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D} = 2a(\underline{i} + \underline{j})$$ ¬Ìõ.

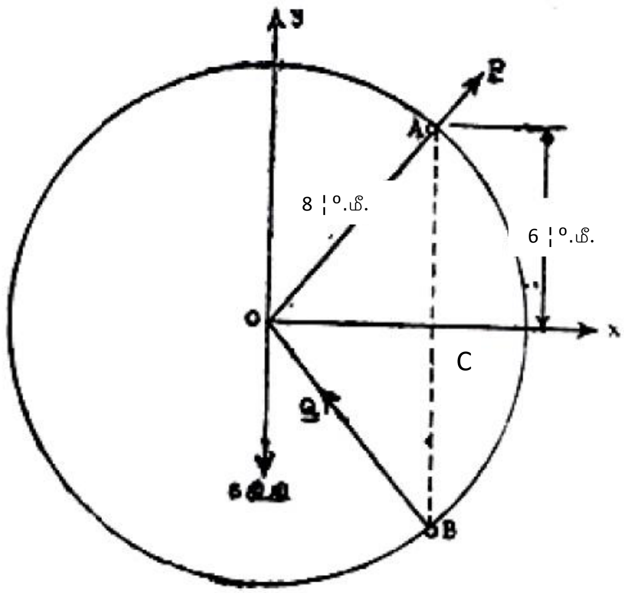
$$\therefore F = |\underline{F}| = |\underline{A}| + |\underline{B}| + |\underline{C}| + |\underline{D}|$$
$$= 2a|\underline{i} + \underline{j}|$$
$$= 2a\sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{2}a$$
$$\therefore F = 2\sqrt{2}a\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}\right)$$

Å¢¨ºÂ¢ý ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î x «îÍ¼ý ¯ ±ýÈ §¸¡½ò¨¾ «¨ÁìÌ¦ÁýÈ¡ø,
$\cos¯ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin¯ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ±ýÈ¡Ìõ.

$\therefore \tan¯ = 1, ¯ = \frac{®}{4} = 45^\circ$ ¬Ìõ.

Á¡¾¢¡¢ 1.26

6 ¸¢.¸¢. ±¨¼Ôû ÇÐõ 16 ¦º.ß. Å¢ð¼Óû ÇÐÁ¡É þÕõÒ Åð¼ Å¨ÇÂ¦Á¡ ýÚ ¾ý À¡¢¾¢Â¢Öû Ç A,B ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ç¢ø «¨ÁÔõ þÕ ÁÆÁÆôÀ¡É Ó¨É¸Ç¢ø ¦À¡Õò¾ôÀð Î ò ¦¾¡ í¸Å¢¼ôÀð Î ûÇÐ. A,B ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸û À¼õ 1.87ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ´Õ ¿¢¨Äì§¸¡ðÊø 12¦º.Á¦ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø «¨ÁÔ¦ÁÉ¢ø Ó¨É¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢ý ±¾¢÷¾¡ì¸ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.



À¼õ 1.45

þ í Ì Åð¼Å¨ÇÂõ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕôÀ¾ü Ì ¯¡¢Â Å¢¨º¸û À¢ý ÅÕÁ¡Ú;

(1) Å¨ÇÂò¾¢ý ±¨¼, ($\underline{W}$) Åð¼ ¨ÁÂÁõ OÅ¢ø ¸¦ú§¿¡ì¸¢î ¦ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ.

(2) Aø «¨ÁÔõ Ó¨É $\underline{P}$ ±ý Ûõ µ÷ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º¨Â Å¨ÇÂò¾¢ø OA ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀ Î òÐ¸¢ÈÐ.

(3) «ùÅ¡§È B¢ø «¨ÁÔõ Q ±ý Ûõ ´÷ ±¾¢÷ò¾¡ì¸ Å¢¨º BO ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ.

þõã ýÚ Å¢¨º¸Ùõ Oø ºó¾¢ì¸¢ýÈÉ.

Oø ¸¢¨¼Â¡¸ OX ±ý Ûõ §¸¡ð¨¼Ôõ, ¿¢¨ÄÂ¡¸ oy ±ý Ûõ §¸¡ð¨¼Ôõ ±Î ì¸.

$\angle AOC = \alpha$ ±É ì ¦¸¡û¸. $\sin\alpha = \frac{CA}{OA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ¬ Ìõ.

$\therefore \underline{W} = -6j$ ¸¢.¸¢

$P = +P\cos\alpha\, \underline{i} + P\sin\alpha\, j$

$\underline{Q} = -Q\cos\alpha\, i + Q\sin\alpha\, \underline{j}$

±ýÀ¾¡ø $\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow -6 + P\sin\alpha + Q\sin\alpha = 0$ ¬ Ìõ.

$(Q+P)\sin^{-} = 6$

$(Q + Q) \times \frac{3}{4} = 6$

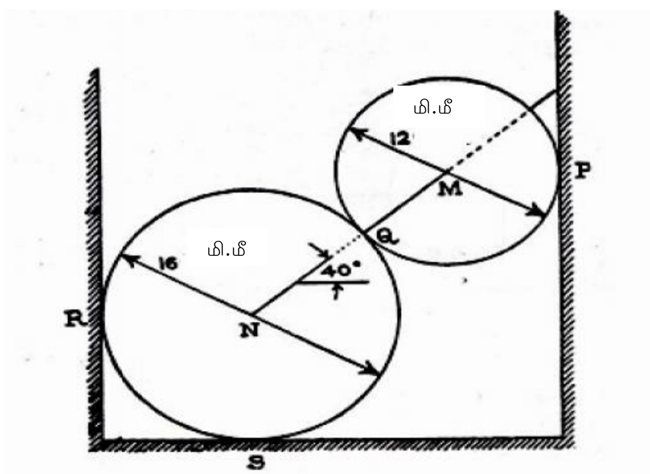
$2Q \times \frac{3}{4} = 6$

$Q = 4$ ¸¢.¸¢.

$P = +4$ ¸¢.¸¢.

Á¡¾¢¡¢ 1.27

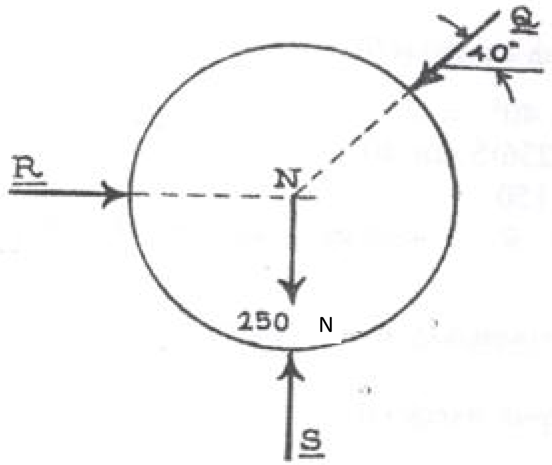
150 ¸¢.¸¢ ±¨¼Ô û Ç M ±ý Û õ ¯Õ ¨ ÇÔõ, 250 ¸¢.¸¢. ±¨¼Ô û Ç N ±ý Û õ ¯Õ ¨ ÇÔõ À¼õ 1.46ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¾¡ í ¸ôÀ Î ¸¢ ý ÈÉ. P, Q, R, S ±ý ÛÁ¢¼ í ¸ Ç¢ø « ¨ ÁÔõ ¦¾¡ Î ¨ ¸ô ÀÃôÒ¸ û ÁÆÁÆôÀ¡¸ þ Õ ôÀ¾¡¸¢ø, N ±ý Û õ ¯Õ ¨ ÇÂ¢ ý §Áø R, S ±ý ÛÁ¢¼ í ¸ Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ±¾¢÷¾¡ì ̧ Å¢¨ º¸ ¨ Çì ¸ ¡ ñ ¸.
¯Õ ¨ Ç¸ Ç¢ý ¦¾¡ ÌÀÂ ý ±¨¼, ±¾¢÷¾¡ì ̧ Å¢¨ º¸ û ±øÄ¡õ ´Õ¾Çò¾¢ø « ¨ ÁÅ¾¡ ̧ ì ¦ ̧ ¡ û ̧.



À¼õ 1-46

Ó¾ø ÅÆ¢ :

§¾¨ ÅôÀ Î õ Å¢¨ º ¸ û N ±É Û õ ¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ø, «ô¦À¡Õ ¨ Çò ¾É¢ôÀ Î ò¾¢ À¼õ 1.47ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂøÀ Î õ Å¢¨ º ¸ ¨ Çì Ì È¢ì ¸ ×õ. «ô¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢¨ º ¸ û ´Õ Ò û Ç¢ Å Æ¢§Â ¦ºøÅ¾¡ø, þÃ ñ Î ¾É¢ò¾ ºÁ¿¢ ¨ Ä Î ºÁýÀ¡ Î ¸ ¨ Çò¾¡ ý Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ÓÊÔõ.



À¼õ 1-47

¬ É¡ø N ø « ¨ ÁÔõ Å¨ ºò¦¾¡ Ì ¾Âø ã ý Ú ¦¾¡Â¡¾ ¸ ½Â í ¸ û (Q,R,S) ¯ ûÇ É. ±É§Å þÅü¨È¦ÂøÄ¡õ N ø ¯ ûÇ « ¨ Áô¨ Àì ¦¸¡ ñ Î Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ÓÊÂ¡Ð.

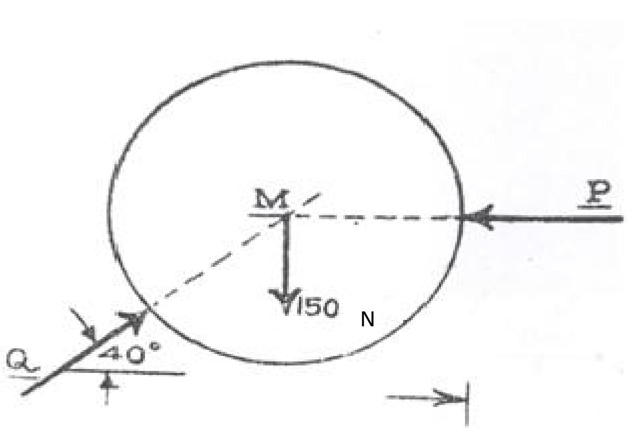
¬ ¸§Å M ±ý Û õ ¦À¡ÕÇ¢ÉÐ ¾É¢ôÀ Î ò¾¢Â « ¨ Áô¨ Àô À¼õ 1.48 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ± Î ì ¸§Å ñ Î õ.

þ í Ì õ ¦ºÂüÀ Î õ (P,Q,150) ±ý Û õ Å¢ ¨ º ¸ û ´ Õ ¾Çò¾¢§Ä ´ ÕÁû Ç¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º ¸ Ç¡ Ì õ.

P,Q ±ý Û õ ¦¾¡Â¡ì ¸ ½Â í ¸ ¨ Ç þÕ ¾É¢ò¾ º¡÷ÀüÈ ºÁ¢ ¨ Ä ºÁý À¡ Î ¸ ¨ Çì ¦¸¡ ñ Î Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ÓÊÔõ.

±É§Å M ±ý Û õ ¦À¡Õû ºÁ¢ ¨ ÄÂ¢ÄÕôÀ¾¡ø.(À¼õ 1.48)

$$\boxed{\rightarrow +}\sum F_{iy} = 0$$



À¼õ 1-48

±ý Û õ ºÁý À¡ Î ,

$$Q\sin 40° - 150 = O$$

« øÄÐ $Q = 236.5$ ¿¢.

$\therefore Q = 236.5$ ¿¢ ($40°$;)

M ý §Áø ¦ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ

N.
± ý Û õ ¦À¡Õ Ù ì Ì ¯¡¢Â ºÁ¿¢ ¨ Ä « ¨ ÁôÀ¢ø

$\boxed{\uparrow +}\sum F_{iy} = 0$

$S - 250 - Q\sin 40° = 0$

$S = 250 + 236.5\sin 40°$

$= 250 + 150$

$\therefore S = 400$¿¢$\uparrow$ ± ý Û õ Å¢ ¨ º N ± ý Û õ ¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀ Î ¸¢ÈÐ
§ÁÖõ N ± ý Û õ ¦À¡Õ Ù ì Ì ¡¢Â « ¨ ÁôÀ¢ø

$\boxed{\begin{matrix}\rightarrow \\ +\end{matrix}}\sum F_{ix} = 0$

± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î ,

$R - Q\cos 40° = 0$

« ¾¡ÅÐ $R = 236.5\cos 40° = 179$¿¢.

« ¾¡ÅÐ $R = 179$¿¢.$\rightarrow$ ± ý Û õ Å¢ ¨ º N ± ý Û õ ¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀ Î ¸¢ÈÐ

þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÅÆ¢ ;

þÕ¦À¡Õû¸ ¨ ÇÔõ ´ÕÁ¢òÐ ± Î ì ¸×õ. « ô¦À¡ØÐ Q Å¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º ¯ûÇ¼í ¸¢Â Å¢ ¨ ºÂ¡ Ì õ.

þ ùÅ ¨ ÁôÒ ì Ì

$\boxed{\uparrow +}\sum F_{iy} = 0$ ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î ,

$S - 150 - 250 = 0$

« ¾¡ÅÐ $S = 400$¿¢. ¬ Ì õ.

$\boxed{\begin{matrix}\rightarrow \\ +\end{matrix}}\sum F_{ix} = 0$ ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î

$R = P$ ± ý È¡ Ì õ.

M ± ý Û õ ¦À¡Õ ¨ Çò ¾É¢ôÀ Î òÐ ¸.

« ô¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º¸ û ´ÕÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂøÀð Î , ³ « ¨ Á¾¢ ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø ¨ Å ì ¸¢ ýÈÉ. ±É§Å þÄ¡Á¢Â¢ ý Å¢¾¢ôÀÊ,

$\dfrac{P}{\sin 130} = \dfrac{Q}{\sin 90} = \dfrac{150}{\sin 140}$

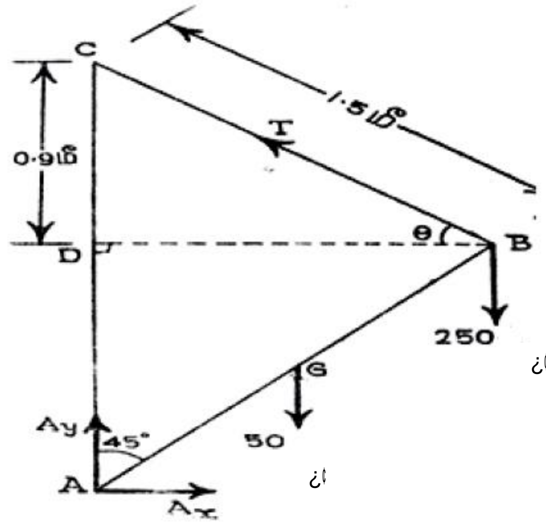
$\therefore P = \dfrac{150\sin 50}{\sin 40} = 179$ ¿¢.

$\therefore R = P = 179$¿¢. ± ý È¡ Ì õ.

Á¡¾¢¡¢ 1.27

50 ¿¢. ± ¨ ¼ÔûÇ ´§ÃºÃ¡É ¯ò¾Ãò¾¢ ý ¸¦úÓ ¨ ÉÂ¡ÉÐ ´Õ ¿¢ ¨ Äì Ì òÐ Ì ÅÕ¼ ý $45°$ § ¸¡ ½ò ¨ ¾ò ¾¡ í Ì Á¡Ú À¢ ¨ ½ì ¸ôÀð Î ûÇÐ. « ¾ ý §Áø Ó ¨ ÉÂ¡ÉÐ 1.5 Á£ð¼÷ ´ ¡¢ ¨ ÆÂ¢É¡ø ¸ð¼ôÀð Î , §ÁøÓ ¨ É ¨ Â Å¢¼ 0.9 Á£ð¼÷ « ¾¢ ¸ÓûÇ Ì òÐ ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Åì ¸ ¡ ñ ¼ ÍÅ¡¢ø « ¨ ÁÔõ ÒûÇ¢Â¢ø þ ¨ ½ì ¸ôÀð Î ûÇÐ. 250¿¢ ± ¨ ¼ÔûÇ ´Õ ÀÙ ¯ò¾Ãò¾¢ ý §ÁøÓ ¨ É¢Ä¢ÕóÐ ¦¾¡í ¸ Å¢¼ôÀð Î ûÇÐ ±É¢ø, þ ¨ ÆÂ¢ø ¦ºøÀ Î õ þØÅ¢ ¨ º, À¢ ¨ ½ÂÄ¢ø ¦ºøÀ Î õ ±¾¢÷¾¡ì ì ¸ò ¨ ¾Ôõ ¸ ¡ ñ ¸.

¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ ¿¢Àó¾¨É¸Ù ìÌ ²üÈ¾¡É «¨ÁôÒ À¼õ 1.49ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÐ.
¯ò¾Ãò ¨¾î ºÁ¿¢¨ ÄÂ¢ø ¨ÅôÀ¾ü Ì¡¢Â Å¢¨º¸û À¢ý ÅÕÁ¡Ú:



À¼õ 1-49

(1) G Â¢ø «¾ý ±¨¼, 50 ¿¢.↓ AG=GB
(2) A Â¢ø $A_{x\rightarrow}, A_{y\uparrow}$ ±ýÛõ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º¸û.
(3) B Â¢ø 250¿¢.↓
(4) BC Â¢ø ¯ûÇ T ±ýÛõ þØÅ¢¨º.
þ¨Å¸Ç¨ÉòÐõ ´Õ¾Çò¾¢§Ä ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸Ç¡Ìõ.

¯ò¾Ãò¾¢ý ÁÐ ¾¡ìÌ¸¢ýÈ Å¢¨º¸Ù¨¼Â ¸¢¨¼Áð¼ìÜÚ¸¨ÇÔõ, ¿¢¨ÄìÌòÐìÜÚ¸¨ÇÔõ âîº¢Âò¾¢üÌî ºÁôÀÎòÐ¸.

«ô¦À¡ØÐ,

$$A_x - T\cos¯ = 0, ¯ = DBC \quad (1)$$

$$A_y + T\sin¯ - 50 - 250 = 0 \quad (2)$$

Missing
A ÀüÈ¢ Å¢¨º¸Ç¢ý ¾¢Õô¾¢Èý¸¨Ç ±Îò¾ «¾ý ÌÈ¢Â¢Âø Üðÿò ¦¾¡¨¸¨Âô âîº¢Âò¾¢üÌî ºÁôÀÎòÐ¸.
«ô¦À¡ØÐ,

$$\triangle CDB, \sin¯ = \frac{DC}{BC} = \frac{0.9}{1.5} = \frac{3}{5}$$

$$\cos¯ = \frac{DB}{BC} = \frac{1.2}{1.5} = \frac{4}{5}$$

$\triangle ADB$ Â¢ø $AD = DB = 1.2$

$$\therefore AB = \sqrt{(1.2)^2 + (1.2)^2} = 1.2 \times \sqrt{2}$$

(3) ÅÐ ºÁýÀ¡ð¨¼î ÍÕìÌ¸.

$$T\times1.2\times\sqrt{2}\{\sin45^\circ\cos¯+\cos45^\circ\sin¯\}$$
$$=50\times0.6\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+250\times1.2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$T\times1.2\times\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{5}\right\}=30+300$$
$$1.68T=330$$
$$T=\frac{330}{1.68}$$
$=196.42$ ¿¢.

(1)ÅÐ ºÁ ý À¡ ðÊÄ¢ÕóÐ

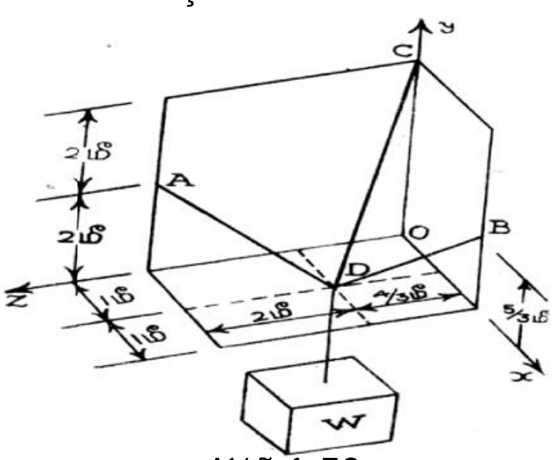
$$A_x=T\cos¯=196.42\times\frac{4}{5}$$
$=157.136$ ¿¢.
$$A_y=300-T\sin¯$$
$$=300-196.42\times\frac{3}{5}$$
$$=300-117.85$$
$=182.15$ ¿¢.

±É§Å $T=196$ ¿¢. $A_x=157$ ¿¢. $A_y=182;$ ¿¢.

Á¡¾¢¡¢ 1.28.

500 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ ÀÙ ´ýÚ ã ýÚ ÅÖÅ¡É ¸õÀ¢¸Ç¡ø À¼õ 1.50ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¾¡í¸ôÀÎ ¸¢ýÈÐ. BD ±ý Ûõ ¸õÀ¢Â¢ø D ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø ¦ºÂøÀÎõ þØÅ¢¨º¨Â ì ¸¡ñ ¸.

þ í Ì ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º ¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ D ±ý Ûõ ÒûÇ¢ÅÆ¢§Â ¦ºýÚ, «ò¦¾¡ Ì ¾¢ «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕì ¸¢ÈÐ.



A¼õ 1-50

DA, DB, DC ±ý Ûõ þ¨Æ¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ þØÅ¢¨º¸¨Ç T_A, T_B, T_C ±É ì ¦¸¡û¸. D-Â¢ø ¦ºí Ìò¾¡¸ì ¸¡úÓ¸¡ì ¸¢ $W=500$ ¸¢.¸¢. ±¨¼ ¦ºÂøÀÎÅ¾¡ø,
$\underline{W}=-500\,\underline{j}$ ¸¢.¸¢ ¬Ìõ.

O-¨Åò ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¡¸ ±ÎòÐ A, B, C, D ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ç¢ý «îÍò

¦¾¡ ¨ Ä× ¸ ¨ Ç Å ¨ ÃÂÚ ì ¸. «ô¦À¡ØÐ

$A(0,2,\frac{10}{3})$.; Á $B(2,\frac{5}{3},0)$.; Á $C(0,4,0)$.; Á $D(1,0,\frac{4}{3})$; Á

$$\underline{DA} = \underline{OA} - \underline{OD} = -\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$$

$$= 3(-\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}\underline{j} + \frac{2}{3}\underline{k})$$

$$\underline{DB} = \underline{OB} - \underline{OD} = (i + \frac{5}{3}\underline{j} - \frac{4}{3}\underline{k})$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt{2}\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j} - \frac{4}{5\sqrt{2}}\underline{k}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{3}\left(\frac{3}{7.07}\underline{i} + \frac{5}{7.07}\underline{j} - \frac{4}{7.07}\underline{k}\right)$$

$$\underline{DC} = \underline{OC} - \underline{OD} = -\underline{i} + 4\underline{j} - \frac{4}{3}\underline{k}$$

$$= \frac{13}{3}\left(-\frac{3}{13}\underline{i} + \frac{12}{13}\underline{j} - \frac{4}{13}\underline{k}\right)$$

$$\therefore \underline{T_A} = \frac{T_A}{3}(-\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k})$$ ¸. ¸

$$\underline{T_B} = \frac{T_B}{7.07}(3\underline{i} + 5\underline{j} - 4\underline{k})$$ ¸. ¸.

$$\underline{T_C} = \frac{T_C}{13}(-3\underline{i} + 12\underline{j} - 4\underline{k})$$ ¸. ¸.

$$\underline{W} = -500\underline{j}$$ ¸. ¸.

$$\underline{R} = \underline{T_A} + \underline{T_B} + \underline{T_C} + \underline{W}$$

$$= \frac{T_A}{3}(-\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}) + \frac{T_B}{7.07}(3\underline{i} + 5\underline{j} - 4\underline{k}) + \frac{T_C}{13}(-3\underline{i} + 12\underline{j} - 4\underline{k}) - 500\underline{j}$$

$$= \left(\frac{T_A}{3} + \frac{3T_B}{7.07} - \frac{3T_C}{13}\right)\underline{i} + \left(\frac{2T_A}{3} + \frac{T_B}{7.07} + \frac{Tc}{13} - 500\right)\underline{j} + \left(\frac{2T_A}{3}\,\frac{4T_B}{7.07}\,\frac{4T_C}{13}\right)\underline{k}$$

´Õ ÒûÇÂø ¦ºÂøÀ Î õ Å ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾ ºÁ¿ ¨ ÄÂø þÕ ì ¸

- $\underline{R} = 0$ «øÄÐ $R_X = 0, R_y = 0, R_Z = 0;$ ¬ Ì õ.

±É§Å $-\frac{T_A}{3} + \frac{3T_B}{7.07} - \frac{3T_c}{13} = 0;$

$$\frac{2T_A}{3} + \frac{5T_B}{7.07} - \frac{12T_c}{13} = 500$$

$$\frac{2T_A}{3} + \frac{4T_B}{7.07} - \frac{4T_c}{13} = 0$$

þ í Ì ã ýÚ ¦¾¡Â¡ ì ¸ ½Â í ¸ û $(T_{A,}T_B,T_C)$ ¯ ûÇ É. «ÅüÈü§ ¸ üÈ¡ü§À¡ø ã ýÚ ºÁ ýÀ¡ Î ¸ û ¸ ¨ ¼òÐûÇ É. þî ºÁ ýÀ¡ Î ¸ Ù ì Ì ò ¾÷× ¸ ¡ ½ ,

$T_A = 295$ ¸. ¸. $T_B = 290$ ¸, ¸ $T_C = 106.5$ ¸, ¸

±É§Å $\underline{T_B} = 290\left(\frac{3}{7.07}\underline{i} + \frac{5}{7.07}\underline{j} - \frac{4}{7.07}\underline{k}\right)$ ¸. ¸

Áü¦È¡Õ ÅÆ:

DB ±ýÛ õ ¸ õÀÂø ¦ºÂøÀ Î õ þØÅ ¨ º ´ ýÚ¾¡ý §¾ ¨ ÅôÀ Î ¸ÈÐ. ±É§Å ¾ Ì ó¾ ÒûÇ «øÄÐ §¿÷§ ¸ ¡ Î ÀüÈò ¾ÕôÒ¾È ¨ É ± Î òÐ ±Ç¾¡ ¸ $\underline{T_B}$

³ ì ¸¡½ ÓÊÔõ, T_A, T_c ±ý Ûõ Å¢¨º¸û AC ±ý Ûõ §¸¡ð¨¼ ¦Åð Î ¸¢ýÈÉ. ¬¾Ä¡ø AC ±ý Ûõ §¸¡ Î ÀüÈ¢ Å¢¨ºò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ý ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ±ÎòÐ « ¨¾ô â î º¢Âò¾¢ü Ì î ºÁôÀ Î òÐ¸.

$M_{AC} = n_{AC}.(r_{AD} \wedge \sum F)$ ±ýÀÐ AC Â¢ø « ¨ÁÔõ µÃÄ Ì ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ì õ.

$$\therefore \underline{n_{AC}} = \frac{2\underline{j} - \frac{10}{3}\underline{k}}{\sqrt{\frac{136}{9}}} = \frac{6\underline{j} - 10\underline{k}}{\sqrt{136}}$$

$$\underline{r_{AD}} = \underline{i} - 2\underline{j} - 2\underline{k}$$

$$\sum \underline{F} = \underline{T_B} + \underline{W}$$

$$= \frac{3T_B}{7.07}\underline{i} + \frac{5T_B}{7.07}\underline{j} - \frac{4T_B}{7.07}\underline{k} - 500\underline{j}$$

$$= \frac{3T_B}{7.07}\underline{i} + \left(\frac{5T_B}{7.07} - 500\right)\underline{j} - \frac{4T_B}{7.07}k$$

$$\therefore M_{\underline{AC}} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -10 \\ 1 & -2 & -2 \\ \frac{3T_B}{7.07} & \left(\frac{5T_B}{7.07} - 500\right) & \frac{-4T_B}{7.07} \end{vmatrix} = 0$$

« ½¢ì§¸¡¨Å¨Â Å¢¡¢×À Î ò¾

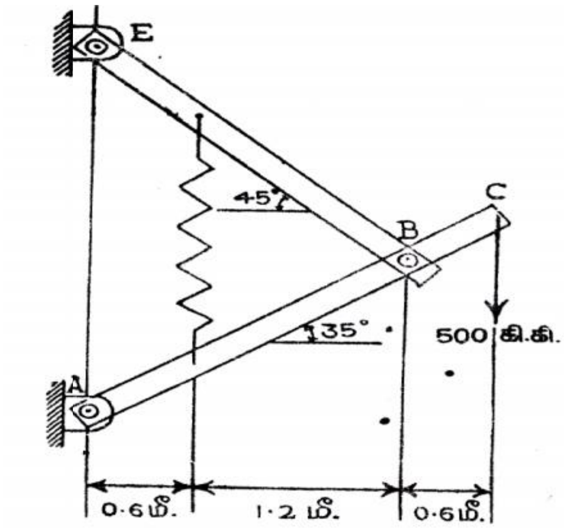
$$6\left(\frac{4T_B}{7.07}\frac{6T_B}{7.07}\right) - 10\left(\frac{5T_B}{7.07} - 500 + \frac{6T_B}{7.07}\right) = 0$$

« ¾¡ÅÐ $T_B = 290;$ ¸¢.¸¢. ¬ Ì õ.

$$\therefore \underline{T_B} = \frac{290}{7.07}\left(3\underline{i} + 5\underline{j} - 4\underline{k}\right)$$ ¸¢.¸¢. ¬ Ì õ.

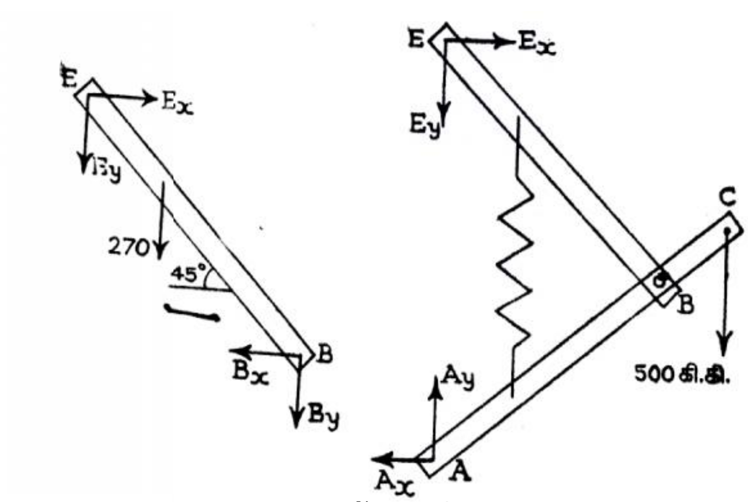
Á¡¾¢¡¢ 1.29

ºð¼í¸û ´ý§È¡¦¼¡ýÚ À¢¨½ì Ì ÁÌ¼ò¾¢ø ° º¢Ó¨Éô ¦À¡Õò¾ « ¨Áô¨Àô ¦ÀüÈ ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ø À¼õ 1.51ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú) ´Õ ¾Õ Ì íÕÇ¢ø ¦ºÂøÀ Î õ þØÅ¢¨º 270 ¸¢.¸¢ ±É ì ¦¸¡ Î ì¸ôÀð Î ûÇÐ. ºð¼í¸û ¦ÁøÄ¢ÂÉÅ¡¸×õ, ¦¾¡ Î ¨¸ôÀÃôÒ¸Ç¢ø, Ã¡ö×Å¢¨º¸û ÒÈì¸½¢ì¸ô ÀÎ ûÇÉÅ¡¸×õ ¦¸¡ñ Î, EB ±ýÛõ ºð¼À Ì ¾¢¸Ç¢ø B-¢ø ¦ºÂøÀ Î õ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨ºÂ¢ý ¸¢¨¼, ¿¢¨ÄôÀ¸¢÷×¸¨Ç ì ¸¡ñ¸.



À¼õ 1-51

EB ±ýÛõ ºð¼ò¾¢ø, E ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø ¸¢¨¼Â¡¸×õ. ¿¢¨ÄÂ¡¸×õ ¦ºÂøÀÎõ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º¸û §¾¨ÅôÀÎÅ¾¡ø, «îºð¼ò¨¾ò ¾É¢ôÀÎò¾¢ Å¨ÃÀ¼ò¨¾ Å¨Ã¸. «Ð À¼õ 1.52ø ¸¡ð¼ôÀðÊÕì¸¢ýÈÐ.



À¼õ 1-52

þ¾¢ø 4 ¦¾¡¢Â¡ì ¸½¢Âí¸û ¯Ç, ¬É¡ø «îºð¼ò¾¢ø ºÁ¿¢¨Äì ¸¡¢Â ºÁ¿¢¨Äî ºÁýÀ¡Î¸û ãýÚ ÁðÎ§Á ¯ñÎ.

±É§Å ÓØô ¦À¡Õð¦¼¡Ì¾¢ìÌõ ¯¸ó¾¾¡É Å¨ÃÀ¼õ Å¨ÃóÐ (À¼õ 1.52 ø ¯ûÇÅ¡Ú) «ò¦¾¡Ì¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ø þÕôÀ¾üÌ ¯¡¢Â ºÁ¿¢¨Äî ºÁýÀ¡Î¸¨ÇÔõ Å¨ÃÂÚì¸ §Å ñÊÅÕ¸¢ÈÐ. þí Ìõ 4 ¦¾¡¢Â¡ì¸ ½í¸û ¯ûÇÉ. ¬É¡ø þí Ìõ ãýÚ ºÁ¿¢¨Äî ºÁýÀ¡Î¸û ÁðÎ§Á ¯ûÇÉ.

¬¸§Å þÕ ¾É¢ò¾É¢Â¡¸ô À¢¡¢ò¾ Å¨ÃÀ¼ «¨ÁôÒì¸Ç¢ø þÚ¾¢Â¡¸ 6 ¦¾¡¢Â¡ì¸½í¸Ùõ, 6 ºÁ¿¢¨Äî ºÁýÀ¡Î¸Ùõ ¯ûÇÉ. ±É§Å ¦¾¡¢Â¡ì ¸½í¸¨Ç Á¾¢ôÒì¸¨Ç¸ ¡½ ÓÊÔõ.

ÓØô ¦À¡Õð¦¼¡Ì¾¢ì Ìõ A ÀüÈ¢ Å¢¨º Ù¨¼¼Â ¾¢Õôò¾¢Èý ¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢ø Üð¼Ìò¦¾¡¨¸ ¨Âô âîº¢Âò¾¢üÌî ºÁôÀÎòÐ¸.

$$-E_X\left[1.8\tan 35^{\circ} + 1.8\tan 45^{\circ}\right] - 500\times(2.4) = 0$$

$$E_X = -392.11$$

EB ±ý Ûõ ºð¼ò¾¦ø ¦ºÂøÀÎ ¨Á Å¦¨ºò¦¾¡ Ì¾¦ì Ì, Å¦¨º¸ ¨Çì ¸¦¨¼Â¡¸ô À¦¡¦òÐ «ÅüÈ¦ý ÌÈ¦Â¦Âø Ü Î¾¨Äô âîº¦Âò¾¦ü Ìî ºÁôÀÎòÐ¸.

«ô¦À¡ØÐ $E_X - B_X = 0$

«øÄÐ $B_X = E_X = -392.11$ ¸¦.¸¦.

EB Â¦ø ¯ûÇ Å¦¨ºò ¦¾¡ Ì¾¦ì Ì E ÀüÈ¦Â ¾¦ÕôÒ¾¦ÈÉ¦ý ÌÈ¦Â¦Âø Üð Îò ¦¾¡ ¨¸ ¨Âô âîº¦Âò¾¦ü Ìî ºÁôÀÎòÐ¸.

«À¦À¡ØÐ. $-B_y(2.4) - B_x(1.8\tan 45^{\circ}) - 270(.6) = 0$

$2.4B_y = +B_x(1.8) - 162$

$= +392\times 1.8 - 162$

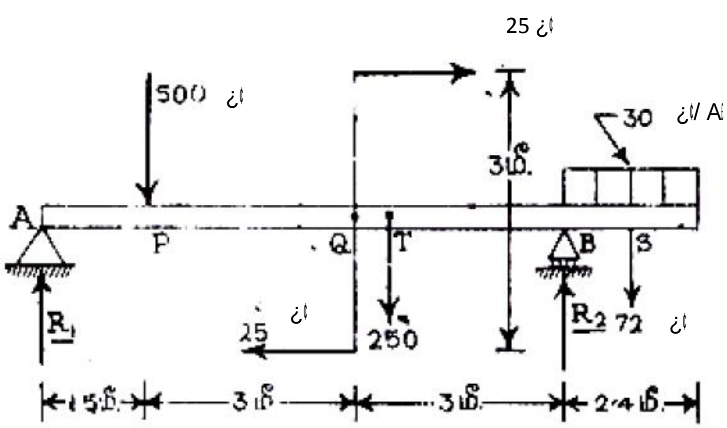
$B_y = 226.58$ ¸¦,¸¦

±É§Å $B_x = 392.11$ ¸¦.¸¦ $\rightarrow$

$B_y = 226.58$ ¸¦.¸¦ $\downarrow$

±ý Ûõ ±¾¦÷¾¡ì ¸ Å¦¨º¸û ¦ºÂøÀÎ ¸¦ýÈÉ.

Á¡¾¦¡¦ 1.30 250¸¦.¸¦ ±¨¼Ôûç ´Õ ¯ò¾¦Ãõ À¼õ 1.53ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú AB ±É ÛÁ¦¼í¸Ç¦ø ¦ºÂøÀÎõ ¬¾¡ÃÅ¦¨º¸Ç¡ø ¾¡í¸ôÀÎ¸¦ýÈÐ. «ùÅ¦¨º¸¨Çì ¸¡ñ¸.



A¼õ 1-53

¯ò¾Ãò ¨¾î ºÁ¿¦¨ÄÂ¦ø ¨Åò¾¦Õì Ìõ Å¦¨ºò¦¾¡ Ì¾Â¡ÉÐ,

(1) $\underline{R}_1 = R_1\underline{j}$ ±ý Ûõ Å¦¨º $A(0,0)$ Á¦ ±ýÈ þ¼ò¾¦ø ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ.

(2) $\underline{R}_2 = R_2\underline{j}$ ±ý Ûõ Å¦¨º $B(7.5,0)$ Á¦ ±ýÈ þ¼ò¾¦ø ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ.

(3) $\underline{F}_1 = -500\underline{j}$ ±ý Ûõ Å¦¨º $P(1.5,0)$ Á¦ ±ýÈ þ¼ò¾¦ø ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ.

(4) $\underline{F}_2 = -72\underline{j}$ ±ý Ûõ Å¦¨º $S(8.7,0)$ Á¦ ±ýÈ þ¼ò¾¦Ä ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ.
(5) $\underline{F}_3 = -250\underline{j}$ ±ý Ûõ Å¦¨º $T(4.95,0)$ Á¦ ±ýÈ þ¼ò¾¦ø ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ
(6) $\underline{C} = -75\underline{k}$ ±ý Ûõ Å¦¨º Á¦±ý Ûõ ÍÆÄ¦¨ ½Òò ¾¦ÈÛõ ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ.

$\underline{R} = \sum \underline{F}_i = 0$ ±ý Ûõ ºÁ¿¦¨ÄÎ ºÁýÀ¡Î

$R_1 + R_2 - 500 - 72 - 250 = 0$ ¬Ìõ, $\therefore R_1 + R_2 = 822$

A ÀüÈ¦ Å¦¨º¸ Ù ¨¼Â ¾¦ÕôÒ¾¦Èý¸Ç¦ý Ü Î¾ø

$$= (7.5\underline{i} \wedge R_2\underline{j}) + (1.5\underline{i} \wedge -500\underline{j}) + (8.7\underline{i} \wedge -72\underline{j})$$
$$+(4.95\underline{i} \wedge -250\underline{j});$$
$$= 7.5R_2\underline{k} - 2613.9\underline{k}$$

±É§Å A ÀüÈ¦ «¨ÁÔõ ¾¦ÕôÒò ¾¦Èý¸Ç¦ý ÌÈ¦Â¦Âø Üð Îò ¦¾¡¨¸¨Âô âîº¦Âò¾¦ü Ìî ºÁôÀÎòÐ¸.

«ô¦À¡ØÐ, $7.5R_2\underline{k} - 2613.9\underline{k} - 75\underline{k} = 0$

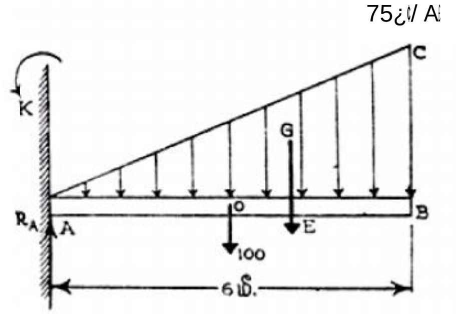
$$7.5R_2 = 1451.4$$
$$R_2 = 358.52 \text{ ¿¦.}$$
$$\therefore R_1 = 822 - 358.52$$
$$= 463.48 \text{ ¿¦.}$$

±É§Å A,B ±ý Ûõ ÒûÇ¦¸Ç¦ø ¦ºÂøÀÎõ ±¾¦÷¾¡ì¸ Å¦¨º¸û Ó¨È§Â

$R_1 = 463.48$ ¿¦.

$R_2 = 358.52$ ¿¦.

Á¡¾¦¡¦ 1.31. A ±ý ÛÁ¦¼ò¾¦ø À¼õ 1.54ø ¸¡ðÊÂ ºÃ¡É ¯ò¾Ãò¾¦ý ÌÚì Ì ¦Åð ÎôÀÌ ¾¦Â¦ø ¦ºÖò¾ôÀÎõ Å¦¨ºò¦¾¡Ì ¾¦Â¦ý «¨Áô¨Àì ¸¡ ñ ¸. ¯ò¾Ãò¾¦ý ±¨¼¨Â 100 ¿¦. ±É ì¦¸¡û¸.



À¼õ 1-54
¿¦

ºÃ¡É ¯ò¾Ãò¨¾Î ºÁ¿¦¨ÄÂ¦ø ¨Åò¾¦ÕÌì Ìõ Å¦¨º¸Ç¦ý ¦¾¡Ì¾¦

(1) «¾ý ±¨¼ = 100 ¿¦.Á¦ ,↓, 0 ±ý Ûõ ÒûÇ¦Â¦ø (AO =OB =3Á¦)

(2) ´§Ã º¦Ã¡¸ Á¡Úõ Å¢¨º = 75 ¿¢/Á(¯ò¾¢Ãò¾¢ý ¿¦ÇÅ¡ðÊø)

= $\frac{1}{2}\times 75\times 6=225$ ¸¢.¸¢ Å¢¨º G ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø ¦ºÂøÀÎ Å¾¡ Ì õ.

(G ±ý ÀÐ ΔABC , ÒÅ¢Â÷ôÒô Ò û Ç¢Â¡ Ì õ.)

(3) AÂ¢ø $R_A\uparrow$ ±ý É õ ¾¡ì ¸ Å¢¨ºÔõ $K\nearrow$ ±ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢È Û õ ¬ Ì õ. ¯ò¾Ãò¾¢ý ¿¢¨Äì Ì òÐ ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀÎ õ Å¢¨º¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Ü Î ¾ ¨Äô â î º¢Âò¾¢ü Ì î ºÁôÀÎ òÐ ¸.

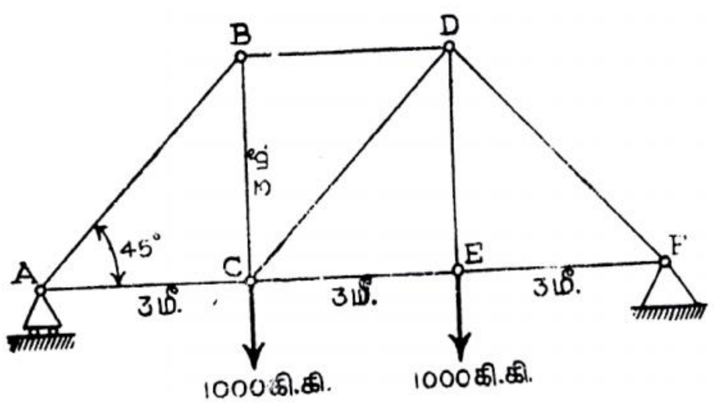
$R_A=100-225=0\ \therefore R_A=325$ ¿¢.

A ±ý Û õ Ò û Ç¢ ÀüÈ¢ Å¢¨ºò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÉ¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Ü Î ¾ ¨Äô â î º¢Âò¾¢ü Ì î ºÁôÀÎ òÐ ¸.

$K=100\times 3-225\times 4=0$

$K=300+900$=1200 ¿¢.Á.

Á¡¾¢¡¢ 1.32 À¼õ 1.55ø ±Ç¢Â¦¾¡Õ ¾Ç¯ò¾Ãò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ý «¨ÁôÒ ¸¡ð¼ôÀð Î û ÇÐ. C,E ±ýÈ



À¼õ 1-55

þ¼í ¸Ç¢ø Ó ¨È§Â 1000 ¸¢.¸¢ ± ¨¼Ô û Ç À Ù × ¸ û ¦ºÂüÀÎ ¸¢ýÈÉ. ¯ò¾Ãò ¦¾¡ Ì ¾¢ÂÄ ¨ÁÔõ ¯ÚôÒ ¸ û ´ ù ¦Å¡ ýÈ¢Öõ ¦ºÂüÀÎ õ Å¢¨º, þØÅ¢¨º «øÄÐ þÚì ¸Å¢¨º ±É ì ¦¸¡ ñ Î «¾ý ± ñ Á¾¢ô ¨À ì ¸¡ ñ ¸.

(¦¾¡ Ì ¾¢Â¢Ä ¨ÁÔõ ¯ò¾Ã í ¸Ç¢ý ±¨¼ ¸ û ÒÈì ¸½¢ì ¸ôÀð Î û Ç¾¡ ¸ì ¦¸¡ û ¸.)
þ í Ì ¯ò¾Ãò ¦¾¡ Ì ¾¢ Âî º¡¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ Åò¾¢Õ ì Ì õ Å¢¨º¸ û À¢ý ÅÕÁ¡Ú.

(i) A Â¢ø $R_1\uparrow$ ±ý Û õ ±¾¢÷¾¡ì ¸ Å¢¨º

(ii) Fø $R_2\uparrow$ ±ý Û õ ±¾¢÷¾¡ì ¸ Å¢¨º

(iii) CÂ¢ø 1000↓ ¸¢.¸¢ ±¨¼Ô û Ç À Ù ×

(iv) DÂ¢ø 1000↓ ¸¢.¸¢ ±¨¼Ô û Ç À Ù ×

±É§Å , $\boxed{\uparrow +}\sum F_{iy}=0$ ±ýÈ ºÁýÀ¡Î $R_1+R_2-2000=0$ ¬ Ì õ.

¯ò¾Ãò ¦¾¡ Ì ¾¢ ¦ºù¦Å¡Ø í Ì û Ç «¨Á¨Àô

¦ÀüÚ û Ç¾¡ø $R_1=R_2$

±É§Å $R_1=R_2=1000$. ¸¢. ¸¢

À¼õ 1.56ø AÓ¨ ÉôÀÌ¾¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸Ç¢ý «¨ÁôÒ ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÐ.

$\boxed{\uparrow +}\sum F_{iy}=0$, ºÁýÀ¡Î

$-0.707AB+1000=0$ ¬Ìõ

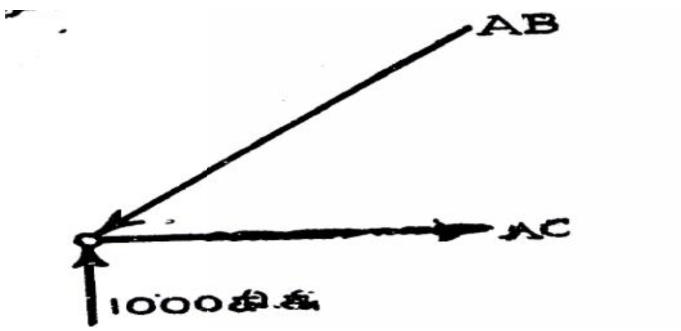
$\therefore AB = 1414$ ¸¢.¸¢

$\boxed{\xrightarrow{+}}\ \sum F_{ix}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡Î

$AC-0.707AB=0$, ±ýÈ¡Ìõ

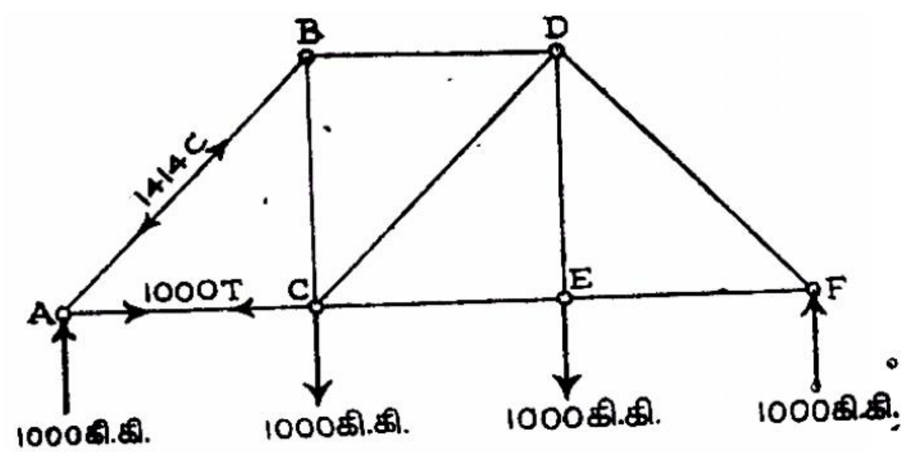
AC = 1000¸¢.¸¢

முனை A



À¼õ 1-56

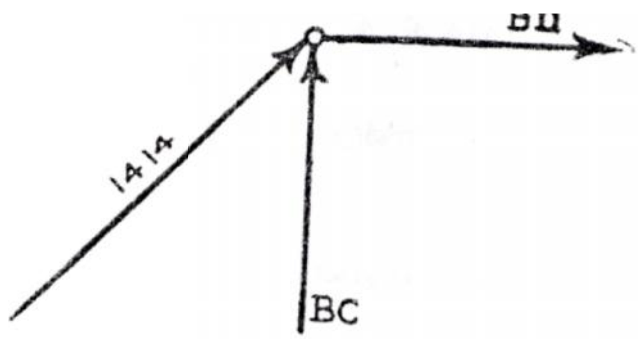
A ±ýÈ Ó¨É¨Â §¿¡ìÌõ§À¡Ð 1414¸¢.¸¢ ±¨¼¨ÂÔûÇ Å¢¨º ´ýÚ ¯ò¾ÃôÀÌ¾¢ AB ÅÆ¢ÂÕóÐ A³ §¿¡ì¸¢î ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. «ùÅ¢¨º A³ò ¾ûÇ ÓÂüº¢ôÀ¾¡ø ¯ò¾¢ÃôÀÌ¾¢ AB ¬ÉÐ þÚì¸ ¯Úô Ò (compression member) ±ÉôÀÎõ. AC ±ýÈ ¯ò¾¢ÃôÀÌ¾¢ A ±ýÈ Ó¨É¨Â 1000¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ Å¢¨º ´ýÈ¡ø þØôÀ¾¡ø ¯ò¾¢Ãõ AC ¬ÉÐ þØÀÌ¾¢ (tension member)Â¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. ¯ò¾Ã ¯ÚôÒ¸Ç¢ý þÚì¸ «øÄÐ þØ¾ý ¨Á¸¨Ç À¼õ 1.57ø Å¢Çì Ì¸¢ÈÐ.



À¼õ 1-57

CÂ¢Ä¨ÁÔõ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢ ãýÚ ¦¾¡¢Â¡ì ¸½¢Âí¸¨Çô ¦ÀüÚûÇ¾¡ø «¾ý ºÁ¿¢¨Ä¨Â «È¢Å¾üÌ B ±ýÛõ Ó¨ÉôÀÌ¾¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸û ¯¾×¸¢ýÈÉ.

B Ó¨ÉÂ¢ý ¾É¢ôÀÎò¾¢Â «¨ÁôÒ À¼õ 1.58ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ.



A¼õ 1-58

$\boxed{\uparrow +}\sum F_{iy} = 0$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ Î

$1414(0.707) + BC = 0$, ¬ Ì õ.

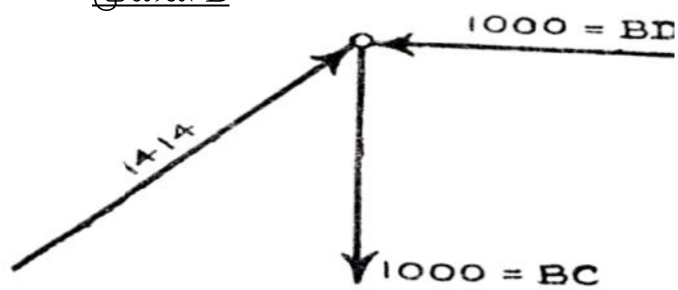
BC = -1000 ¸¢.¸¢

$\boxed{\xrightarrow[+]{}}\sum F_{ix}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ Î

$1414(0.707) + BD = 0$ ¬ Ì õ.

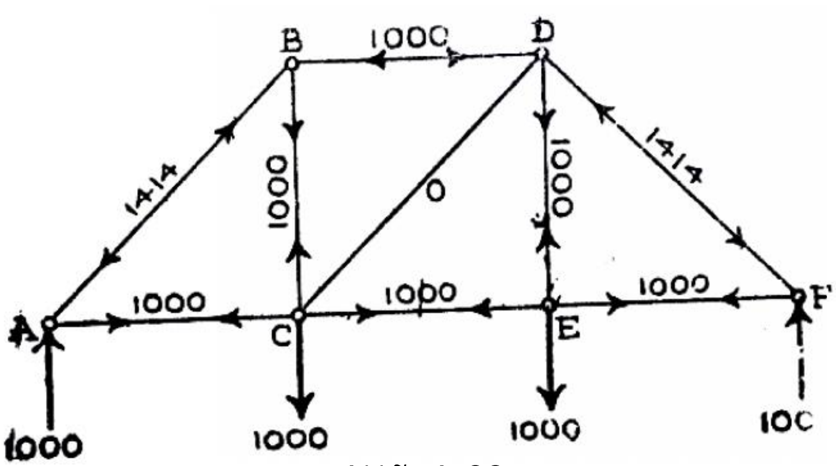
$BD = -1000$ ¸¢.¸¢

முனை B



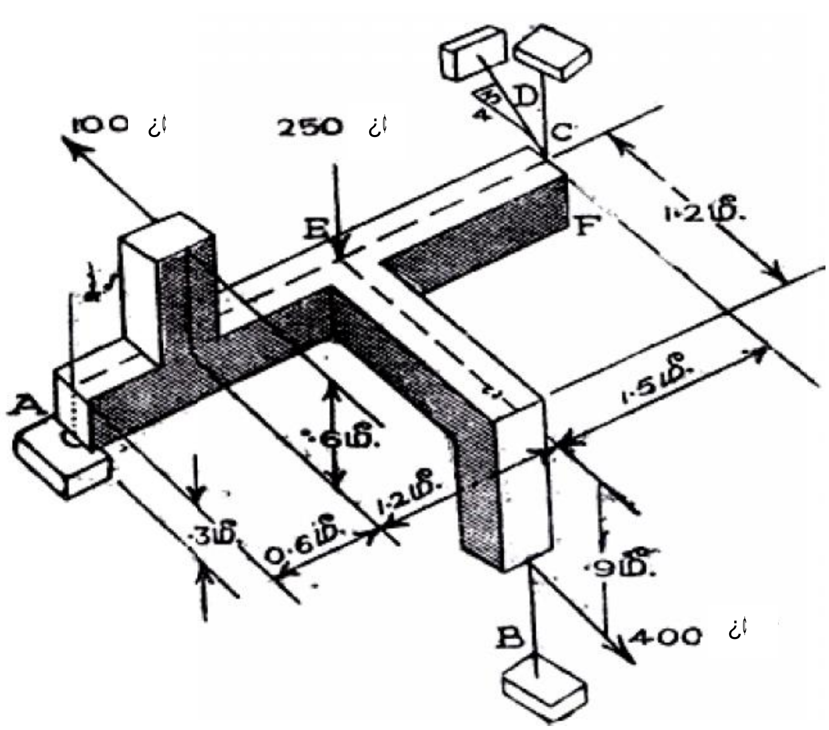
A¼õ 1-59

þùÅ¢Õ Å¢¨º¸Ùõ Ì¨Èì ÌÈ¢¨Âô ¦ÀüÚûÇ¾¡ø B Ó¨É ì Ì¡¢Â ¾¢Õò¾¢Â «¨Áôò À¼õ 1.59ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÐ. þí Ì BD ±ý Ûõ ¯Úôò þÚì¸ô À Ì¾¢Â¡¸×õ BC ±ý Ûõ ¯Úôò þØÀ Ì¾¢Â¡¸×õ «¨Á¸¢ýÈÉ
þùÅ¡§È ´Õ Ó¨É ôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ Áü¦È¡Õ Ó¨É ôÒûÇ¢ì Ì Óý§ÉÈ¢î ¦ºýÚ ¯ò¾Ãò¦¾¡ Ì¾¢ ¯Úôò¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ Îõ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡½Ä¡õ. «ÅüÈ¢ý «¨Áôò À¼õ 1.66ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÐ.



À¼õ 1-60

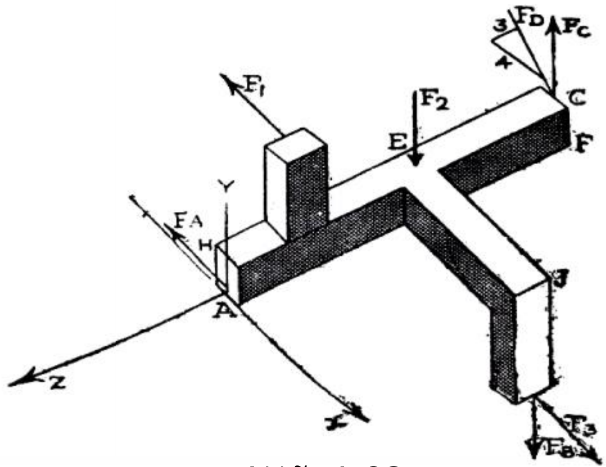
Á¡¾¦¡¦ 1.33. À¼õ 1.61ø ¸¡ðÊÔûÇ ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ A ±ý Û Á¦¼ò¾¦ø ¯Ãø Ì ÆÅ¦ô ¦À¡Õò¾Á¡É (ball and socket) « ¨Áô¨À ¬¾¡ÃÁ¡¸ì¦¸¡ ñ Î B,C ±ý Û õ þÕ ÅÖÅ¡É ¦º í Ì òÐì ¸õÀ¦¸Ç¡Öõ,



À¼õ 1-61

D ±ý Û õ ÅÖÅ¡ÉÐõ þ ¨¼Â¦Ä ¨ÁÔõ ¸õÀ¦Â¡Öõ ¾¡ í ¸ôÀ Î ¸¦ýÈÐ. «ô¦À¡ÕÇ¦ý ±¨¼ ÒÈì¸½¦ì¸ôÀð¼¾¡¸ì ¦¸¡ ñ Î A ±ý Û Á¦¼ò¾¦ø ¦ºÂüÀ Î õ ±¾¦÷¾¡ì¸ Å¦¨º, B,C,D ¸õÀ¦¸Ç¦ø ¦ºÂøÀ Î õ þØÅ¦¨º¸û ¬¸¦ÂÅü¨È Å¨ÃÂÚì¸.

À¼õ 1.62ø ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ ¾É¢ôÀÎò¾ôÀðÎ «¾¢ø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸û Â¡×õ ÌÈ¢ì¸ôÀðÎûÇÉ. þíÌ $\underline{F_1}, \underline{F_2}, \underline{F_3}$,±ýÀ¨Å ¦¾¡¢ó¾ Å¢¨º¸Ç¡Ìõ. $\underline{F_A}, \underline{F_B}, \underline{F_C}, \underline{F_D}$ ±ýÀ¨Å ¦¾¡¢Â¡¾ Å¢¨º¸Ç¡Ìõ. AÂ¢ø ¦ºÂøÀÎõ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨ºÂ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒõ



À¼õ 1.62

¦ºÂøÀÎõ §¸¡Îõ ¦¾¡¢Â¡¾É Å¡¨¸Â¡ø «ùÅ¢¨ºÂ¢ý À¸÷×¸Ç¡É $\underline{F_x}, \underline{F_y}, \underline{F_z}$ ±ýÀÅü¨Èò ¦¾¡¢Â¡ì ¸ ½¢Âí¸Ç¡¸ì ¦¸¡ûÇ§Å ñ Îõ. «ô¦À¡ØÐ 6 ¦¾¡¢Â¡ì ¸ ½¢Âí¸û Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢Â¢ø ¯ûÇÉÅ¡Ìõ.

¬É¡ø ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ¦À¡Õû ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÄÕôÀ¾üÌ ¬Ú ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ ºÁýÀ¡Î¸û þÕò¾¡Ä¡ø ¬Ú ¦¾¡¢Â¡ì ¸ ½¢Âí¸¨Ç ¸ÑìÌ Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ.

A ±ýÛÁ ÒûÇ¢¨Â ãÄôÒûÇ¢Â¡¸×õ ZAX ¾Çò¨¾ì ¸¢¨¼¾¼Ç¡¸×õ, AY ±ýÛõ §¸¡ð¨¼ì ¸¢¨ÌòÐ¾¢ÉÌ Ì ò¾¡¸×õ ±Î ì¸

¦À¡Õ¨ÇÎ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅìÌõ Å¢¨º¸Ùõ, «ùÅ¢¨º¸û ¦ºÂøÀÎõ ÒûÇ¢¸Ù ¨¼Â ¿¢¨ÄòÐ¨ÈÂ¢¸ Ùõ À¢ý ÅÕÁ¡Ú Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

$\underline{F_A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$ $\qquad \underline{r_A} = 0$

$\underline{F_B} = -B \underline{j}$ $\qquad \underline{r_B} = 1.2\underline{i} - 1.8\underline{k}$

$\underline{F_C} = -B + C$ $\qquad \underline{r_C} = -3.3\underline{k};$

$\underline{F_D} = D(0.8\underline{i} - 0.6\underline{k})$ $\qquad \underline{r_D} = 0.3\underline{j} - 3.3\underline{k};$

$\underline{F_1} = -100\underline{i}$ $\qquad \underline{r_1} = 0.9\underline{j} - 0.6\underline{k};$

$\underline{F_2} = -250\underline{j}$ $\qquad \underline{r_2} = -1.8\underline{k};$

$\underline{F_3} = 400\underline{i}$ $\qquad \underline{r_3} = -0.6\underline{j} - 1.8\underline{k}$

$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0$ ±ýÛõ ºÁýÀ¡Î

$\underline{R} = \underline{i}\left(A_x - 0.8D - 100 + 400\right) + \underline{j}\left(A_y - B + C - 250\right) + \underline{k}\left(A_z - 0.6D\right) = 0$ ±ýÈ¡Ìõ.

«¾¡ÅÐ $A_x - 0.8D + 300 = 0$ ....(1)

$A_y - B + C - 250 = 0$ (2)

$A_z - 0.6D$ =0 (3)

$$\underline{M}_0^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge F_i = 0$$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î

$$0 + \left(1.2\underline{i} - 1.8\underline{k}\right) \wedge \left(-3.3\underline{k}\right) \wedge \left(C\,\underline{j}\right)$$
$$+ \left(0.3\underline{j} - 3.3\underline{k}\right) \wedge \left(-0.8D\underline{i} - 0.6D\underline{k}\right)$$
$$+ \left(0.9\underline{j} - 0.6\underline{k}\right) \wedge \left(-100\underline{i}\right) + \left(-1.8\underline{k}\right) \wedge \left(-250\underline{j}\right)$$
$$+ \left(-0.6\underline{j} - 1.8\underline{k}\right) \wedge \left(400\underline{i}\right) = 0$$

±ýÈ¡ Ìõ.

«¾¡ÅÐ

$$-1.2B\underline{k} - 1.8B\underline{i} + 3.3C\underline{i} + 0.24D\underline{k} - 0.18D\underline{i} + 0.264D\,\underline{j}$$
$$90\underline{k} + 60\underline{j} - 450\underline{i} + 240\underline{k} - 720\underline{j} = 0$$

«¾¡ÅÐ

$$\underline{i}\left(-1.8B + 3.3C - 0.18D - 450\right) + \underline{j}\left(0.264D + 60 - 720\right)$$
$$+\underline{k}\left(-1.2B + 0.24D + 90 + 240\right) = 0$$

«¾¡ÅÐ

$$-1.8B + 3.3C - 0.18D - 450 = 0 \qquad (4)$$
$$0.264D + 660 = 0 \qquad (5)$$
$$-1.2B + 0.24D + 330 = 0 \qquad (6)$$

(4)(5)(6) ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î ¸ Ù ì Ì ò ¾÷× ¸ ¡ ñ ¸

«ô¦À¡ØÐ B=325 ¿. (7)

C=327.5 ¿. (8)

D=250 ¿. (9)

±É§Å (1)ÅÐ ºÁýÀ¡ Î

$A_x = 0.8D - 300 = 0.8 \times 250 - 300 = -100$ ¿. ¬ Ìõ. (10)

«ùÅ¡§È (2)ÅÐ ºÁýÀ¡ Î

$A_y = 250 + B - C = 250 + 325 - 327.5 = 247.5$ ¿. ¬ Ìõ. (11)

þÚ¾Â¡ ¸ (3) ÅÐ ºÁýÀ¡ Î

$A_z = 0.6D = 0.6 \times 250 = 150$ ¿. ¬ Ìõ. (12)

$\therefore \underline{F_A} = -100\underline{i} + 247.5\underline{j} + 150\underline{k}$ (13)

ÀÂüº¸ û

1-1 « ÊôÀ ¨ ¼ « Ä Ì ¸ û (Fundamental Units) ÅÆ¦Åó¾ « Ä Ì ¸ û (derived units) ¬ ¸¦ÂÅü ¨ Èò ¾ Ì ó¾ ± Î òÐ ì ¸ ¡ð Î ¸ Ù ¼ ý Å¦Ç ì Ì ¸

1-2 ¿¦ ¨ È, ± ¨ ¼ þ ¨ Å ¸ Ù ì Ì ûÇ §ÅüÚ ¨ Á ¨ Â Å¦Ç ì Ì ¸.

1-3 À¦ ý ÅÕõ Ã¡º¦ ¸Ç¦ ý À¡¦Á¡ ½ í ¸ û Â¡ ¨ Å?
(i) « ¼÷ò¾¦ (ii) ¯ ó¾õ (iii)§Å ¨ Ä(iv)§ ¸ ¡ ½ õ (v) « Øò¾õ

1-4 ¸¦ú ì ¸ ¡ Ï õ þÂüÀ¦Âø Ã¡º¦ ¸Ç¦ ý À¡¦Á¡ ½ í ¸ ¨ Ç ì ¸ ¡ ñ ¸.
(i) §¿÷§ ¸ ¡ð Î ¯ ó¾õ(Linear Momentum)
(ii) ¾¦Õ Ì î ÍÕ û Å¦ø ´ ýÈ¦ ý ¾ ý É¦¼ò§¾ §ºÁ¦òÐ ¨ Åò¾¦Õ ì Ì õ (¿¦ ¨ Ä) ¬ üÈø
(iii) ¾¦ÃÅ « Øò¾õ(Fluid pressure)
(iv) ¾¦ÕôÒò¾¦È ý
(v) þÂ ì ¸ ¡üÈø (Kinetic energy)
(vi)§ ¸ ¡ ½ ¯ ó¾õ(Angular momentum)

(i) [§¿ ÷ § ¸ ¡ ð Î ¯ ó ¾ õ] = [¿ ¦ ¨ È × ¾ ¦ ¨ º §Å ¸ õ]

$= MLT^{-1}$

(ii) [¿ ¦ ¨ Ä ¬ ü È ø] = $\left[\frac{1}{2}kx^2\right] = \left[ML^2T^{-2}\right]$

(iii) [¾ ¦ Ã Å « Ø ò ¾ õ] = , $\frac{[\text{§¿ ÷ Ì ò Ð Å ¦ ¨ º}]}{[\text{À Ã ô Ò}]}$

$= \left[ML^{-1}T^{-2}\right]$

(iv) [¾ ¦ Õ ô Ò ò ¾ ¦ È ý] = [¦ ¿ õ Ò § ¸ ¡ Ä ¦ ý ¨ ¸ ¿ ¦ Ç õ][Å ¦ ¨ º] = $\left[ML^2T^{-2}\right]$

(v) [þ Â ì ¸ ¡ ü È ø] = $\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \left[ML^2T^{-2}\right]$

(vi) [§ ¸ ¡ ½ ¯ ó ¾ õ] = [¿ ¦ Ç õ × §¿ ÷ § ¸ ¡ ð Î ¯ ó ¾ õ] = $\left[ML^2T^{-1}\right]$

1-5 À¦ ý ÅÕõ ºÁ ý À¡ Î ¸Ç¦ø ±î ºÁ ý À¡ Î ¸ û À¡¦Á¡ ½ í ¸Ç¦ø ÓÃ ½ üÈ¾¡ ¸ ¯ ûÇ É ±É ì ¸ ¡ ñ ¸ ÓÃ Ï ûÇ¾¡ ¸ þÕ ì Ì Á¡É¡ø « ¾ü Ì ¡¦Â ¸ ¡Ã ½ í ¸ ¨ Ç ì Ü Ú ¸

(i) $v = u + as$

(ii) $T = 2® EI / L$

T = ¾¦ÕôÒò¾¦È ý E = Á¦ðº¦ì ¦ ¸ Ø(¸¦. ¸¦./Á¦.[2]
I = ÀÃôÀÇ× ì Ì ¡¦Â ¿¦ ¨ ÄÁò ¾¦ÕôÒò¾¦È ý (Area of moment of inertia)
L = ¿¦Çõ

$$(iii) = s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$(iv)\ y = -\frac{wx}{24E.I}\left(L^2 - 2Lx^2 + x^3\right)$$

x, y ¿¦Ç í ¸ ¨ Ç ì Ì È¦ ì ¸¦ ý È É
$L =$ Á¡È¦Ä¦
w = µÃÄ Ì ¿¦Çò¾¦ü Ì ¡¦Â Å¦ ¨ º
E = Á¦ð º¦ ì ¦ ¸ Ø
I = ÀÃôÀÇ× ì Ì ¡¦Â ¿¦ ¨ Ä ¨ Áò¾¦ÕôÒò¾¦È ý

(v) $p = p_a + g°h, p, p_a$ ± ýÀÉ «Øò¾ í ¸ û

g = ÒÅ¦Â÷ôÒ Ó Î ì ¸ õ

h = «Øò¾ ¯ÂÃõ

° = «¼÷ò¾¦

(vi) $^{-} = T.L\left(\frac{a^2+b^2}{®a^3b^3G}\right), ^{-} =$ § ¸ ¡ ½ î Í Æü º¦

a , h = Ì Ú ì Ì ¦ Åð Î ô ÀÃôÀÇÅ¦ ý À¡¦Á¡ ½ í ¸ û
G = Å¦ ¨ ÃôÒ ì Ì ½ ¸ õ(modulus of rigidity inkg/m^2)
T = ÓÚ ì Ì ò ¾¦È ý
L = ¿¦Çõ

1-6 m ¿¦ ¨ ÈÔûÇ ´Õ ¦À¡Õû r ¬ÃÓûÇ ´Õ Åð¼ò¾¦ø v ¾¦ ¨ º§Å ¸ ò¾¦ø þÂ í Ì õ§À¡Ð þÂ ì ¸ ò¾¦ü Ì §¾ ¨ ÅÂ¡É F_r, ¾¦ ¨ º§Å ¸ ò¾¦ø þÂ í Ì õ§À¡Ð þÂ ì ¸ ò¾¦ü Ì ò §¾ ¨ ÅÂ¡É ¨ ÁÂ§¿¡ ì Ì Å¦ ¨ º F_r- ³ , Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ºÁ ý À¡ Î

$F_r = \frac{mv^2}{r}$ ¬ Ì õ.

þ î ºÁ ý À¡ Î À¡¦Á¡ ½ í ¸ Ç¦ ý ÓÃ½ üÈ¾¡ ¸ ± ý À ¨ ¾ì ¸ ¡ ñ ¸
(Å¦ ¨ ¼ : ÓÃ½ üÈÐ)

1-7 À¡¦Á¡ ½ í ¸ Ç¦ ý µ¡¦Âø ¾òÐÅò ¨ ¾ô ÀÂ ýÀ Î ò¾¦ g Á¾¦ôÒ ÒÅ¦Â÷ôÒ Ó Î ì ¸ ÓûÇ þ¼ò¾¦ø m ¿¦ ¨ ÈÔõ l ¿¦ÇÓõ ¯ ¨ ¼Â ´Õ ¾É¦ ° ºø Ì ñ Ê ý (Simple pendulum) « ¨ Ä× §¿Ãò ¨ ¾

$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$ ± ýÈ ºÁ ýÀ¡ Î Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ±É ì ¸ ¡ ñ ¸

(Ì È¦ôÒ) $\left\{\left[T\right] = \left[M^aL^bg^c\right] = \left[F^aL^{-a+b+c}T^{2a-2c}\right]\right\}$

1-8 ´Õ þÚ ¸ Ä¡É ÅøÄ¦ ýÁ¦Ð (tight string) Ì Ú ì ¸ ¡ ¸ ¿¦ ¸ úó¾¦ Î õ µ÷ « ¨ ÄÅ¦ ý ¾¦ ¨ º§Å ¸ õ «¾ý ¿¦ ¨ È þØÅ¦ ¨ º ¿¦Çõ ¬ ¸ ¦ÂÅü ¨ È î º¡÷óÐûÇÐ. ¾¦ ¨ º

§Å¸ò¾¢ü Ì¡¢Â ºÁýÀ¡ð¨¼ À¡¢Á¡½ í¸Ç¢ý µ¡¢Âø ¾òÐÅò¨¾ô ÀÂýÀÎò¾¢ Å¨ÃÂÚì¸

Å¢¨¼ $\left\{[v]=\left[L^{-1}FT^{2}\right]^{a}[F]^{b}[L]^{c}=k\sqrt{\frac{fl}{m}}\right\}$

1-9 ÒÅ¢Â÷ôÒ Å¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚì Ìõ ºÁýÀ¡Î

$F=\frac{GM_1M_2}{m^2}$ ¬ Ìõ. G-ý À¡¢Á¡½ í¸¨Çì ¸¡ñ¸

Å¢¨¼ $\left\{[G]=F^{-1}L^{4}T^{-4}\right\}$

1-10 µ÷ ¬ÆÁ¡É ¿¾¢ «¨ÄÅ¢ý ¾¢¨º§Å¸õ (v), «¾ý «¼÷ò¾¢ (ρ) ÒÅ¢Â÷ôÒ ÓÎì¸õ(g) «¨Ä ¿¦Çõ ª - ¬¸¢ÂÅü¨Èî º¡÷óÐûÇÐ. À¡¢Á¡½ í¸ Ùì Ì ´ôÀ «¾ý ¿¢Â¾¢¨Â Å¨ÃÂÚì¸.

Å¢¨¼ $V=k\sqrt{g}$

1-11 µ÷ ´Ä¢ «¨ÄÂ¢ý ¾¢¨º§Å¸õ, «¾ý «¼÷ò¾¢(ρ) Àøì Á¡ÎÄŠ (Bulk Modulus) $(\ ),[FL^{-2}]$ «¨Ä ¿¦Çõ ª ¬¸¢ÂÅü¨Èî º¡÷óÐûÇÐ. À¡¢Á¡½ í¸ Ùì Ì ²üÈ¾¡É ¿¢Â¾¢¨Â Å¨ÃÂÚì¸.

(Å¢¨¼, $v=k\left(\diagup_{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$

1-12 À¢ÍÀ¢ÍôÒûÇ (viscous) ¾¢ÃÅò¾¢ø ± ñ Á¾¢ôÒ f ¯¨¼Â ¿¢¨ÄÂ¡É Å¢¨º ¯Õ ñ ¨¼ ÅÊÅÓûÇ ¦À¡ÕÇ¢ý§Áø ¦ºÂüÀÎõ¦À¡ØÐ «¾ý ¾¢¨º§Å¸õ (v) ± ñ Á¾¢ôÒ (f) §¸¡Çò¾¢ý ÌÚì Ì ¦Åð Î ôÀÃôÒ (a) À¢ÍÀ¢ÍôÒì ¦¸Ø (Coefficient of viscosity) $(\ ),\left[ftl^{-2}\right]$ ¬¸¢ÂÅü¨Èî º¡÷óÐûÇÐ. À¡¢Á¡½ µ¡¢Âø Å¢¾¢¨Âô ÀÂýÀÎò¾¢ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ Å¨ÃÂÚì Ìõ ºÁýÀ¡ð¨¼ì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ $\left\{v=kfa^{\frac{1}{2}}\eta^{-1}\right\}$

1-13 ´Õ §¸¡û Ý¡¢Â¨Éî ÍüÈ¢ ÅÕÅ¾üÌ ±Îì Ìõ §¿Ãõ ÒÅ¢Â÷ôÒ Á¡È¢Ä¢ (Gravitational constant) «¨Å¸Ç¢ý Üð Î ¿¢¨È(M), ÍüÈ¢ÅÕõ À¡¨¾Â¢ý «¨Ã ¿¦ð¼¡Î Í «Ç× (semi major axis) (a) ¬¸¢ÂÅü¨È º¡÷óÐûÇÐ. À¡¢Á¡½ í¸ Ùì Ì ²üÈ¾¡É §¿Ãò¾¢ý ¿¢Â¾¢¨Âì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼; $\left\{T=KG^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}\right\}$

1-14 ¿¦û ¯Õ¨Ç ´ýÈ¢ý ¨¸ôÀ¢ÊÂ¢ø ¿¢¸úó¾¢ Îõ ÓÚì Ìò ¾¢Èý (T_q) ÌÚì Ì ¦Åð ÎôÀÌ¾¢Â¢ý Å¢ð¼ò ¦¾¡¨Ä× (d) ¦Åð Îò ¦¾¡Î Å¢¨º(f) ¬¸¢ÂÅü¨Èî º¡÷óÐûÇÐ. À¡¢Á¡½ µ¡¢Âø Å¢¾¢¨Âô ÀÂýÀÎò¾¢ ÓÚì Ìò¾¢È¨É Å¨ÃÂÚì Ìõ ºÁýÀ¡ð¨¼ì ¸¡ñ¸.

(Å¢ ¨ ¼ : $\left\{\left[T_q\right]=\left[d^a f^b\right];[FL]=\left[L^a\right]\left[\frac{F}{L^2}\right]^b, T_q = c.d^3.f\right\}$

1-15 À¡¢Á¡ ½ µ¡¢Âø ¾òÐÅò ¨ ¾ô ÀÂ ý À Î ò¾¢ À¢ ý ÅÕõ ºÁ ý À¡ Î ¸Ç¢ ý À¡¢Á¡ ½ í ¸ ¨ Çò ¾ ½ ¢ ì ¨ ¸ ¦ ºö ¸ .
(i) Ó ¨ É ´ ý ¨ È ²¾¡Å ¦ ¾¡Õ ¦À¡ÕÇ¢ø « ÊòÐ Ñ ¨ ÆôÀ¾¡ø ²üÀ Î õ ¾ ¨ ¼ ¨ Â(resistance) $R = W + w + \frac{W^2 h}{(W+w)d}$ ± ý È ºÁ ý À¡ Î Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ.

þ í Ì W,w ± ý À ¨ Å ± ¨ ¼Â¡ Ì õ. h,d ± ý À ¨ Å ¿¦Ç « Ç ¨ Å ¸ ¨ Ç ì Ì È¢ ì Ì õ.

(ii) ¸ôÀ¢ ´ ý È¡ø ¦ºÖò¾ôÀ Î õ ¯ î ºô À¡¢ò¾¢È ¨ É (Maximum Horse Power) $H = \frac{bt(l-n)}{550} \times \frac{2}{3} f \sqrt{\frac{fg}{3w}}$ ± ý È ºÁ ý À¡ Î Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ.

þ í Ì b,t,n,f,g,w ± ý À ¨ Å Ó ¨ È§Â « ¸Äõ, ¾ÊôÒ À¢ ý É ± ñ , ¦Åð Î ò ¦¾¡ Î Å¢ ¨ º, ÒÅ¢Â÷ôÒ Ó Î ì ¸õ µÃÄ Ì Ì Ú ì Ì ¦Åð Î ôÀÃôÀ¢ ý ± ¨ ¼ ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È ì Ì È¢ ì Ì õ.
(iii) Óð Î (strut)´ ý È¢ø ¿¢ ¸úÅ¾ü Ì ¡¢Â À Ù Å¢ ý ¯ î ºÅÃõ ¨ Àô À¢ ý ÅÕõ ºÁ ý À¡ Î ¸ û Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ¢ ý È É.

$$P = \frac{®^2}{l^2} EI, p = \frac{f.A}{\left\{1 + a\left(\frac{1}{k}\right)^2\right\}}$$

þ í Ì l,E,I,F,A,K ± ý À ¨ Å Ó ¨ È§Â ¿¦Çõ, Á¦ðº¢ì Ì ½ ¸ õ (Modulus of Elasticity), Ì Ú ì Ì ¦Åð Î ôÀÃôÀ¢ ý Ì Ú ì ¸ îº¢ ¿¢ ¨ Ä ¨ Áò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý , ¦Åð Î ò ¦¾¡ Î Å¢ ¨ º, ÀÃôÀÇ×, ÍÆ¢Â¡ ¨ Ã(radius of gyration)¬ ¸¢ÂÅü ¨ È ì Ì È¢ ì Ì õ.

(iv)ÑÉ¢ ´ ý Ú ¿¢ ¨ ÄôÀ Î ò¾ôÀð Î õ, Áü¦È¡Õ ÑÉ¢Â¢ø þ ¨ ½ î º ì ¸Ãõ ¦À¡Õò¾ôÀð Î ÓûÇ ¸ÕÅ¢ì ¨ ¸ôÀ¢ÊÂ¢ ý (shaft) ÓÚ ì ¸¾¢÷× ì Ì ¡¢Â ¸¡Ä Åð¼§¿Ãõ (t) $t = 2®\sqrt{\frac{32Il}{C®d^4}}$ ± ý È ºÁ ý À¡ð¼¡ø Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ.
þ í Ì J = þ ¨ ½ î º ì ¸Ãò¾¢ ý ¿¢ ¨ Ä ¨ Áò ¾¢ÕôÒò¾¢È ý
l = ¿¦Ç « Ç×
C = Å¢ ¨ ÈôÒ ì Ì ½ ¸ õ(Modulus of rigidity)
d = ¸ÕÅ¢ì ¨ ¸ôÀ¢ÊÂ¢ ý Ì Ú ì Ì ¦Åð Î ô À Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â Å¢ð¼õ ¬ Ì õ.

1-16 $c = l\sim + m\bar{x}\, a_y - m\bar{y}\, a_x$ ± ý È ºÁ ý À¡ðÊø $\sim, m, \bar{x}, \bar{y}$ ± ý À ¨ Å ÍÆø §Å ¸ ÅÇ÷î º¢ Å¦¾õ, ¿¢ ¨ È, ¿¦Ç í ¸ ¨ ÇÔõ a_x, a_y ± ý À ¨ Å §¿÷§¸¡ð Î ì Ì ¡¢Â Ó Î ì ¸ í ¸ ¨ ÇÔõ « È¢Å¢ò¾¡ø c,l ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ ý À¡¢Á¡ ½ í ¸ ¨ Ç ºÁ ý À¡ Î À¡¢Á¡ ½ í ¸Ç¢ø ºÁÀÊò¾¡ÉÐ ±É ì ¦ ¸ ¡ ñ Î ¸ ¡ ñ ¸ .
Å¢ ¨ ¼ : $[c] = [FL];[I] = \left[FLT^2\right]$

1-17 $mk^2 = bw^2 + R\sqrt{x^2 - y^2}\sin^-$ ± ý È ºÁ ý À¡ Î À¡¢Á¡ ½ í ¸Ç¢ø ºÁÀÊò¾¡ÉÐ ± ý È¡ø k,b ¬ ¸¢Â þÂüÀ¢Âø Ã¡º¢ ¸Ç¢ ý « ÊôÀ ¨ ¼ ¾ô À¡¢Á¡ ½ í ¸ ¨ Ç ì ¸ ¡ ñ ¸ . þ í Ì m,µ ,R,y ± ý À ¨ Å Ó ¨ È§Â ¿¢ ¨ È, ÍÆø§Å ¸ õ, Å¢ ¨ º, ¿¦Çõ ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È « È¢Å¢ì ¸ ¢ ý È É, (Å¢¨¼ : $\left\{[k]=\left[LT^{-1}\right],[b]=\left[FLT^{2}\right]\right\}$

1-18 À¡¢Á¡ ½ í¸Ç¢ø ´Õ ÀÊò¾¡¸ ¯ûÇ

$$Q=c\left(B-nH\right)\left[m+\left(\frac{BH}{A}\right)^{2}\right]H^{\frac{3}{2}}$$

±ýÈ ºÁýÀ¡ðÊø Q,B ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â µÃÄÌ §¿Ãò¾¢ø ¸É«Ç×, ¿¦Çõ ¬¸¢ÂÅü¨ÈÔõ m,n ±ýÀ¨Å Á¡È¢Ä¢¸¨ÇÔõ ¦¾¡¢ÅôÀ¾¡¸¢ø H,A,c ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý «ÊôÀ¨¼ô À¡¢Á¡½í¸¨Çì ¸¡ñ¸.

Å¢¨¼ : $\left\{[H]=[L];[A]=\left[L^{2}\right];[c]=\left[L^{\frac{1}{2}}T^{\frac{-1}{2}}\right]\right\}$

1-19 À¡¢Á¡½ µ¡¢Âø ¾òÐÅò¨¾ô ÀÂýÀÎò¾¢ À¢ýÅÕõ ºÁýÀ¡Î¸Ç¢ý À¡¢Á¡½í¸¨Çò ¾½¢ì¨¸ ¦ºö¸.

$$\text{(i) Ftcos}^{-} = \frac{W}{g}{}^{3} + I\mu$$

$F,t,^{-},W,g,^{3},I,w;$ ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â Å¢¨º, §¿Ãõ, §¸¡½õ, ±¨¼, ÒÅ¢Â÷ôÒ Óİì¸õ, §¿÷§¸¡ðÎò ¾¢¨º§Å¸õ, ¿¢¨Äò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý, ÍÆø§Å¸õ ¬¸¢ÂÅü¨ÈìÌÈ¢ì¸¢ýÈÉ.

Å¢¨¼: ºÁýÀ¡Î, À¡¢Á¡½í¸Ç¢ø ÓÃñ ¯ûÇ¾¡Ìõ,

$(ii)\ X=Ae^{-bt}\sin\left(bt+\sim\right)$ þíÌ X,A ±ýÀ¨Å ¿¦Çí¸¨ÇÔõ, t §¿Ãò¨¾Ôõ, b ÍÆø§Å¸ò¨¾Ôõ ÌÈ¢ì¸¢ýÈÉ.

(Å¢¨¼: ºÁýÀ¡Î À¡¢Á¡½í¸Ç¢ø ÓÃ½üÈ¾¡Ìõ.)

1-20 ´Õ ¦À¡Õû º¡ö¾Çò¾¢ø (inclined plane)¸¦ú§¿¡ì¸¢ ¯Õ Ù õ§À¡Ð ²üÀÎõ ¿¢¨Ä¬üÈø Å¢ÃÂò¾¢üÌõ þÂì¸ ¬üÈø ¬¾¡Âò¾¢üÌõ ¯ûÇ þ¨½ô¨Àô À¢ýÅÕõ ºÁýÀ¡Î «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ.

$$Wh=\frac{1}{2}M{}^{3}{}^{2}+\frac{1}{2}Iw^{2};$$

ºÁýÀ¡ð¨¼ Å¨ÃÂÚì Ìõ ¯ÚôÒ¸û À¡¢Á¡½í¸Ç¢ý µ¡¢Âø ¾òÐÅò¾¢üÌ þ½ì¸Á¡¸ ¯ûÇÉÅ¡ ±É ¬Ã¡ö¸.

(ÌÈ¢ôÒ:

$\left\{[I]=\left[\text{º¼òÐÅò ¾¢ÕôÒ ¾¢ÈÉ,}\right]=\left[ML^{2}\right]\right\}$

[Å¢¨¼ : ÓÃ½üÈÐ.]

1-21 d ¦¾¡¨Ä× Å¢ð¼Ó¨¼Â ´Õ ¿¦û¯Õ¨ÇÂ¢ý ¨¸ôÀ¢ÊÂ¢ø (shaft) ¿¢¸úó¾¢Îõ ÓÚìÌò¾¢Èý (Torque) T_qìÌõ, ¦ÅðÎò ¦¾¡Î Å¢¨º (shear stress)fìÌõ ¯ûÇ ¦¾¡¼÷¨À ¦ÅðÎò ¦¾¡Î Å¢¨º (shear stress) ¯ûÇ ¦¾¡¼÷¨À $T_q=\frac{®d^{3}f}{16}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡Î Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. À¡¢Á¡½í¸Ç¢ø þîºÁýÀ¡Î ÓÃ½üÈÐ ±Éì¸¡ñ¸

(ÌÈ¢ôÒ :

$\left[T_q\right]=\left[ML^2T^{-2}\right];\left[f\right]=\left[ML^{-1}T^{2}\right]$

[Å¢¨¼ : ÓÃ½ üÈÐ.]

1-22 þ¾ú Å¢ø (leaf spring) ´ ýÈ¢ø ²üÀÎõ ¦ÅðÎò ¦¾¡Î Å¢¨º¨Â $f=\dfrac{3Wl^a}{2nbt^2}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡Î Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸¢ø À¡¢Á¡½ µ¡¢Âø ¾òÐÅò¨¾ô ÀÂýÀÎò¾¢ aý Á¾¢ô¨ÀÌ ¸¡ñ¸. þíÌ w,l,n,b,t ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â ÀÙ, ¿¦Çõ, þ¾ú¸Ç¢ý ±ñ½¢Ì¨¸ þ¾ú ´ù¦Å¡ýÈ¢ý «¸Äõ, ¾Êô¨Ò ¬¸¢ÂÅü¨ÈÌ ÌÈ¢Ì Ìõ. (Å¢¨¼ a = 1)

1-23 ÑÉ¢ ´ýÚ ¿¢¨ÄôÀÎò¾ôÀðÎõ, Áü¦È¡Õ ÑÉ¢Â¢ø_ þ¨½îºÌ¸Ãõ ¦À¡Õò¾ôÀðÎ ÓûÇ ¸ÕÅ¢ ¨¸ôÀ¢ÊÂ¢ý ÓÚÌ¸¾¢÷×ÌÌ ¯¡¢Â (torsional vibration) ¸¡Ä Åð¼§¿Ãõ(t)

$$t = 2® \sqrt{\frac{32Il}{c® d^4}}$$

±ýÈ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚÌ¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. À¡¢Á¡½ í¸Ç¢ø þîºÁýÀ¡Î ÓÃ½üÈÐ ±ÉÌ¸¡ñ¸. þíÌ I = þ¨½î ºÌ¸Ãò¾¢ý ¿¢¨Ä¨Áò ¾¢Õô¨Òò¾¢Èý I=¿¦Çõ, c= Å¢¨Èô¨ÒÌ Ì½¸õ d=¸ÕÅ¢Â¢ý ÌÚÌÌ ¦ÅðÎ Åð¼ôÀÌ¾¢Â¢ý Å¢ð¼õ ¬Ìõ)

ÀÂ¢üº¢¸û

1-5 À¢ýÅÕõ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢ý ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÂ¢ø, µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢¨ÂÌ ¸¡ñ¸.

(1) $15\underline{i}-6\underline{j}+10\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{19}(15\underline{i}-6\underline{j}+10\underline{k})$]

(2) $10\underline{i}+20\underline{j}-20\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{3}(\underline{i}+2\underline{j}-2\underline{k})$]

(3) $32\underline{i}-16\underline{j}+4\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{9}(8\underline{i}-4\underline{j}+\underline{k})$]

(4) $4\underline{i}+3\underline{j}-5\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{5\sqrt{2}}(4\underline{i}+3\underline{j}-5\underline{k})$]

(5) $5\underline{i}-2\underline{j}+14\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{15}(5\underline{i}-2\underline{j}+14\underline{k})$]

1-6 À¢ýÅÕõ ¾¢¨ºÂ¢¸û ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¸ÙÌ ±¾¢÷¾¢¨º¸Ç¢ø µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢¸¨ÇÌ ¸¡ñ¸.

(1) $-10\underline{i}+6\underline{j}-15\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{19}(10\underline{i}+6\underline{j}-15\underline{k})$]

(2) $-9\underline{i}+8\underline{j}-12\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{17}(9\underline{i}+8\underline{j}-12\underline{k})$]

(3) $200\underline{i}-100\underline{j}-200\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{3}(-2\underline{i}+\underline{j}+2\underline{k})$]

(4) $36\underline{i}+72\underline{j}+9\underline{k}$ [Å¢¨¼: $\frac{1}{9}(-4\underline{i}-8\underline{j}+\underline{k})$]

$(5) 3\underline{i}+12\underline{j}-4\underline{k}$ [Å¢ ¨ ¼: $\frac{1}{13}(-3\underline{i}-12\underline{j}+4\underline{k})$]

$(6) 350\underline{i}-50\underline{j}-125\underline{k}$ [Å¢ ¨ ¼: $\frac{1}{15}(-14\underline{i}++2\underline{j}-5\underline{k})$]

$(7) -50\underline{i}+200\underline{j}+40\underline{k}$ [Å¢ ¨ ¼: $\frac{1}{21}(5\underline{i}-20\underline{j}-4\underline{k}$]

1-7 ¾¢ ¨ ºÂ¢-ý ± ñ Á¾¢ôÒõ, « Ð ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢Ôõ ¸¦§Æ ¾ÃôÀð Î û Ç É. ¯ ¸ó¾ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â Ì ¸ ¡ ñ ¸.

$(1) |\underline{A}| - A = 42, \cdot_A = \frac{1}{7}(3\underline{i}+6\underline{j}+2\underline{k})$

[Å¢ ¨ ¼: $\underline{A} = (18\underline{i}+36\underline{j}+12\underline{k})$ ¸¢ ¸¢.]

$(2) R = 2100, \cdot_R = \frac{2}{7}\underline{i}+\frac{6}{7}\underline{j}+\frac{3}{7}\underline{k}$

[Å¢ ¨ ¼: $\underline{R} = (600\underline{i}+1800\underline{j}+900\underline{k})$ Á¢.]

$(3) |\underline{A}| = 100, \underline{\cdot_A} = 0.8\underline{i}-0.6\underline{j}$

[Å¢ ¨ ¼: $\underline{A} = 80\underline{j}-60\underline{k}$]

$(4) A = 90,, \underline{\cdot_A} = -\frac{2}{3}\underline{i}+\frac{1}{3}\underline{j}+\frac{2}{3}\underline{k}$

[Å¢ ¨ ¼: $\underline{A} = -60\underline{i}+30\underline{j}+60\underline{k})$]

$(5) A = 50, \cdot_A = \frac{1}{2}\underline{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}-\frac{1}{2}\underline{k}$

[Å¢ ¨ ¼: $\underline{A} = 25\underline{i}+35.35\underline{j}-25\underline{k}$]

1-8 A, B ± ý È ÒûÇ¢¸Ç¢ý ¿¢ ¨ Äò ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ û (position vectors) Ó ¨ È§Â $3\underline{i}-2\underline{j}+5\underline{k}; 5\underline{i}+3\underline{j}-6\underline{k}$ ± ý È¡ø, AB ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ ÂÔõ, « ¾ ý ¾¢ ¨ º Ì ¸¢¼Ì ¨ ¸ ¸ ¨ ÇÔõ ¸ ¡ ñ ¸.

[Å¢ ¨ ¼: $2\underline{i}+5\underline{j}-11\underline{k}, l = \frac{2}{5\sqrt{6}}, m = \frac{1}{\sqrt{6}}, n = -\frac{11}{5\sqrt{6}}$]

1-9 §¿÷Ì §¸¡ðÊø þÂ í Ì õ Ð¸û ´ ý Ú (6, 13, 7) ± ý È ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ, (10, -3, 4) ± ý È ÒûÇ¢Ì Ì î ¦º ý È¡ø, Ð¸Ç¢ý þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ ¨ Â Ì ¸ ¡ ñ ¸.

[Å¢ ¨ ¼: $4\underline{i}-16\underline{j}-3\underline{k}$]

1-10 $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ Í ð¼ ¨ ÁôÀ¢ø, (3,4,5) ± ý È ÒûÇ¢Ì Ì ²üÈ ¿¢ ¨ Äò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â Ì ¸ ¡ ñ ¸. « ¾ ý ± ñ Á¾¢ô ¨ ÀÔõ, ¾¢ ¨ º Ì ¸¢¼Ì ¨ ¸ ¸ ¨ ÇÔõ ¸ ¡ ñ ¸.

[Å¢ ¨ ¼: $3\underline{i}+4\underline{j}+5\underline{k}, 5\sqrt{2}, 1 = 0.4242, m = 0.5656, n = 0.707$]

1-11 ´Õ ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ 50 ±É ×õ, « Ð ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î x,y,z « î Í ¸ Ù¼ý Ó ¨ È§Â $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ ± ý È §¸¡½ í ¸ ¨ Çò ¾¡í Ì Å¾¡¸ ×õ ¦¸¡½¼¡ø, « ò¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â Ì ¸ ¡ ñ ¸.

[Å¨ ¼: $35.35\underline{i}+25\underline{j}-25\underline{k}$

1-12 $R_i,=(i=1,2,3)$ ±ýÈ ÒûÇ¸û (x_i,y_i,z_i) ±ýÈ þ¼í¸ÇÖõ, $\tilde{R}$ ±ýÈ ÒûÇ (x_i,y_i,z_i) ±ýÈ þ¼ò¾Öõ «¨ÁóÐ, «¨Å¸Ùìì¡Â ¿¨Äò ¾¨ºÂ¸û, $10\tilde{R}=2\underline{R_1}+3\underline{R_2}+5\underline{R_3}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ð¨¼ Å¨ÃÂÚì¸ýÈÉ. þîºÁýÀ¡ðÊüÌî º¡¿¸Ã¡É ã ýÚ ±ñ ½î ºÁýÀ¡ Î¸¨Ç (Scalar Equation) Å¨ÃÂÚì¸.

1-13 P(1 (10^{-2}),1 (10^{-2}), 1(10^{-2})) Á ±ýÈ ÒûÇ, (0.500,-0.707, 0.500) ±ýÀ¨Å¸¨Çò ¾¨ºì¸¼ì¨¸¸Ç¡¸ì ¦¸¡ñ¼ ´Õ §¿÷§¸¡ðÊø ¯ûÇÐ. «ì §¸¡ðÊø Pìì þÕÒÈí¸ÇÖõ [5(10^{-2})] Á ¦¾¡¨ÄÅø «¨ÁÔõ ÒûÇ¸Ùìì ¯¡Â ¿¨Äò ¾¨ºÂ¸¨Çì ¸¡ñ¸.

[Å¨ ¼: $\{\frac{7}{2}\underline{i}+(1-\frac{5}{\sqrt{2}})\underline{j}+\frac{7}{2}\underline{k}\}$ (10^{-2})Á

$\{-\frac{3}{2}\underline{i}+(1+\frac{5}{\sqrt{2}})\underline{j}+\frac{3}{2}\underline{k}\}$ (10^{-2})Á]

1-14 $\underline{A}$ ±ýÈ ¾¨ºÂ-ý ÐÅì¸ôÒûÇ (5,3,4) ¬¸×õ ÑÉôÒûÇ (11,8,-5) ¬¸×õ þÕìÌ ¦ÁÉø $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ¾¨º¸Çø «¾ý À¸÷×¸¨Çì¸¡ñ¸.

[Å¨ ¼: $A_x=6, A_y=5, A_z=-9$]

1-15 ±ñ Á¾ôÒ 210 Áð¼÷ ¯ûÇ ´Õ ¾¨ºÂ, (-1, 5, 4) ±ýÈ ÒûÇ¨Â, (5, 3, 1) ±ýÈ ÒûÇÔ¼ý §º÷ò¾Ìõ ¾¨ºÂø ¦ºÂüÀÎÁ¡É¡ø «¾ý x, y, z À¸÷×¸¨Çì¸¡ñ¸.

[Å¨ ¼: 180, -60, -90 Á.]

1-16 7500 ¸.¸. ±¨¼ÔûÇ Å¨º ´ýÚ, $\frac{1}{25}(7\underline{i}-24\underline{k})$ ±ýÈ ¾¨ºÂìÌ þ¨½Â¡¸î ¦ºÂüÀÎ¦ÁýÈ¡ø, «¨¾ $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ Íð¼¨ÁôÒìÌ ²üÈÅ¡Ú Å¨ÃÂÚì¸.

[Å¨ ¼: $300(7\underline{i}-24\underline{k})$ ¸.¸. ±¨¼]

1-17 ±ñ Á¾ôÒ 42 ¸.¸. ¯¨¼ÂÐõ, ¾¨ºì¸¼ì¨¸¸û $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ ±ýÚõ ¯ûÇ ¾¨Â¨Âì¸¡ñ¸. [Å¨ ¼: $(28\underline{i}-14\underline{j}-28\underline{k})$ ¸.¸]

1-18 ±ñ Á¾ôÒ 45 ¸.Áð¼Õõ, ¾¨ºì§¸¡½í¸û (Direction Angles) ~, ,¥ Ó¨È§Â $37^\circ,90^\circ,127^\circ$ ±ýÚõ ¯¨¼Â ¾¨ºÂ¨Âì¸¡ñ¸.

[Å¨ ¼: $(3.6\underline{i}-2.7\underline{k})$ ¸. Áð¼÷]

1-19 70 ¸Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ Å¨º ´ýÚ, $2\underline{i}+3\underline{j}-6\underline{k}$ ±ýÈ ¾¨ºÂìÌ þ¨½Â¡¸ ¦ºÂüÀÎÁ¡É¡ø, «ùÅ¨º¨Âì¸¡ñ¸.

[Å¨ ¼: $(20\underline{i}+50\underline{j}-60\underline{k})$ ¸Ã¡õ]

1-20 À¢ý ÅÕõ ¾¢¨ºÂ¢¸Ù ì Ì ¯¡¢Â ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ¾¢¨ºÂ¢-ý ± ñ Á¾¢ô¨ ÀÔõ, «Ð ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢¨ºÂ¢ø µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢¨ ÂÔõ ¸¡ ñ ¸.

(1) $\underline{A} = \underline{i} + \underline{j}$

$\underline{B} = -\underline{j} + \underline{k}$ [Å¢¨¼: $1.414, 0.707\underline{i}, 0.707\underline{k}$]

(2) $\underline{A} = 2\underline{i} - 3\underline{k}$

$\underline{B} = \underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k}$ [Å¢¨¼: $9, 0.333\underline{i}, +0.667\underline{j} - 0667\underline{k}$]

(3) $\underline{A} = 7\angle 30^{\circ}$

$\underline{B} = 7\angle 150^{\circ}$ [Å¢¨¼: $7, \underline{j}$]

(4) $\underline{A} = 10\angle 120^{\circ}$

$\underline{B} = 10\angle 45^{\circ}$ [Å¢¨¼: $15.9, 0.130\underline{i}, +0.99\underline{j}$]

(5) $\underline{A} = 3\underline{i} - 5\underline{j} - 2\underline{k}$

$\underline{C} = -5\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ $\underline{B} = 4\underline{i} - 7\underline{j} + 4\underline{k}$ [Å¢¨¼: $15, \frac{1}{15}(2\underline{i} - 14\underline{j} + 5\underline{k})$]

(6) $\underline{A} = 6\underline{i} + 8\underline{j}$

$\underline{B} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$

$\underline{C} = 3\underline{i} + 4\underline{j} - 5\underline{k}$ [Å¢¨¼: $10\sqrt{3}, \frac{1}{15\sqrt{3}}(15\underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k})$]

(7) $\underline{A} = 6\underline{i} + 10\underline{j} + 16\underline{k}$

$\underline{B} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$ [Å¢¨¼: $R = 25.7\underline{i} + 24.7\underline{j} + 16\underline{k}$]

$\underline{C} = 25\angle 45^{\circ}$

(8) $\underline{A} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k}$

$\underline{B} = 3\underline{i} - 3\underline{j} - 2\underline{k}$ [Å¢¨¼: $5, 0.6\underline{i} + 0.8\underline{j}$]

$\underline{C} = -2\underline{i} + 4\underline{j} - 3\underline{k}$

1-21 À¢ý ÅÕõ ¸ ½ ì Ì ¸Ç¢ø ´Õº¢Ä ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ ¸Ù õ, « ¨Å ¸ û ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î ¸Ç¢ý ¾¢¨ºÅ¢¸¢¾¾í ¸ Ù õ (Direction rations) ¾Ãô Àð Î ûÇÉ. «ò¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ¾¢¨ºÂ¢¨ Âì ¸¡ ñ ¸. «¾ý x, y, z À¸¢÷× ¸ ¨ ÇÔõ, «Ð ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊ ý ¾¢¨º ì ¸¢¼¼ì ¨ ¸ ¸ ¨ ÇÔõ, ¸¡ ñ ¸.

¾¢¨ºÂ¢	± ñ Á¾¢ôÒ	¾¢¨º Å¢¸¢¾ ± ñ ¸ û
$\underline{A}$	$A = 98$ ¸¢.¸¢	$(-6.18, 1)$
$\underline{B}$	$B = 76$ ¸¢.¸¢	(-6, 18, 1)
$\underline{C}$	$C = 90$ ¸¢.¸¢.	$(4, -1, 8)$

[Å¢¨¼: $\underline{R} = 58\underline{i} + 90\underline{j}, R_x = 58$ ¸¢.¸¢., $R_y = 90$ ¸¢.¸¢.

$R_z = 0; l = \frac{58}{\sqrt{11464}}, m = \frac{90}{\sqrt{11464}}; n = 0$]

¾¢¨ºÂ¢ ± ñ Á¾¢ôÒ ¾¢¨º Å¢¸¢¾ ± ñ ¸ û

(ii) $\underline{A}$ A= 150 (2, -2, 1)
$\underline{B}$ B = 175 (2, +3, -6)
$\underline{C}$ C = 135 (-4, -8, -1)

[Å¢ ¨ ¼: $\underline{R} = 90\underline{i} - 145\underline{j} - 115\underline{k}, R_x = 90, R_y = -145$
$R_z = -115; l = 0.4373, m = -0.7046; n = -0.5588$]

(iii) $\underline{A}$ A = 130 (-5, 12, 0)
$\underline{B}$ B = 100 (0, -4, 3)
$\underline{C}$ C = 150 (1, -2, -2)
$\underline{D}$ D = 70 (-3, 6, 2)

[Å¢ ¨ ¼:] $\underline{R} = -30\underline{i} + 100\underline{k}, R_x = -30, R_y = 0, R_z = 100,$
$l = -0.2873, m = 0, n = 0.9578$

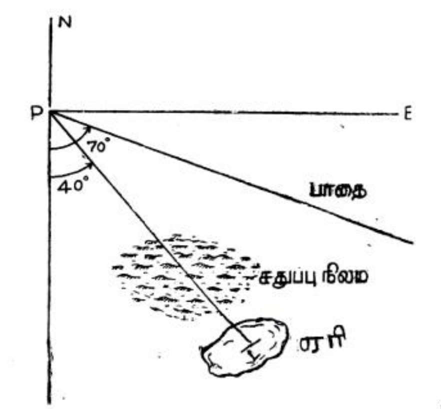
(iv) $\underline{A}$ A = 1900 (18, 1, -6)
$\underline{B}$ B = 1700 (-8, 0, 15)
$\underline{C}$ C = 2500 (0, 0, -1)
$\underline{D}$ D = 1500 (-14, -5, 2)
$\underline{E}$ E = 1300 (4, 12, -3)

Å¢ ¨ ¼ : $\underline{R} = 800\underline{j} - 1700\underline{k}, R_x = 0, R_y = 800, R_z = -1700,$
$l = 0, m = 0.4255, n = -0.9043$
¾¢ ¨ ºÂ¢ ± ñ Á¾¢ôÒ
¾¢ ¨ ºÅ¢ ¸¢¾ ± ñ ¸ û

(v) $\underline{A}$ A = 380 (18, 1, -6)
$\underline{B}$ B = 340 (-8, 0, 15)
$\underline{C}$ C = 500 (0, 0, -1)
$\underline{D}$ D = 300 (-14, -5, 2)
$\underline{E}$ E = 260 (4, 12, -3)

Å¢ ¨ ¼: $\underline{R} = -340\underline{j} - 340\underline{k}, R_x = 0, R_y = 160, R_z = -340,$
$l = 0, m = 0.4255, n = -0.9043$

1-22 ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢ PÄ¢ÕóÐ, ÁÉ¢¾÷ ¿¼Á¡¼ ÓÊÂ¡¾ ºÐôÒ¿¢Äò¾¢ü Ì « ôÀ¡ø, $S40^\circ E$ ± ýÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø 2.5 ¸¢.Á¢ §¿Ã¡É ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢ø ´Õ ²¡¢ ¯ ûÇÐ.



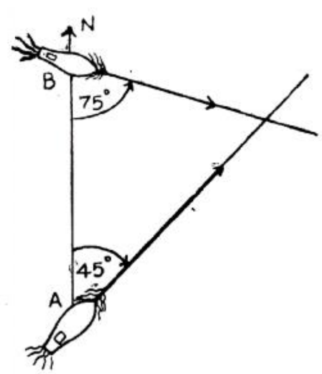
À¼õ 1-69

¬ É¡ø Pø $S70^{\circ}E$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ø ÁÉ¢¾÷ ¿¼Á¡ Î Å¾ü Ì ¸ó¾ ´Õ §¿Ã¡É À¡¨¾ ¯ûÇÐ. (À¼õ 1-69ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú). Á¢ýÀ¢ÊôÀÅý ´ÕÅý, À¡¨¾Â¢ø ±ôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ ²¡¢¨Â Á¢¸ì Ì ¨Èó¾ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø « Î ¸ÓÊÔõ ±Éì ¸¡ ñ ¸. «ô ÒûÇ¢ì Ì õ ²¡¢ì Ì õ ¯ûÇ ¦¾¡¨Ä¨ ÅÔõ, «ôÒûÇ¢Â¢ø ²¡¢ «¨Áò¾¢ Î õ §¸¡½ò¨¾Ôõ ¸¡ ñ ¸.

[Å¢¨¼ : ¦¾¡¨Ä× = 1.25 ¸¢.Á£.,] $S20^{\circ}W$

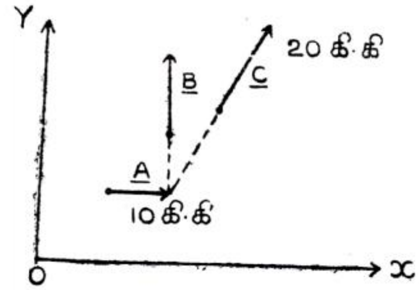
1-23 A ±ýÈ ¸ôÀÄ¢ý ¾¨ÄÅ÷, §Ã¼¡÷ ¾¢¨ÃôÀ¼ò¾¢ø (Radar screen) ¾Éì Ì §¿÷ Å¼ ¾¢¨ºÂ¢ø, 30 ¸¢.Á£ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø B ±ýÈ ¸ôÀø, $S75^{\circ}E$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ø, 30 ¸¢.Á£ §Å¸ò¾¢ý «Ä Ì §Å¸ò¾¢ø ¦ºøÅ¾¡¸ì ¸ ñ ¼¡÷. «ô¦À¡ØÐ, A ±ýÈ ¸ôÀø, $N45^{\circ}E$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ø 20¸¢.Á£ §Å¸ò¾¢ý «Ä Ì §Å¸ò¾¢ø ¦ºýÚ ¦¸¡ ñ ÊÕó¾Ð. (À¼õ 1-70 À¼ò¾¢ø ¸ôÀø¸Ç¢ý ¦¾¡¼ì ¸ò¾¢ø ¯ûÇ «¨ÁôÒì ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÐ.) (a) B ±ýÈ ¸ôÀø, Aý ¾¢¨º¨Âì ¸¼ì Ì õ§À¡Ð, AÂ¢Ä¢ÕóÐ ±ùÅÇ× ¦¾¡¨ÄÅ¢Öû Ç ±ýÀ¨¾Ôõ, (b) A ±ýÈ ¸ôÀø, B þý ¾¢¨º¨Âì ¸¼ì Ì õ§À¡Ð, B ±ýÈ ¸ôÀø AÂ¢Ä¢ÕóÐ ±ò¦¾¡¨ÄÅ¢ÖûÇÐ ±ýÀ¨¾Ôõ ¸¡ ñ ¸.

[Å¢¨¼: (a) 18.8 ¸¢. Á£.; (b) 25.3 ¸¢.Á£]



À¼õ 1-70

1-24 À¼õ 1-71þø, A ¸¢¨¼ò ¾¢¨ºÂ¢ø, 10 ¸¢.¸¢. Å¢¨º), B (¿¢¨Äì Ì ò¾¡ý ¾¢¨ºÂ¢ø) ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡Ì ÀÂý Å¢¨º C (20 ¸¢.¸¢. Å¢¨º) ±ýÈ¡ø, B þý ± ñ Á¾¢ô¨ÀÔõ, C ±ò¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ¼ §Å ñ Î ¦ÁýÀ¨¾Ôõ, Å¨ÃÀ¼ Å¢Çì¸õ, ¸½ì¸¢Â¢ø Ó¨È ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ãÄÁ¡¸ì ¸¡ ñ ¸.



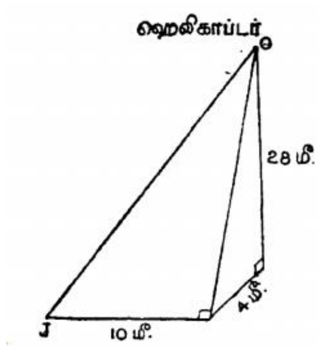
À¼õ 1-71

[Å¢¨¼: $|\underline{B}| = 17.3$ ¸¢.¸¢., x «î Í¼ý 60° §¸¡½ò¨¾ «¨Áì Ìõ ¾¢¨ºÂ¢ø C ¦ºÂüÀ¼§Å ñ Î õ.]

1-25 1-24 ÅÐ ¸½ì ¸¢ø (À¼õ 1-71), $\underline{B}, \underline{A}$ ஆ¢ÂÅüÈ¢ý §ÅÚÀ¡ Î , 30 ¸¢.¸¢ ±¨¼ ± ñ Á¾¢ôÒû Ç D ±ýÈ Å¢¨சயை Å¨ÃÂÚì Ì ¦ÁýÈ¡ø, $\underline{B}$ ý ± ñ Á¾¢ô¨ÀÔõ, $\underline{D}$ ¦ºÂüÀÎ õ ¾¢¨º¨ÂÔõ காண்க).

Å¢¨¼; B = 28.28 ¸¢.¸¢ Å¢¨º, $109^\circ 28'$]

1-26 ƒÅ¡ý (Soldier) ´ÕÅ¨Ã ÁÇ¨ÅôÀ¾ü¸¡¸ ¸Å ñ ¸Â¢Ú ´ýÚ (Sling) ¦†Ä¢¸¡ô¼¡¢ÄÕóÐ ÀÂýÀÎò¾ôÀð¼Ð. ¸Å ñ ¸ÂüÈ¢ø 88¸¢.¸¢. þØÅ¢¨º ²üÀð¼Ð. ¦†Ä¢¸¡ô¼¨Ã Íð¼¨ÁôÀ¡¸ì ¦¸¡ ñ Î §¿¡ì Ì í ¸¡ø ƒÅ¡ý 28Á£ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø ¸£ú§¿¡ì ¸¢Ôõ, 10Á£ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø ¦†Ä¢¸¡ô¼Õì Ìô À¢ýÒÈÓõ, 4Á£ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø ¦†Ä¢¸¡ô¼Õì Ìô Àì¸Å¡ðÊÖõ ¯ûÇ ¿¢¨ÄÂ¢ø þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ ñ Î , (À¼õ 1-72 þø ¸¡ðÊÔûÇÀÊ) þØÅ¢¨º¸Ç¢ý

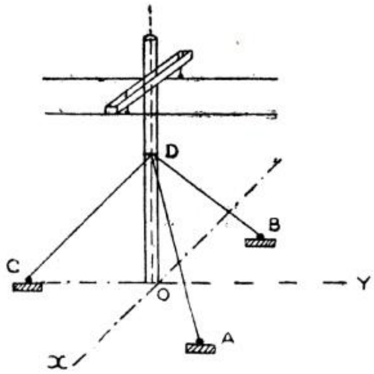


À¼õ 1-72

À¸¢÷×¸û, ¾Ìó¾ «î Í¸¨Çî Íð¼¨ÁôÀ¢ø ±Î òÐ Å¨ÃÂÚì ¸.

[Å¢¨¼: 42 ¸¢.¸¢. (¸£ú§¿¡ì ¸¢); 29.2 ¸¢.¸¢ (À¢ýÒÈõ) : 11.6 ¸¢.¸¢ (Àì¸Å¡ðÊø)]

1-27 ¦¾¡¨Ä§Àº¢ ¸õÀõ ´ýÚ À¼õ 1-73ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ã ýÚ ÅÖÅ¡É ¸õÀ¢¸Ç¡ø (Cables), A(5, 4, 0)Á£ $B(-6,\frac{3}{3},0)C(0,-6,0)$ Á£ C (0,-6,0)Á£ ±ýÈ ÒûÇ¢¸¨Ç §¿¡ì¸¢Â ¾¢¨º¸Ç¢ø «¨ÁÔÁ¡Ú ¸õÀò¾¢ý µ÷ ÒûÇ¢Â¢ø ¸ð¼ôÀð Î ûÇÐ. «ôÒûÇ¢ «Êò¾Çò¾¢Ä¢ÕóÐ $\frac{35}{3}$ Á£ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø



À¼õ 1-73

¯ûÇÐ. ¸õÀ¢ ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ 60 ¸¢.¸¢. þØÅ¢¨º ²üÀÎ Å¾¡¸¢ø, «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºÌ Ì¡¢ய ௬ ñ Á¾¢ô¨ÀÔõ, «Ð ¦ºÂ்படுõ §¸¡ðÊý ¾¢¨ºÌ ¸¢¼Ì¨¸¸¨ÇÔõ ¸¡ñ¸.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Å¢¨¼ ; R } = 158.5 \text{ ¸¢.¸¢,} \\ l == 0.0284, m = 0.0172, n = 0.996 \end{array}\right)$$

1-28 Ó¾ø ±ñ ÀÌ¾¢Â¢ø (First octant), Íð¼¨Áôòô ÒûÇ¢ O ÅÆ¢Â¡¸×õ, x, y, z «îÍ¸Ù¼ன் ºÁÁ¡É §¸¡½ í௬¨Ç «¨ÁÌÌõ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎõ. µÃÄÌò ¾¢¨சயின் À¸¢÷×¸¨ÇÌ ¸¡ண¸. «Ð ²¾¡Å¦¾¡Õ «îÍ¼ý «¨ÁÌÌõ §¸¡½ò¨¾பும் கா ñ¸.

$$\left[\text{Å¢¨¼ ; } \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 54.7^{\circ}\right]$$

1-29 Íð¼¨Áôòô ÒûÇ¢, O ÅÆ¢Â¡¸×õ, x, y, z «îÍ¸Ù¼ý ºÁÁ¡É §¸¡½í¸¨Çò ¾¡íÌõ §¿÷§¸¡ðÊø, $(3\underline{i} - 4\underline{j} + 12\underline{k})$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢-ý ±ñ ½¢ô ÀÌ¾¢¨Â (Scalar component) ¸¡ñ¸.

$$(\text{Å¢¨¼ } \frac{11}{\sqrt{3}})$$

1-30 $\underline{A}$, $\underline{B}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û À¢ý ÅÕÁ¡Ú Å¨ÃÂÚì¸ô Àð Î ûÇÉ.

$\underline{A} = 3\underline{i} - 4\underline{k}; \underline{B} = 2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$

(a) B தி¢¨ºÂ¢ ¦ºÂüÀÎõ ¾திசையில், $\underline{A}$ þý Å¡úî º¢¨ÂÌ ¸¡ñ¸.

(b) þரு ¾¢¨ºÂ¢¸ÙìÌ þடையிலைáÔõ §¸¡½ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.

$$\left[\text{Å¢¨¼ } (a)\frac{2}{3}(b)82^{\circ}20'\right]$$

$\underline{F} = \underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$ ±ýÈ Åிசையின் Å¡úî º¢¨Â x =y = 2z ±ýÈ §¿÷§¸¡ðÎò ¾¢¨ºÂ¢ø ¸¡ñ¸.

$$\left[\text{Å¢¨¼ } \frac{8}{3}\right]$$

1-31 $\underline{A}$ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢ ±É¢ý, $|\underline{A}|^2 = \underline{A}.\underline{A}$ ±ýÚ ¿¢Ú×¸. $\underline{A}, \underline{B}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸Ùì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ ÁÔõ §¸¡½õ θ ±ýÈ¡ø,

$$|\underline{A}+\underline{B}|^2 = |\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2 + 2|\underline{A}||\underline{B}|\cos^{-}$$ ±É ¿¢åÀ¢ì ¸.

1-32 $\underline{A}+2\underline{B}+5\underline{C}, 3\underline{A}+2\underline{B}+\underline{C}, 2\underline{A}+2\underline{B}+\underline{C}$ ¬¸¢Â ¿¢¨Äò ¾¢¨ºÂ¢¸Ùì Ì ¯¡¢Â ÒûÇ¢¸û ´Õ §¸¡ðÊÖûÇÉ ±É ¿¢Ú×¸.

[ÌÈ¢ôÒ ; ¾¢¨ºÂ¢¸Ùì Ì ¯¡¢Â ÒûÇ¢¸û P, Q. R, ±ýÈ¡ø $\underline{PR}+\underline{RQ}=\underline{PQ}$ ¬ Ìõ.]

1-33 ¿¢¨Äò ¾¢¨ºÂ¢¸û $2\underline{i}-3\underline{j}+4\underline{k}, 7\underline{i}-\underline{j}+8\underline{k}, 24\underline{i}+2\underline{j}+24\underline{k}$ ±É×¨¼Â ÒûÇ¢¸û ´Õ §¿÷§¸¡ðÊÄ¨ ÁÔõ ±É ì ¸¡ ñ ¸.

1-34 A, B, C ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¢ý ¿¢¨Äò ¾¢¨ºÂ¢¸û Ó¨È§Â 2i - 3j + k, 4j - 2j + 3k, 3i -4j ஆகும். $\underline{AB}, \underline{AC}$ ஆகிய ¾¢¨ºÂ¢¸Ùì Ì þ¨¼Â¢¨ ÁÔõ §¸¡½ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.

$$\left(\text{Å¢¨¼}\quad \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{18}\right)\right)$$

1-35 2i - 2j + k, 4i, - 3k என்ற ¾¢¨ºÂ¢¸Ùì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ ÁÔõ §¸¡½ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.

$$\left(\text{Å¢¨¼}:\ 70\cdot5^\circ\right)$$

1-36 (2, 0, 5), (3, -6, -6) ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¢ý ¿¢¨Äò ¾¢¨ºÂ¢¸Ùì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ Áயும் §¸¡½ò¨தக் காண் ¸.

$$\left(\text{Å¢¨¼}:\ 119\cdot7^\circ\right)$$

1-37 A, B, C ±ýÈ Òள்ளிகள் Ó¨È§Â, (3, -2, 6), (5, -2, 7), (1, -1, 6) ±ý ÛÁ¡¼ í ¸ளில் «¨ÁÔமென்றாø, AB, AC ¬¸¢Â §¿÷§¸¡Î¸Ùì Ì þ¨¼Â¢ÖûÇ கோ½ò¨¾ì காண்க.

$$\left(\text{Å¢¨¼}:\ 143\cdot2^\circ\right)$$

1-38 þÕ நே÷§¸¡Î களின் ¾¢¨ºì ¸¢¼ì ¨¸¸û Ó¨È§Â $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ ±ýÈ¡ø, « வைகÙì Ì இடைÂ¢Ä¨ ÁÔõ §¸¡½ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.

$$\left(\text{Å¢¨¼}:\ 90^\circ\right)$$

1-39 À¢ýÅÕõ ¦¾¡Ì¾¢¸Ç¢ÖûÇ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´ýÚì ¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ ¯Ç ±É ì ¸¡ð Î ¸.

$(1)-6i+9j+k, 5i+4j-6k$

$(2) i+2j+3k, -16i+5j+2k$

$(3) 8i-3j+5k, -3i+7j+9k$

1-40 $6i+yj-2k, 9i-4j+15k$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û ´ ý Ú ì ¦ ¸ ¡ ý Ú ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ « ¨ ÁÔ ¦ Á ý È¡ø, y-ý Á¾¢ô ¨ À ì ¸ ¡ ñ ¸ .

(Å¢ ¨ ¼ ; Y = 6)

1-41 2x - y + 2z = 1, x - y = 2 ± ý È ¾Ç í ¸ Ù ì Ì Þ ¨ ¼ôÀ¢Ä ¨ ÁÔõ §¸ ¡ ½ ò ¨ ¾ì ¸ ¡ ñ ¸ .

(Å¢¨¼; 45°)

1-42 $7x+4y+4z+3=0, 2x+y-2z+2=0$ ± ý È ¾Ç í ¸ Ù ì Ì Þ ¨ ¼ôÀ¢Ä ¨ ÁÔõ §¸ ¡ ½ ò ¨ ¾ì ¸ ¡ ñrக.

(Å¢¨¼: $\cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$)

1-43 $7i+2j+k, 2i-4j+3k$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸Çின் ± ñ ½¢ô ¦ÀÕ ì ¸¢, Ì Ú ì Ì ô ¦ÀÕ ì ¸¢ ¬ ¸¢ÂÅü¨றைச் ¸ ¡ ñ ¸ . Þ ùÅ¢Õ ¾ிசைÂ¢ ¸ Ù ì Ì Þ ¨ ¼ôÀ¢Ä ¨ ÁÔõ §¸ ¡ ½ ò ¨ ¾Ôõ ¸ ¡ ண்க.

(Å¢¨¼ ; $9; 10i-19j-6k; 76^\circ, 51'$)

1-44 (i, j, k) ¸ ð¼ மைôÒ Ó ¨ ÈÂ¢ø, $2i-3j+4k$, ¡ -4k ¬ ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ù ì Ì î ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ × û Ç அலகு ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â ì ¸ ¡ ñ ¸

(Å¢¨¼: $\frac{1}{\sqrt{33}}(4i+4j+4k)$)

1-45 $\underline{A}=\underline{i}-3\underline{j}+2\underline{k}, \underline{B}=2\underline{i}+3\underline{j}-\underline{k}$ ± ý È¡ø $(\underline{A}\wedge\underline{B})$ ý À ¸¢÷ ¨ Å, (3i - 4k) ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¦ ºÂüÀ Î õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¸ ¡ ñ ¸ .

(Å¢ ¨ ¼ ; -3i + 4k)

1-46 ±ùÅ¡¾ ¿¢ ¨ Ä ¨ Á ¸ Ç¢ø, $\underline{A}\wedge\underline{C}=\underline{B}\wedge\underline{C}$ ± ý È ºÁ ý À¡ðÊø ¦À¡Ð ì ¸¡Ã½¢ ¸ ¨ Ç ¿¦ì ¸ ÓÊÔõ?

1-47 $\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}, 2\underline{i}+\underline{j}-\underline{k}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ù ì Ì Þ ¨ ¼ôÀ¢Ä ¨ ÁÔõ Ì Ú í §¸ ¡ ½ ò ¨ ¾ì ¸ ¡ ñ ¸ . Þ ùÅ¢Õ தி ¨ ºÂ¢ ¸ Ù ì Ì õ ¦ ºங்குத்¾¡ ¸ × û Ç µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ ÂÔõ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ .

(Å¢¨¼ $60^\circ; \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i}-\underline{j}+2\underline{k})$)

1-48 $(3\underline{i}+2\underline{j}-\underline{k}), (-2\underline{i}+3\underline{j}-4\underline{k})$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ¾Çò¾¢ü Ì î

¦º í Ì òÐ ¾¢ணைசயி¢ø µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Âì ¸¡ ñ ¸ . þ ùவிரு ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç « ñ ¨ ¼ô Àì ¸ í ¸ Ç¡ ¸ ì கெ¡ ñ ¼ þ ¨ ½ ¸ Ãò¾¢ ý ÀÃôÀÇ ¨ Åக் க¡ ñ ¸ . « ¨ Å ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ Áயும் (Ì Ú í § ¸ ¡ ½ ò ¨ ¾Ôõ ¸ ¡ ñ ¸ .

$$\left(\text{Å¢¨¼:}\ \frac{1}{\sqrt{390}}(-5\underline{i}+14\underline{j}+13\underline{k});\sqrt{390};73^\circ 52'\right)$$

1-49 $\underline{A}=i+3\underline{j}-\underline{k},\underline{B}=2\underline{i}+\underline{j}+4\underline{k}$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢...û Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ¾Çò¾¢ü Ì ¦º í Ì ò¾¡ ¸ ¯ ûÇ தின ºÂ¢ø µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨யைக் ¸¡ ñ ¸ . þ ùÅ¢Õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç « ñ ¨ ¼ô Àì ¸ í ¸ளாகக் ¦ ¸ ¡ ñ ¼ Ó ì § ¸ ¡ ½ òதின் ÀÃôÀÇ ¨ ÅÔõ ¸ ¡ ñ ¸ .

$$\left(\text{Å¢¨¼}\pm\frac{\sqrt{2}}{10}(4\underline{i}-3\underline{j}+5\underline{k});\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

1-50 $\underline{A}=12\underline{i}+13\underline{j}+10\underline{k},\underline{B}=5\underline{i}-9\underline{j}+7\underline{k}$± ý È¡ø (a) $(a)\underline{A}\wedge\underline{B}(b)\underline{A},\underline{B}$ ³ ì ¸ ¡ ñ ¸ . (b) (a) ø ¸ ñ ¼È¢ó¾ ¾¢ ¨ ºÂ¢, $\underline{A},\underline{B}$ ¬ ¸¢ÅüÈ¢ü Ì î ¦º í Ì ò¾¡ ¸ ¯ ûÇÐ ± ý À ¨ ¾ì ¸ ¡ð Î ¸ . (c) $\underline{A},\underline{B}$ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ù ì Ì î ¦º í Ì ò¾¡ ¸ × ûÇ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Âì ¸ ¡ ñ ¸ . (d) þÕ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ § ¸ ¡ ½ ò¾¢ ý ¦¿ Î ì ¨ ¸ ¨ ÂÔõ (Sine) ¸ ¡ ñ ¸ .

$$\left(\begin{array}{ll} & (a)18l\underline{i}-34\underline{j}-173\underline{k}\\ \text{Å¢¨¼ ;} & (b)\dfrac{1}{\sqrt{63846}}(18l\underline{i}-34\underline{j}-173\underline{k})\\ & (d)0.9973\end{array}\right)$$

1-51 $\underline{A}=\underline{i}+2\underline{j}+2\underline{k},\underline{B}=3\underline{i}-2\underline{j}+\underline{k}$ என்ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç « ñ ¨ ¼ Àì ¸ í ¸ Ç¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼ þ ¨ ½ ¸ Ãத்தின் ÀÃôÀÇ¨வைக் க¡ ñ ¸ .

$$\left(\text{Å¢¨¼ ;}\ 5\sqrt{5}\right)$$

1-52 À¢ ý ÅÕõ ¦¾¡ Ì ¾¢ ¸ Ç¢ø ¸ ñ ¼ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û þ ¨ ½ Â¡ ¸ þÕì Ì õ ±É ì ¸ ¡ð Î ¸ .

$$(1)\underline{A}=3\underline{i}-4\underline{j}+5\underline{k},\underline{B}=-6\underline{i}+8\underline{j}-10\underline{k}$$

$$(2)\underline{A}=-35\underline{i}+15\underline{j}-10\underline{k},\underline{B}=7\underline{i}-3\underline{j}+2\underline{k}$$

$$(3)\underline{A}=\underline{i}+\underline{j}+\underline{k},\underline{B}=7\underline{i}+7\underline{j}+7\underline{k}$$

$$(4)\underline{A}=-\underline{i}-\underline{j}-5\underline{k},\underline{B}=-4\underline{i}+4\underline{j}-4\underline{k}$$

$$(5)\underline{A}=4\underline{i}+3\underline{j}-5\underline{k},\underline{B}=20\underline{i}+15\underline{j}-25\underline{k}$$

$$(6)\underline{A}=-\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k},\underline{B}=3\underline{i}-6\underline{j}+9\underline{k}$$

1-53 $2\underline{i}-3\underline{j}+4\underline{k},\underline{i}+b\underline{j}+c\underline{k}$ ¬ ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û þ ¨ ½ Â¡É ¨ Å ¸ Ç¡É¡ø, « ÅüÈ¢ý Ì Ú ì Ì ô¦ÀÕ ì ¸¢ ¨ Âô ÀÂ ý À Î ò¾¢ b, c ì ¸ Ç¢ ý Á¾¢ôÒ ¸ ¨ Çì ¸ ¡ ñ ¸ .

$\left(\text{Å¢¨¼:}\ b = -\frac{3}{2};;c = 2 \right)$

1-54 À¢ýÅÕõ ¦¾¡Ì¾¢¸Ç¢ø ¯ûÇ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç «ñ¨¼ô Àì¸í¸Ç¡¸ì ¦¸¡ñ¼ þ¨½¸Ãò¾¢ý ÀÃôÀ¨Àì ¸¡ñ¸.

$$(1) 2\underline{i} + 3\underline{j} + 4\underline{k}, -\underline{i} + 5\underline{j} + 2\underline{k} \left[\text{Å¢¨¼}: \sqrt{30} \right]$$

$$(2) \underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}, 3\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k} \left[\text{Å¢¨¼}: \sqrt{171} \right]$$

$$(3) \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}, 3\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k} \left[\text{Å¢¨¼}: 4\sqrt{6} \right]$$

$$(4) 8\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k}, 2\underline{i} + \underline{j} + \underline{k} \left[\text{Å¢¨¼}: \sqrt{12} \right]$$

1-55 A (1, 2, 3), B (-1, 1, 2), C(2, 3, -1) ±ýÈ ÒûÇ¢¸¨Çì §¸¡½ Ó¨É¸Ç¡¸ ¦¸¡ண்ட Óì§¸¡¼ணத்தின் ÀÃôÀÇ¨Å ì ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢¨Âô ÀÂýÀÎò¾¢ì ¸¡ñாக.

$$\left(\text{Å¢¨¼}\ \frac{1}{2}\sqrt{107} \right)$$

1-56 $A(1,2,3)B(-2,-3,4)C(4,5,6)$ ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ Óì§¸¡½ò்தின் பரப்பÇ¨வக் காண் ¸.

$$\left(\text{Å¢¨¼};\ 3\sqrt{6} \right)$$

1-57 $A(0,0,0)B(1,1,1)C(2,1,3)$ ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ ¾Çò¾¢üÌî ¦ºíÌò¾¡É திசை ºÂ¢ø µÃÄÌò ¾¢¨சயிலைÂì ¸¡ñ¸. «ôÒûÇ¢¸¨Çì §¸¡½ Ó¨É¸Ç¡¸க் கொ¡ñ¼ Óì§¸¡½ò¾¢ýா பரப்ÀÇ¨ÅÔõ ¸¡ñ¸.

$$\left(\text{Å¢¨¼:}\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}); \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

1-58 $4\underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k}, -2\underline{i} + \underline{j} + 6\underline{k}, 2\underline{i} + 4\underline{j} + \underline{k}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´Õ Óì§¸¡½ò¨¾ «¨Áò¾¢Îõ ±É ¿¢ÚÅ¸.

1-59 þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ±ñ½¢ô¦ÀÕì¸¢, ÌÚìÌô¦ÀÕì¸¢ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý Å¨ÃÂ¨È¸¨ÇôÀÂýÀÎò¾¢ô À¢ýÅÕõ º÷ÅºÁýÀ¡ð¨¼ ¦Áö¦ÂÉì ¸¡ð¼¸.

$$(\underline{A} \wedge \underline{B}).(\underline{A} \wedge \underline{B}) \equiv (\underline{A}.\underline{A})(\underline{B}.\underline{B}) - (\underline{A}.\underline{B})(\underline{A}.\underline{B})$$

1-60 þÕ ¾¢¨ºÂ¢¸ÇÐ ±ñ½¢ô¦ÀÕì¸¢, ÌÚìÌô¦ÀÕì¸¢ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý Å¨ÃÂ¨È¸¨Çì ¦¸¡ñÎ,

$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{C}, \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{A}$ ±ýÈ¡ø,

$\underline{A}.\underline{B} = 0, \underline{B}.\underline{C} = 0, \underline{C}.\underline{A} = 0, \underline{A}.\underline{A} = \underline{C}.\underline{C},$ $\underline{B}.\underline{B} = 1$ ±Éì¸¡ð¼¸.

1-61 $(\underline{A}-\underline{B})\wedge(\underline{A}+\underline{B})=2(\underline{A}\wedge\underline{B})$ ±É ¿¢åÀ¢ì ¸.
þ¾ý ƒ¢§Â¡Á¢¾¢ Å¢Çì¸ò¨¾ì ÜÚ¸.
(Ì È¢ôÒ: $\underline{A},\underline{B}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç « ñ ¨¼ô Àì¸í¸Ç¡¸ì ¦¸¡ ñ¼ þ¨ ½¸Ãò¾¢ý ÀÃôÒ, þ¨ ½¸Ãò¾¢ý ã¨ÄÅ¢ð¼í¸¨Ç « ñ ¨¼ô Àì¸í¸Ç¡¸ì ¦¸¡ ñ¼ þ¨ ½¸Ãò¾¢ý ÀÃôÀ¢ø À¡¾¢Â¡ Ì õ.)

1-62 R ±ýÀÐ ´Õ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ (position Vector) ±ýÈ¡ø, $(\underline{i}\wedge\underline{R}).(\underline{R}\wedge\underline{j})=(\underline{i}.\underline{R})(\underline{R}.\underline{j})$ ±É ì ¸¡ð Î ¸.

1-63 ´Õ Óì§¸¡½ò¾¢ý §¸¡½ôÒûÇ¢¸Ç¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¸û Ó¨È§Â $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ±ýÈ¡ø, «õÓì§¸¡½ò¾¢ý ÀÃôÀÇ¨Å, $\frac{1}{2}(\underline{A}\wedge\underline{B}+\underline{B}\wedge\underline{C}+\underline{C}\wedge\underline{A})$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢Â¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ Å¨ÃÂÚì¸¦¸¡É ì ¸¡ð Î ¸. þ¾¨ Éô ÀÂýÀ Î ò¾¢§Â¡, «øÄÐ §ÅÚÅÆ¢Â¢§Ä¡, $-2\underline{i}+3\underline{j}+5\underline{k},\underline{i}+2\underline{j}+3\underline{k},7\underline{i}-\underline{k}$ ±ýÈ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¸û Å¨ÃÂÚì Ì õ ÒûÇ¢¸û ´Õ §¸¡ðÊø ¯ûÇÉ. ±É ¿¢Ú×¸.

1-64 À¢ýÅÕõ ¦¾¡ Ì ¾¢¸Ç¢ø ¦¸¡ Î ì¸ôÀð¼ ¾¢¨ºÂ¢¸ Ù ì Ì ¡¢Â Óì Ü ð Î ì ± ñ ½¢ô¦ÀÕì¸¢ $\{\underline{A}.(\underline{B}\wedge\underline{C})\}$ Óì Ü ð Î ì Ì Úì Ìô¦ÀÕì¸¢ $\{\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})\}$ ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ ñ ¸.

$(i)\underline{A}=3\underline{i}-3\underline{j}+5\underline{k},\underline{B}=6\underline{i}+4\underline{j}-2\underline{k},$

$\underline{C}=3\underline{i}-2\underline{j}-2\underline{k}$

Å¢¨¼: $-72,-6(6\underline{i}+4\underline{j}-5\underline{k})$

$(ii)\underline{A}=\underline{i}+\underline{j}+\underline{k},\underline{B}=\underline{i}+2\underline{j}+3\underline{k},$

$\underline{C}=3\underline{i}+\underline{j}-5\underline{k}$

Å¢¨¼ $:-4,37\underline{i}+26\underline{j}+15\underline{k}$

$(iii)\underline{A}=\underline{i}-\underline{k},\underline{B}=3\underline{i}+4\underline{j}+5\underline{k},$

$\underline{C}=-6\underline{j}-7\underline{k}$

Å¢¨¼ $:20,21\underline{i}+16\underline{j}+21\underline{k}$

$(iv)\underline{A}=3\underline{i}+2\underline{j}+4\underline{k},\underline{B}=2\underline{i}-\underline{j}+\underline{k},$

$\underline{C}=6\underline{i}+7\underline{j}-\underline{k}$

Å¢¨¼ $:78,8\underline{i}-84\underline{j}+36\underline{k}$

$(v)\underline{A}=\underline{i}-2\underline{j}+\underline{k},\underline{B}=\underline{i}+2\underline{j}-3\underline{k},$

$\underline{C}=6\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k}$

Å¢¨¼ $:28,31\underline{i}+14\underline{j}-3\underline{k}$

1-65 À¢ýÅÕõ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ¸½õ (set) ´Õ ¾Çò¾¢Ä¨ÁÔõ ±É ì ¸¡ ñ ¸.

$(1) 2\underline{i}-3\underline{j}+5\underline{k}, 3\underline{i}+4\underline{j}-\underline{k}, 16\underline{i}-7\underline{j}+23\underline{k}$

$(2) \underline{i}+3\underline{j}-2\underline{k}, 7\underline{i}-2\underline{j}+3\underline{k}, 25\underline{i}+6\underline{j}+\underline{k}$

$(3) 3\underline{i}-7\underline{j}-2\underline{k}, -4\underline{i}+5\underline{j}+3\underline{k}, 9\underline{i}-34\underline{j}-5\underline{k}$

$(4) 6\underline{i}-\underline{j}+5\underline{k}, 5\underline{i}+7\underline{j}-3\underline{k}, 7\underline{i}+38\underline{j}-30\underline{k}$

$(5) 4\underline{i}-2\underline{j}+59\underline{k}, -3\underline{i}+4\underline{j}+7\underline{k}, 5\underline{i}-6\underline{j}+2\underline{k}$

$(6) 18\underline{i}+8\underline{j}+6\underline{k}, 4\underline{i}+3\underline{j}+2\underline{k}, \underline{i}-2\underline{j}-\underline{k}$

$(7) -2\underline{i}+3\underline{j}+\underline{k}, 3\underline{i}-4\underline{j}-2\underline{k}, -\underline{i}+2\underline{k}$

1-66 À¢ý ÅÕõ Òû Ç¢¸Ç¢ý ¸½õ ´Õ ¾Çò¾¢Ä ¨ ÁÔõ ±É ì ¸¡ ñ ¸.

$(i) A(-13,17,-1) B(-6,3,2) C(3,-2,4) D(5,7,3)$

$(ii) A(-1,1,-1) B(1,1,-1) C(3,-1,-1) D(3,-2,-1)$

1-67 $A(3,0,1) B(1,-5,1) C(6,0,2) D(4,-3,2)$ ± ý È Òû Ç¢¸ Ù ì Ì ¡¢Â ¿¢ ¨ Äò ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ ¨ Çì ¸¡ ñ ¸. þ ÅüÈ¢ ¨ Éô ÀÂ ý À Î ò¾¢, $(\underline{B}-\underline{A})\wedge(\underline{C}-\underline{A}).(\underline{D}-\underline{A})$ ± ý È Óì Ü ð Î ± ñ ½¢ô ¦ÀÕì ¸¢Â¢ý Á¾¢ô ¨ ÀÔõ ¸¡ ñ ¸.

1-68 A(-5, 0, 1) ± ý ÀÐ µÕ É þ ¨ ½ ¸Ãò¾¢ ý (Parallelopied) ¯ î º¢ô Òû Ç¢Â¡ Ì õ. Å¢Ç¢õÒ¸ û (edges) A Â¢ÄÕóÐ Ó ¨ È§Â B(2,-2,5), C(-1, 5, 7), D(-2, 4, 6) ± ý È Òû Ç¢¸ ¨ Çî §º÷ò¾¢ Î õ Ð ñ Î ì§¸¡ Î ¸Ç¢ø « ¨ Á ¸¢ý ÈÉ. «¾ ý ÀÕÁ ¨ É ì ¸¡ ñ ¸.

(Å¢ ¨ ¼; 15)

1-69 À¢ý ÅÕõ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ Ç¢ø ã ýÚ ¾¢ ¨ ºÂ¢¸ û ´Õ ¾Çò¾¢ü Ì þ ¨ ½Â¡¸ « ¨ Á ¸¢ýÈÉ ±É ì ¸¡ð Î ¸.

$-\underline{i}+\underline{j}-\underline{k}, \underline{i}+\underline{j}-\underline{k}, 3\underline{i}-\underline{j}-\underline{k}, 3\underline{i}-2\underline{j}+\underline{k}$

1-70 Óì Ü ð Î ± ñ ½¢ô¦ÀÕì ¸¢ ¨ Âô ÀÂ ý À Î ò¾¢, $P'Q'R'$ ± ý È ¿¢ ¨ ÄÂ¡É Òû Ç¢¸ Ç¡ø Å ¨ ÃÂÚì ¸ôÀ Î õ ¾Çò¾¢ý ºÁ ý À¡ð ¨ ¼ì ¸¡ ñ ¸.

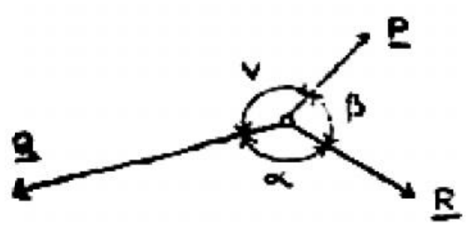
(Å¢ ¨ ¼; $(P-P').(Q-P')\wedge(R'-P')=0$

´Õ Ð ¸Ç¢ø $\underline{F}_1=6i+8j, \underline{F}_2=10,\angle 120^\circ, \underline{F}_3=10\angle -30^\circ$ ± ý È ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸Ç¡ø Å ¨ ÃÂÚì ¸ôÀð¼ Å¢ ¨ º ¸ û (¸¢.¸¢. Å¢ ¨ º « Ä Ì ¸Ç¢ø) ¦ºÂüÀ Î ¸¢ýÈÉ. Å ¨ ÃÀ¼õ Å ¨ ÃóÐ þÅüÈ¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º ¨ Â ì ¸¡ ñ ¸.

Ð ¸ û ºÁ ¿¢ ¨ ÄÂ¢ÄÕôÀ¾üì §Å ñ ÊÂ Å¢ ¨ º $\underline{F}=F.\angle$ ³ ì ¸¡ ñ ¸. ¬Âò¦¾¡ ¨ Ä ÅÊÅ ¸ ½¢¾ Ó ¨ ÈÂ¢ø Å¢ ¨ ¼ ¨ Â î º¡¢ À¡÷ì ¸.

1.71 1 ¸¢.¸¢ ± ¨ ¼Ôû Ç ±· Ì Ì ñ Î ´ ýÚ VÅÊÅÓûÇ ¦¾¡ðÊ ´ ýÈ¢ø « ¨ Á¾¢ ¿¢ ¨ ÄÂ¢Ö ûÇÐ. ¦¾¡ðÊÂ¢ý ´Õ Àì ¸õ ¦º í Ì ò¾¡ ¸×õ, Áü¦È¡Õ Àì ¸õ ¦º í Ì òÐò ¾¢ ¨ ºÔ¼ý 30° §¸¡½ò ¨ ¾ « ¨ Áò¾Å¡Úõ ¯ûÇÐ. ¦¾¡ðÊÂ¢ý Àì ¸ í ¸û ÅÆÅÆôÀ¡É ¾Ç í ¸Ç¡¸ þÕì Ì ¦Á ýÈ¡ø, ¾Ç í ¸Ç¢ý ±¾¢÷¦ºÂø Å¢ ¨ º¸ Ù ì Ì ¡¢Â ± ñ Á¾¢ôÒ¸ ¨ Çì ¸¡ ñ ¸ [Å¢ ¨ ¼ $\sqrt{3}$ ¸¢.¸¢. Å¢ ¨ º; 2 ¸¢.¸¢. Å¢ ¨ º]

1.72. $\underline{P}, \underline{Q}, \underline{R}$ ± ý È ã ýÚ Å¢ ¨ º¸ û, ´ ýÚ Áü¦È¡ ýÚ¼ ý Ó ¨ È§Â ~, ,¥ ± ý È §¸¡½ í ¸ ¨ Ç « ¨ ÁòÐ À¼õ 1.74

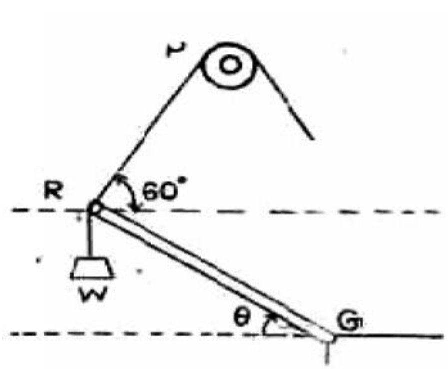


À¼õ 1.74

3.28ø ¸¡ðÊÂÐ§À¡ø ´Õ Ð¸Çø ¦ºÂüÀÎ¸ýÈÉ. Ð¸û ºÁ¿¨ÄÂÄÕì Ì ¦ÁÉø, $\frac{P}{\sin\sim} = \frac{Q}{\sin} = \frac{R}{\sin ¥}$ ±ýÚ ¿åÀì¸. þùÅ ¨ÃÂ ¨È ¿¨È§ÅüÈôÀð¼¡ø, Ð¸û ºÁ¿¨ÄÂÄÕì¸ ¾ì¸¾¡ ±ýÚ ¬Ã¡ö¸.

1.73 27Áð¼÷ ¿ÇÓûÇ ¸ÂÚ ´ýÚ 21Áð¼÷ þ¨¼¦ÅÇò ¦¾¡¨ÄÅø ¦À¡Õò¾ôÀð Î ûÇ ¦¸¡ì¸¸Çø ¸ð¼ôÀð Î, ¸ÂüÈý ´Õ ÑÉÂÄÕóÐ 9Áð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅø 200¸.¸ ±¨¼ÔûÇ ÀÙ ´ýÚ ¦¾¡í¸Å¼ôÀð Î ÀÙ, ¦¸¡ì¸¸û ¬¸Â ãýÚõ 9Áð¼÷, 18Áð¼÷, 21Áð¼÷ Àì¸í¸¨ÇÔ¨¼Â ´Õ Óì§¸¡½ò¨¾ «¨Áì¸ýÈÉ. ÀÙ×ìÌ þÕ0ÈÓûÇ ¸ÂüÈý Àì¾¸Çø ¦ºÂüÀÎõ þØÅ¨º¸¨Çì ¸¡ñ ¸. [Å¨¼:182.1 ¸.¸. Å¨º; 123.5 ¸.¸. Å¨º]

1.74 250 ¸.¸ ±¨¼ÔûÇ À¡Ãõ ´ýÚ WRPýÈ ÅÖÅ¡É ¸õÀ (Cable) ´ýÈø À¼õ 3-29ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú P ±ýÈ ¸ôÀÂý ÅÆÂ¡¸ò ¦¾¡í¸Å¼ôÀð ÎûÇÐ. ¸ôÀ¨Â GR Óð Î ´ýÈ¡ø (strut) ´Õ Àì¸õ ¾ûÇôÀð Î, GR ø 150 ¸.¸. ¦¿Õì¸õ (compression) ²üÀÎ¸ÈÐ. «òÐ¼ý 60° §¸¡½ò¨¾ «¨Áò¾Å¡Úõ ¯ûÇÐ. (À¼õ 1.75)



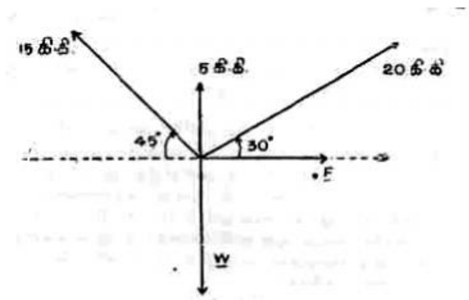
À¼õ 1.75

(i) GR ±ýÈ Óð Î ¸¨¼ì§¸¡ð Î¼ý «¨ÁìÌõ §¸¡½õ θ ±ýÈ¡ø «¾ý þÕ Á¾ôÒ¸¨Ç ¸¡ñ ¸

(ii) RPÂø ¦ºÂüÀÎõ þØÅ¨ºÂý ±ñ Á¾ô¨ÀÔõ ¸¡ñ ¸.

[Å¢¨¼ $(1)-3.55^\circ, 63.55^\circ (2) 299.40, 133.68$ ¸¢.¸¢.]

1.75 ´Õ Ð¸û, À¼õ 1.76 ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¢¨º¸Ç¡ø ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åì¸ôÀð Î ûÇÐ «¾ý ±¨¼¨ÂÔõ, F ý ±ñ Á¾¢ô¨ÀÔõ ¸¡ñ¸.



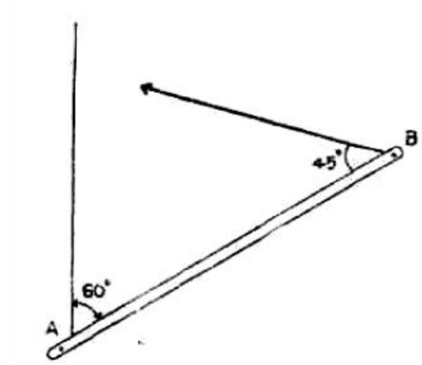
À¼õ 1.65

[Å¢¨¼:25.605 ¸¢.¸¢.; 3.89 ¸¢.¸¢.]

1.76 10¸¢.¸¢ ±¨¼¨ÂÔûÇ ®Â¯Õ ñ ¨¼, ¸¢¨¼ò¾¢Ô¼ý $30^\circ 60^\circ$ §¸¡½ í¸¨Ç «¨Áì Ìõ þÕ ÅÆÅÆôÀ¡É (Smooth) º¡ö× ¾Çí¸Ù ì Ì þ¨¼Â¢ø «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åì¸ôÀð Î ¯ûÇÐ. ¯Õ ñ ¨¼ º¡ö× ¾Çí¸¨Çò ¦¾¡ Î Á¢¼ò¾¢ø. ¾Çí¸Ç¢ý ±¾¢÷¦ºÂø Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ñ¸.

[Å¢¨¼:5¸¢.¸¢., $5\sqrt{3}$ ¸¢.¸¢.]

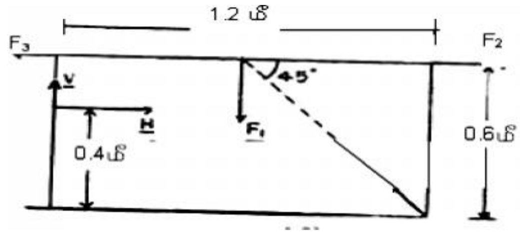
1.77 500¸¢.¸¢ ±¨¼¨ÂÔûÇ ´§Ãº£Ã¡É AB ±ýÈ ¯ò¾Ãõ (Beam) ´ýÚ ¾¨¼¨ÂüÚ AÂ¢ø ÍÆÖÁ¡Úõ, Bø ´Õ ¸Â¢üÈ¡ø À¼õ 1.77 ø ¸¡ðÊÔûÇÀÊ ¾¡í¸ôÀð Î ¸¢ÈÐ. ¾¢ÕôÒò¾¢Èý Ó¨È¨Âô ÀÂýÀÎ ò¾¢Áø AÂ¢ø ¦ºÂüÀÎ õ Å¢¨º, BÂ¢ø ¦ºÂüÀÎ õ þØÅ¢¨º ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ñ¸.



À¼õ 1.77

[Å¢¨¼: 514.2¸¢.¸¢, 37^{0}7' ; 306.3¸¢.¸¢]

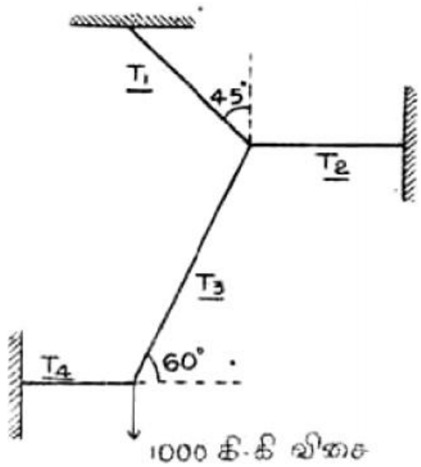
1.78 þÚì¸ÓûÇ ¦ºùÅ¸ò ¾Çõ ´ýÚõ À¼õ 1.78ø ¸¡ðÊÔûÇÀÊ 6Å¢¨º¸Ç¡ø ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åì¸ôÀð Î ûÇÐ.



À¼õ 1.78

$|\underline{V}|/|\underline{H}|$ ý Á¾¢ô¨Àì ¸¡ñ¸. À¢ýÀüÈ¢Â ÅÆ¢¸¨Çì ÍÕì¸Á¡¸ Å¢Çì¸Ì¸.
[Å¢¨¼: $\frac{1}{3}$]

1.79 1000¸¢.¸¢ (Å¢¨º) ±¨¼Ô¨ûÇ ¦À¡Õ¨Ç À¼õ 1.79ø ¸¡ðÊÂÀÊ, ¸õÀ¢¸û ¾¡í̸¢ýÈý. ¸õÀ¢¸Ç¢ø ¦ºÂüÀÎõ þØÅ¢¨º¸¨Çì ¸¡ñ¸.



À¼õ 1.79

[Å¢¨¼: $T_1 = 1414$ ¸¢.¸¢

$T_1 = 1578$ ¸¢.¸¢

$T_1 = 1154.67$ ¸¢.¸¢

$T_1 = 577.33$ ¸¢.¸¢]

1.80 ´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢¸û ÅÕÁ¡Ú:

$\underline{F_1} = 8.4\underline{i} - 6.0\underline{k}$ ¸¢ôŠ

$\underline{F_2} = 10.0\underline{j} - 5\underline{k}$ ¸¢ôŠ

$\underline{F_3} = -5.4\underline{i} + 7.0\underline{j} + 14.6\underline{k}$ ¸¢ôŠ

þ¨Å¸Ù ìÌî ºÁÁ¡É ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ¸.
[Å¢¨¼: $3.0\underline{i} + 17.0\underline{j} + 3.6\underline{k}$]

1.81 ´Õ Ð¸û $P = 2.2\underline{j} + 5.5\underline{k}, Q = -8.4\underline{j} - 1.9\underline{i}, \underline{R}$ ±ýÈ Å¢¨º¸Ç¡ø ¦ºÂüÀð Î õ, «¨Å¸ Ùì Ì º¡¢¿¢¸Ã¡É $6.5\underline{i} - 4.1\underline{j} + 8.3\underline{k}$ ±ýÈ ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢¨º¨ÂÔõ ¦ÀüÈ¢Õì Ì ¦Áý È¡ø, $\underline{R}$ ±ýÈ Å¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚ ì ¸.
[Å¢¨¼: $8.4\underline{i} + 2.1\underline{j} - 2.8\underline{k}$]

1.82 O ±ýÈ òûÇ¢Â¢ø «¨Áó¾¢Õì Ì õ ´Õ Ð¸Ç¢ø Å¢¨ºî¸½õ ´ýÚ ¦ºÂüÀð Î õ «¾ü Ì ºÁÁ¡¸ ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î (5,2,-14) ±ýÈ ¾¢¨º Å¢¸¢¾í ¸¨ÇÔõ ¦ÀüÚûÇÐ. ¸½ò¾¢ø ¯ûÇ Å¢¨º¸û
$\underline{A} = A\left(\frac{2}{3}\underline{i} - \frac{2}{3}\underline{j} + \frac{1}{3}\underline{k}\right), \underline{A} = \left(0.6\underline{j} - 0.8\underline{k}\right)\ \underline{C} = -110\underline{k}$ ¿¢äð¼í ¸û ±ýÈ¡ø ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢¨ºì Ì ¡¢Â ± ñ Á¾¢ôÒ, A,B ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý Á¾¢ôÒ¸ ¨Çì ¸¡ ñ ¸.
Å¢¨¼: ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢¨ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ = $\frac{1980}{7}$ ¿¢äð¼ý ¸û;

A= $\frac{990}{7}$ ¿¢äð¼ý ¸û; B= 220 ¿¢äð¼ý ¸û

1.83 ´Õ Ð¸Ç¢ø ¸¦úì ¸¡ Ïõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¸½õ ¦ºÂüÀÎ ¸¢ÈÐ. «¾ü Ì î ºÁÁ¡É ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢¨º¨Âì ¸¡ ñ ¸.

$\underline{A} = -3.0\underline{i} + 4.2\underline{j}$

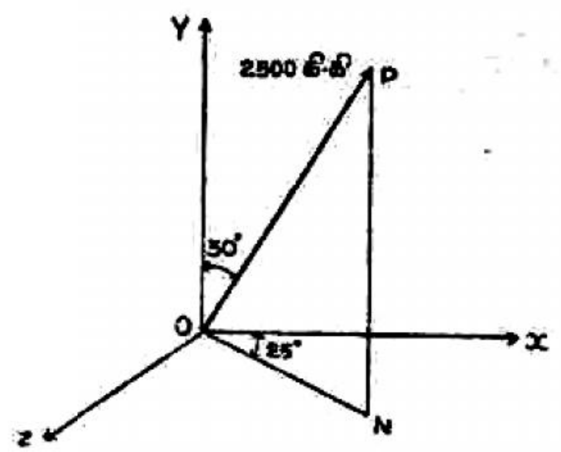
$\underline{B} = -2.5\underline{i} + 5.0\underline{k}$

$\underline{C} = 7.3\underline{i} - 2.7\underline{j} + 4.0\underline{k}$

[Å¢¨¼: $1.8\underline{i} + 1.5\underline{j} + 9\underline{k}$]

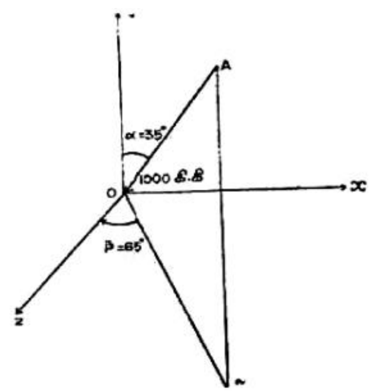
1.84 75¸¢.¸¢. ±¨¼ÔûÇ ÁÃì¸ð¨¼ ´ýÚ ãýÚ ¸õÀ¢¸Ç¢Ä¢ÕóÐ ¦¾¡í¸ Å¢¼ôÀð Î ûÇÐ. ¸õÀ¢¸û «¨ÁÔõ §¸¡ Î¸Ç¢ý ¾¢¨º Å¢¸¢¾í ¸û (direction ratios) Ó¨È§Â (-2,6,3),(-5,-14,2),(4,0,3) ±ýÈ¡ø ¸õÀ¢¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î õ þØ Å¢¨º¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒì¸ ¨Çì ¸¡ ñ ¸. [Å¢¨¼:78.4¸¢.¸¢.,72.0¸¢.¸¢.,58.357¸¢.¸¢]

1.85 À¼õ 1.69 ø 2500 ¸¢.¸¢. Å¢¨º OP ±ýÈ §¿÷ §¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎ ¸¢ÈÐ.
(a) Å¢¨ºÂ¢ý x,y,z À¸¢÷×¸ ¨Çì ¸¡ ñ ¸.
(b) Å¢¨ºÂ¢ý ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î x,y,z «îÍì¸Ù¼ý «¨Áì Ì õ §¸¡½í ¸¨ÇÔõ ¸¡ ñ ¸.
Å¢¨¼: (a) 1133,2165,528 ¸¢.¸¢.Å¢¨º;
(b) $63.1^{\circ}, 30^{\circ}, 77.8^{\circ}$]



À¼õ 1.69

1.86 À¼õ 1.70 ø ¸¡ðÊÂÀÊ 1000 ¸¢.¸¢. Å¢¨º Oø ¾¡ì¸ôÀðÎõ, A0 ³ Š ¦ºÂüÀÎõ §¸¡¼¡¸×õ ¦¸¡ñ¼ ¾ÊÂ¢ø ¦ºÂüÀÎ ¸¢ÈÐ $\sim = 35^\circ$, $= 65^\circ$ ±ýÈ¡ø,



À¼õ 1.70

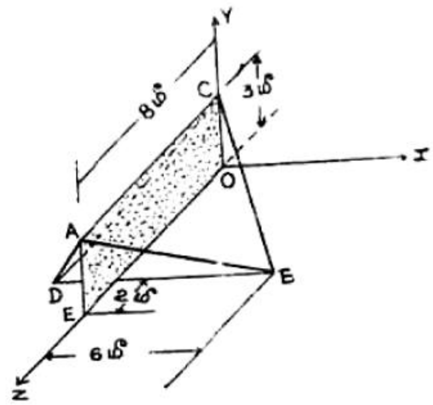
(a) Å¢¨ºÂ¢ý x,y,z À¸¢÷×¸¨Ç Š ¸¡ñ¸.
(b) «Ð ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î x,y,z ¾¢¨º¸Ù¼ý «¨Áì Ìõ §¸¡½í¸¨ÇÔõ ¸¡ñ¸.
Å¢¨¼:(a) -2600,-4100,-1212¸¢.¸¢. Å¢¨º
(b) $121^\circ 20', 145^\circ, 104^\circ$;

1.87 400¸¢.¸¢. Å¢¨º ´ýÚ ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â y,z «îÍ¸Ù¼ý Ó¨È§Â $80^\circ, 40^\circ$ §¸¡½í¸¨Ç «¨ÁìÌõ §¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. Å¢¨ºÂ¢ý x À¸¢÷× Á¢¨¸± ñ ½¡¸ þÕì Ì¦ÁýÈ¡ø Å¢¨ºÂ¢ý x,y,z À¸¢÷×¸¨ÇÔõ «Ð ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î x «îº¢ø ¾¡í Ìõ §¸¡½ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.
[Å¢¨¼: 92,694,2778.8 ¸¢.¸¢. Å¢¨º, $45^\circ 44'$]

1.88 ´Õ Å¢¨º ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢Â¡¸×õ x, y «îÍ¸Ç¢ý Ó¨È§Â $125^\circ, 65^\circ$ §¸¡½í¸¨Çò ¾¡íÌõ §¸¡ðÊÖõ ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. Å¢¨ºÂ¢ý À¸¢÷× 320¸¢.¸¢ ±ýÈ¡ø Å¢¨ºÂ¢ý ±ñ Á¾¢ô¨ÀÔõ, ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î x «îÍ¼ý «¨ÁìÌõ §¸¡½ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.

[Å¢¨¼: 456 ¸¢.¸¢., 45°26' 45°44']

1.89 þÕõÒì ¸õÀ¢¸û, º¢¦Á ñ Î ì ¸Ä¨Å ¬¸¢ÂÅüÈ¡ø Å¡÷ôÒ ¦ºöÂôÀð¼ Í Å÷ôÀ Ì ¾¢ 1.71 ¸¡ðÊÂÀÊ

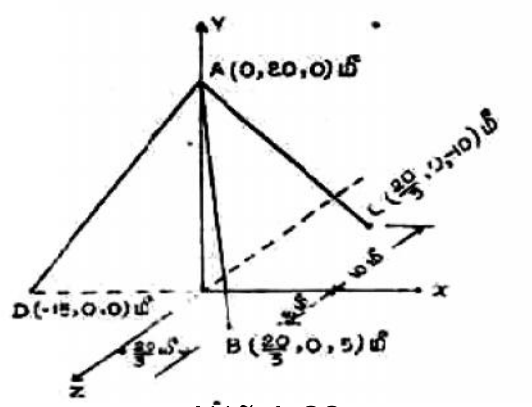


À¼õ 1-81

ÅÖÅ¡É ¸õÀ¢¸Ç¡ø ¿¢ÚÅôÀð Î ûÇÐ. 350 ¸¢.¸¢. Å¢¨ºÔûÇ þØ Å¢¨º A,B ±ýÈ ¸õÀ¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î ¦ÁýÈø ÍÅ÷ô À Ì ¾¢Â¢ø A ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø ÀÃý À Î ò¾ôÀ Î õ Å¢¨ºÂ¢ø x,y, ½À¸¢÷×¸ ¨Ç ì ¸¡ ñ ¸.
[Å¢¨¼:300,-150,-100¸¢.¸¢.]

Óó¾¢Â ¸ ½ ì ¸¢ø BC ±ýÈ ¸õÀ¢¸û ¦ºÂüÀ Î õ þØ Å¢¨º 450 ¸¢.¸¢. Å¢¨º ±ýÈ¡ø, ÍÅ÷ô À Ì ¾¢Â¢ø C ±ýÈ þ¼ò¾¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢¨ºÂ¢ý x,y,z À¸¢÷×¸ ¨Ç ì ¸¡ ñ ¸.
[Å¢¨¼: 300,-150,-300¸¢.¸¢. Å¢¨º]

1.90 Ü¼¡Ã ¯î º¢¨ Âì Ì È¢ì Ì õ A ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø, «Ð º¡Â¡Áø ¯¾×õ ¬¾¡Ãì ¸Â¢Ú¸Ç¢ø (guy wires)



À¼õ 1-82

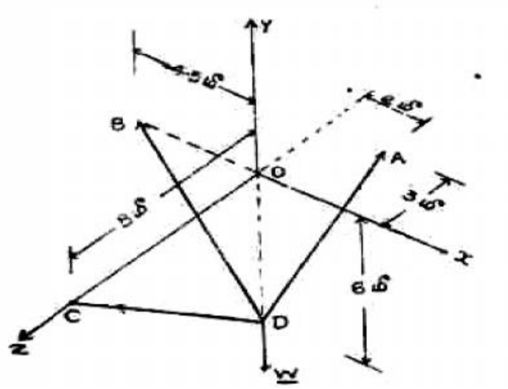
À¼õ 1.82ø ¸¡ðÊÂÀÊ ¦À¡Õò¾ôÀð Î ûÇ É. ¸Â¢Ú¸û AB,AC ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ þØÅ¢ ¨ º¸û Ó ¨È§Â 2600¸¢.¸¢ Å¢ ¨ º, 1750¸¢.¸¢ Å¢ ¨ º ± ý È¡ø, « ¨ Å ¸û þ Å ñ Î õ Aø ¿¢¸úòÐõ Å¢ ¨ º ¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÅÂ ¨ É Ì ¸¡ ñ ¸.
[Å¢ ¨ ¼: $1300\underline{i}-3900\underline{j}-150\underline{k}$ ¸¢.¸¢ Å¢ ¨ º]

1.91 À¼õ 3-37ø AC ± ý È ¸Â¢üÈ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ þØÅ¢ ¨ º 3500¸¢.¸¢ ± ý È¢Õì Ì õ§À¡Ð AB,AD ± ý È ¸Â¢Ú¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º¸ ¨ Ç Aø ¦ºÂüÀ Î õ þõ ã ýÚ þØôÒÅ¢ ¨ º¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÅÂ ý Å¢ ¨ º ¦º í Ìò¾¡¸ þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ ñ Î ¸¡ ñ ¸.
(Å¢ ¨ ¼: 6500 ¸¢.¸¢., 5000 ¸¢.¸¢)

1.92 100¸¢.¸¢ Å¢ ¨ º ± ¨ ¼Ôû Ç ´Õ ¦¸¡òÐ Å¢Çì Ì (Chandelier) ´Ø í ¸¡¸ « ¨ Áó¾ ã ýÚ º í ¸¢Ä¢¸Ç¢ø ´ù¦Å¡ ýÚõ ¦º í ÌòÐò ¾¢ ¨ ºÔ¼ý §¸¡ ½ ò ¨ ¾ò ¾¡ í ¸¢ÂÅ¡Ú ¦¾¡ í ¸Å¼ôÀð Î ûÇÐ. º í ¸¢Ä¢ ´ù¦Å¡ ýÈ¢Öõ ²üÀ Î õ þØÅ¢ ¨ ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ôô¸ ¨ Ç Ì ¸¡ ñ ¸.

1.93 Z« îº¢ý Á¢ ¨ ¸ò¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ 2.5¸¢.¸¢ Å¢ ¨ º ¨ Â ã ýÚ Óð Î ¸Ç¢ø (Stiuts) ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º¸û ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø ¨ Å Ì ¸¢ýÈÉ. Óð Î ¸û (0,5,-12) (3,0-4) (2,-2,1) ± ý È ¾¢ ¨ ºÅ¢¸¢¾í ¸ ¨ Çô ¦ÀüÈ ¾¢ ¨ º¸Ç¢ø « ¨ ÁóÐ « ¨ Å ¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î õ þØ «øÄÐ þÚì¸ Å¢ ¨ º¸Ç¢ý (tensile or Compressive forces) ± ñ Á¾¢ôÒ¸û Ó ¨È§Â P,Q,R ± ý È¢ø Óð Î ¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º¸ ¨ Ç Ì ¸¡ ñ ¸. ±ÅüÈ¢ø þØ «øÄÐ þÚì¸ Å¢ ¨ º¸û ¿¢¸ú¸¢ýÈÉ ± ýÚõ ¸¡ ñ ¸.
(Å¢ ¨ ¼. p = 4.15(-þØ Å¢ ¨ º) ¸¢.¸¢
Q = 2.66(þÚì¸ Å¢ ¨ º) ¸¢.¸¢
R = 2.40(þØ Å¢ ¨ º) ¸¢.¸¢)

1.94 À¼õ DA,DB,DC ± ý È ¸õÀ¢¸û Dø ¸¢ú§¿¡ì¸¢ ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{W}$ ¸¢.¸¢ ÀÙ ¨ Å î ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø ¨ Å Ì ¸¢ýÈÉ. DBø ¦ºÂüÀ Î õ þØÅ¢ ¨ º 100¸¢.¸¢. ± ý È¡ø ÀÙÅ¢ý ± ¨ ¼ ¨ ÂÔõ, DA,DC ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ þØÅ¢ ¨ º¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ¸ ¨ ÇÔõ ¸¡ ñ ¸.
[Å¢ ¨ ¼ 327.5, 210.0,112.5 ¸¢.¸¢]



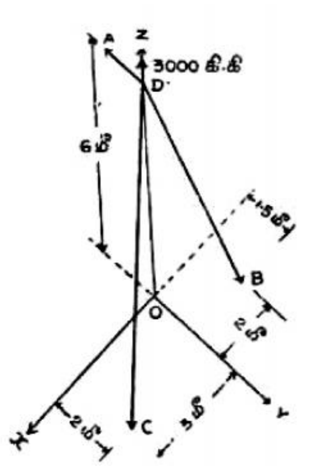
À¼õ 1.83

1.95 À¼õ 1.83ø DC ¸õÀ¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ þØÅ¢ ¨ º 225¸¢.¸¢ ± ý È¡ø W,T_{DA},T_{DB} ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý Á¾¢ôÒ¸ ¨ Ç Ì ¸¡ ñ ¸.
[Å¢ ¨ ¼ 655,420,200 ¸¢.¸¢]

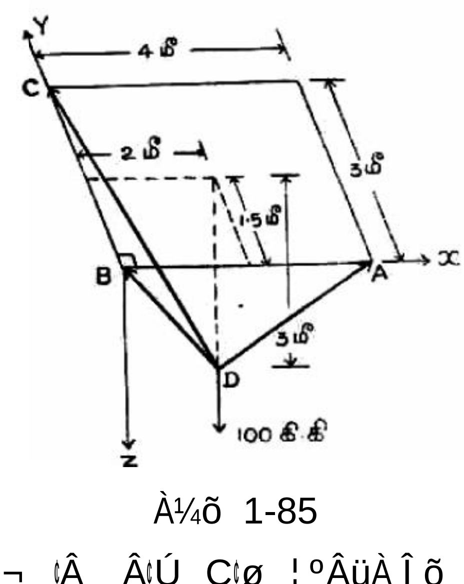
1.96. 3-38ø ¸¦ú§¿¡ì¸¦î ¦ºÂüÀÎõ ÀÙÅ¦ý ±¨¼ 131 ¸¦.¸¦ ±ýÈø DA,DB,DC ¬¸¦ÂÅüÈ¦ø ¦ºÂüÀÎõ þØÅ¦¨º¸Ç¦ý ±ñ Á¾¦ôÒ¸¨Çì ¸¡ñ ¸.
[Å¦¨¼ 80,40,45, ¸¦.¸¦]

1.97. D±ýÈ ÒûÇ¦Â¦ø «Îò¾ Àì¸ò¾¦ÖûÇ À¼õ 1.78ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú 3000 ¸¦.¸¦ Å¦¨ºÂ¡ÉÐ §Áø§¿¡ì¸¦î ¦ºÂüÀðÎ, DA,DB,DC ±ýÈ ¸õÀ¦¸Ç¦ø ¿¦¸Øõ þØÅ¦¨º¸Ç¡ø ®Î¦ºöÂôÀðÎ D ±ýÈ ÒûÇ¦ ºÁ¿¦¨ÄÂ¦ø «¨Á¸¦ÈÐ ±ýÈ¡ø ¸õÀ¦¸Ç¦ø ¿¦¸Øõ þØÅ¦¨º¸Ç¦ý ±ñ Á¾¦ôÒ¸¨Çì ¸¡ñ ¸.
[Å¦¨¼ 850,1950,1400 ¸¦. ¸¦.]

1.98. «Îò¾ Àì¸ò¾¦ÖûÇ À¼õ 1.84ø D ±ýÈ ÒûÇ¦Â¦ø ¸¦ú§¿¡ì¸¦î ¦ºÂüÀÎõ 100 ¸¦.¸¦ ±¨¼Ôû Ç.



À¼õ 1-84

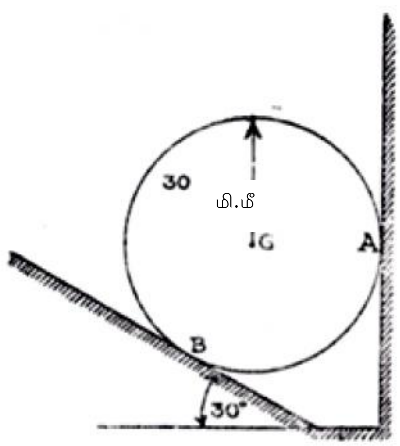


À¼õ 1-85

ÀÙ¨Å DA, DB, DC, ¬¸¦Â ¸Â¦Ú¸Ç¦ø ¦ºÂüÀÎõ þØÅ¦¨º¸û ºÁ¿¦¨ÄÂ¦ø ¨Åì¸¦ýÈÉ ±ýÈø þØÅ¦¨º¸Ç¦ý ±ñ Á¾¦ôÒ¸¨Çì ¸¡ñ ¸.
[Å¦¨¼ 62.4, 20.8, 45.8 ¸¦.¸¦]

1.99 5Á¦ð¼÷ ¿¦ÇÓûÇ ¸Â¢Ú ´ýÚ 3Á¦ð¼÷ ¦¾¡¨Ä¨Åô ¦ÀüÈ A,B ±ýÛÁ¢¼ò¾¢Ä¨ÁÔõ ¬¾¡Ãí¸Ç¢ø ¦À¡Õò¾ôÀð Î ò ¦¾¡í Ì ¸¢ÈÐ. A ±ýÛõ ÒûÇ¢ B ±ýÛõ ÒûÇ¢ «¨ÁÔÁ¢¼ò¾¢ü Ì 1.5 Á¦ð¼÷ ¯ÂÃò¾¢ø ¯ûÇÐ.
´Õ ºÁÈ¢Â ÁÆÁÆôÀ¡É ¸ôÀ¢Â¢øÀÙ ´ýÚ À¢¨ ½ì¸ôÀð Î ¸Â¢üÈ¢ý §Áø °÷óÐ ¦ºøÖõ Å¨¸Â¢ø ¯ûÇÐ. ÀÙ «¨Á¾¢¿¢¨Ä¨Â «¨¼Ôõ§À¡Ð «Ð þÕì Ì Á¢¼ò¨¾ Å¨ÃÂÚì¸.
(Å¢¨¼ ÀÙÅ¡ÉÐ A ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ ¸¢¨¼Â¡¸ 2.06 Á¦ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢Öõ, ¿¢¨ÄÂ¡¸ì ¸¦ú§¿¡ì¸¢ Á¦ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢Öõ «¨ÁÔõ.)

1.100. 270¿¢.±¨¼ÔûÇÐõ ÁÆÁÆôÀ¡ÉÐõ ºÃ¡ÉÐÁ¡É ¯Õ¨Ç ´ýÚ À¼õ 1.86ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¾¡í¸ôÀÎ ¸¢ýÈÐ. A,B ±ýÛõ þ¼í¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ ±¾¢÷¾¡ì Ì Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ñ ¸.

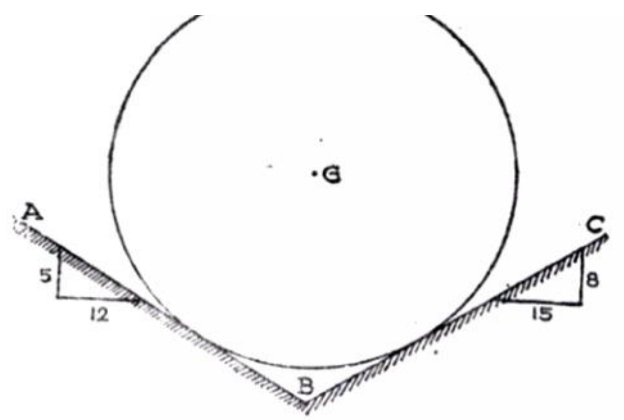


À¼õ 1-86

(Å¢¨¼ 156 ¿¢. 312 ¿¢.)

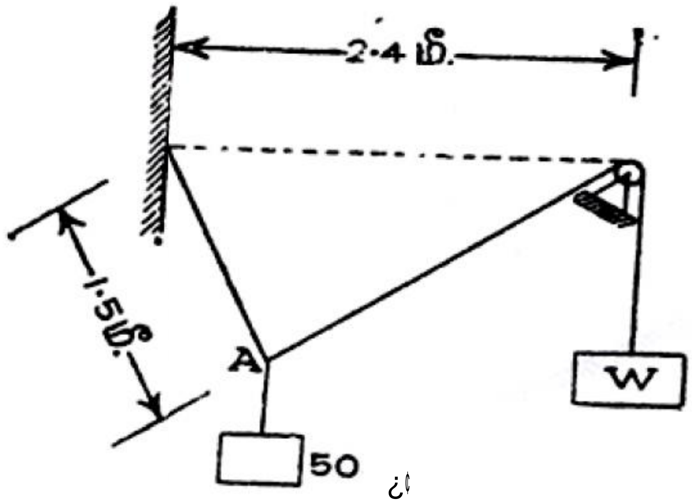
1.101. 342¿¢. ±¨¼ÔûÇ ´Õ ºÃ¡É ¯Õ¨Ç ´ýÚ þÕ º¡ö×¾Ç í¸Ù ì Ì þ¨¼Â¢ø À¼õ 1.87ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨Á¸¢ýÈÐ. º¡ö× ¾Çõ BC ¬ ÉÐ, ¯Õ¨ÇÂ¢ý §ÁøºÂøÀÎ òÐõ ±¾¢÷¾¡ì Ì Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ ¸.

(Å¢¨¼ 170 ¿¢. ±ýÛõ ¾¢¨ºÂ¢ø G ÅÆ¢§Â)



A¼õ 1-87

1.102. 50 ¸¢. ¸¢ ±¨¼ÔûÇ ÀÙ ´ýÚ À¼õ 1.88ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú A ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø þÕ þ§Äº¡É þ¨Æ¸Ç¡ø À¢¨½ì¸ôÀð Î ¾¡í¸ôÀ Î¸¢ýÈÉ, $\sim = 60$ ±ýÈ¢ÕôÀ¾üÌ¡¢Â w ±ý ÛÕ Å¢¨ºÂ¢ý ±¨¼¨Âì¸¡ ñ¸
(Å¢¨¼ 25.26 ¿¢.)



À¼õ 1-88

1.103. §ÁüÜÈ¢Â ¸½ì¸¢ø («¾¡ÅÐ 1.102ø) wÅ¢ý ±¨¼ 40 ¿¢. ±ýÈ¢Õì Ì õ§À¡Ð ~ ,Â¢ý Á¾¢ô¨Àì¸¡ ñ¸.
(Å¢¨¼: 39°)

1.104. ´Õ ¾¢ ñ Áì Ü õÀ¢ý ¯ÂÃõ h «¾ý «¨Ã ¯îº¢ì§¸¡½õ α «¾ý «ÊÀ¡¸õ ÁÆÁÆôÀ¡É ¿¢¨Äì ÌòÐ ÍÅ¡¢ø ¦À¡ÕóÐÁ¡Ú ¨Åì¸ôÀð Î «¾Û îº¢ì Ìõ «î ÍÅ¡¢ÖûÇ ´Õ ÒûÇ¢ì Ìõ ¦¾¡ Î ì¸ôÀð¼ µ¡¢¨ ÆÂ¢É¡§Ä «Ð ¾¡í¸ôÀ Î¸¢ÈÐ.
«ùÅ¢¨ÆÂ¢ý Á¢¸ô¦À¡¢Â º¡ò¾¢ÂÁ¡É ¿¦Çõ. $h\sqrt{1+\frac{16}{9}\tan^2\sim}$ ±É ì¸¡ð Î¸.

1.105. 21 ¿¦ÇÓûÇ µ÷ þ¨ÆÂ¢ý ´Õ ÑÉ¢ 2a ¿¦ÇÓûÇ ´Õ ÀÙÅ¡É, ÁÆÁÆôÀ¡É º÷¸§¸¡¦Ä¡ýÈ¢ý ´Õ Ó¨ÉÂ¢ø ¸ð¼ôÀð¼Ð¼ý «¾ý ÁÚÑÉ¢ «ó¾ì§¸¡Ä¢ø ÅØì¸ìÜÊÂ ´Õ ±¨¼Â¢øÄ¡¾ Å¨ÇÂò¾¢ø ¸ð¼ôÀðÊÕì¸¢ÈÐ. «ó¾ì§¸¡Ä¢ø «ùÅ¢¨ÆÂ¢ý ¯¾Å¢Â¡ø ´Õ ÁÆÁÆôÀ¡É ´ÕÓ¨Éì¸ð¨¼ÂÃÄ¢ÕóÐ ¦¾¡í¸Å¢¼ôÀ Î¸¢ÈÐ. ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø «ì§¸¡ÄÉÐ ¿¢¨ÄìÌòÐ¼ý ¯ ±ýÛõ §¸¡½ò¨¾ ¯ ñ¼¡ì¸¢É¡ø $l\cos^{-} = a\sin^{2-}$ ±Éì ¸¡ð Î¸.

1.106. ¾ý ÒÅ¢Â÷ôÒ ¨ÁÂò¾¡ø a,b ±ý Ûõ ÀÌ¾¢¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸ôÀ Î¸¢ýÈ ´Õ ¯ò¾Ãõ ´ý ¨È¦Â¡ýÚ ´Õ ¸¢¨¼ì§¸¡ðÊø ¦ÅðÊì¦¸¡ ñ Î ¸¢¨¼¼ò ¾Çò¾¢üÌ (horizontal plane) Ó¨È§Â ~, ±ýÛõ §¸¡½í¸Ç¢ø º¡öó¾ þÕ ñ Î ÁÆÁÆôÀ¡É ¾Çí¸Ç¢§Ä ¾ýÓ¨É¸û ¸¢¼ì¸ î ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø þÕì¸¢ýÈÉ. ¸¢¨¼¾Çò§¾¡ Î «ù×ò¾Ãõ ¯ ñ¼¡ì Ìõ §¸¡½ò¨¾Ôõ «ò¾Çí¸Ù ¨¼Â ±¾¢÷¾¡ì¸ í¸¨ÇÔõ ¸¡ ñ¸.

(Å¦¨¼¯ ,±ýÀÐ ¯ò¾Ãõ «Ê Å¡ÉòÐ¼ý ¯ ñ ¼¡ì Ìõ §¸¡½ ¦Áý È¡ø,

$$\tan^{-} = \frac{b\cot \;\; - a\cos t\sim}{(a+b)}.$$

¯ò¾Ãò¾¢ý ±¨¼¨Â W ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø,

¯ò¾Ãò¾¢ý §Áø Òû Ç¢Â¢ø ¦ºÂøÀ Î õ

±¾¢÷¾¡ ì ¸õ, = $\frac{W\cdot\sin}{\sin(\sim + \;\;)}$

¯ò¾Ãò¾¢ý ¸�£úÒû Ç¢Â¢ø ¦ºÂøÀ Î õ

±¾¢÷¾¡ ì ¸õ,= $\frac{W\cdot\sin\sim}{\sin(\sim + \;\;)}$

1.107. 100¸¢.¸¢ ±¨¼¼Ôõ 5Á£ð¼÷ ¿£ÇÓõ ¯ûÇ ´§Ãº£Ã¡É Å¨ÇÂ¢ý ¸£ú Ó¨ÉÂ¡ÉÐ ´Õ ¿¢¨Äì Ìò Ð ÍÅÕ¼ý, 45°,§¸¡½ò¨¾ò ¾¡í Ì Á¡Ú À¢¨½ì¸ôÀð Î ûÇÐ, «¾ý §ÁøÓ¨ÉÂ¢ø µ¡¢¨Æ ¸ð¼ôÀð Î §Áø Ó¨É¨ÃÅ¢¼3 Á£ð¼÷ «¾¢¸Óû Ç Ìò Ð ¦¾¡¨Ä¨Åì ¦¸¡ ñ ¼ ÍÅ¡¢ø «¨ÁÔõ Òû Ç¢Â¢ø À¢¨½ì¸ôÀð Î ûÇÐ, 500¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ ´Õ ÀÙ Å¨ÇÂ¢ý §Áø Ó¨ÉÂ¢ÄÕóÐ ¦¾¡í ¸Å¢¼ôÀð Î ûÇÐ ±É¢ø þ¨ÆÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ þØ Å¢¨º À¢¨½ÂÄ¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ±¾¢÷¾¡ì ¸ Å¢¨º ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ ñ ¸

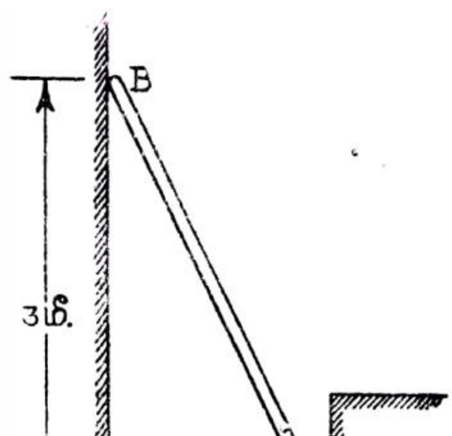
(Å¢¨¼ : þØ Å¢¨º 390.2 ¸¢.¸¢; ±¾¢÷ò¾¡ì ¸õ

297.8 ¸¢¸¢ →;±¾¢÷ò¾¡ì ¸õ 252.3 ¸¢.¸¢ ↑)

1.108. 25 ¿¢. ±¨¼ÔûÇ ´Õ ²½¢Â¡ÉÐ «¾Û¨¼Â §ÁøÓ¨É ÁÆÁÆôÀ¡É ´Õ ¿¢¨Äì Ìò Ð ÍÅÕì Ì ±¾¢Ã¡Ôõ ¸£úÓ¨ÉÂ¡ÉÐ ÁÆÁÆôÀ¡É ¾¨ÃÔõ Áü¦È¡Õ ÁÆÁÆôÀ¡É ¿¢¨Äì Ìò Ð ÍÅÕõ §ºÕÁ¢¼òÐõ À¼õ 1-89ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÕì Ì õ Å ñ ½õ ¿¢ü¸¢ýÈÐ. ²½¢Â¢ý ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ÁÂõ þ¼ô ÒÈÓûÇ ÍÅ¡¢Ä¢ÕóÐ 1Á£ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø ¯ûÇÐ ±É¢ø ²½¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ±¾¢÷¾¡ì ¸ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ ñ ¸.

(Å¢¨¼: $\underline{R_A}$ = 25.5 ¿¢. A ÅÆ¢§Â

$\underline{R_B}$ = 5 ¿¢. → B ÅÆ¢§Â



À¼õ 1-89

1.109. G,J ±ý ÛÁ¼ò¾ø ¦À¡Õò¾ôÀð Î ûÇ ° ºÓ ¨ ÉÂø À ¨ ½ ì ¸ôÀð¼ (pin connection) ºð¼ò¦¾¡ Ì ¾Âý « ¨ ÅôÒ (structure) À¼õ 1-90ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ ûÇÐ, G,J ±ý ÛÁ¼ò¾ø ¦ºÂøÀ Î õ ±¾÷¾¡ì ¸ Å ¨ º ¸ ¨ ÇÔõ GH ±ý Ûõ ºð¼ôÀ Ì ¾Âø H,M±ý ÛÁ¼ í ¸ Çø « ¨ ÁÔõ ° ºÓ ¨ Éò ¾¡ì ¸ Å ¨ º ¸ ¨ ÇÔõ (pin reaction) ¸¡ ñ ¸. K ±ý ÛÁ¼ò¾ø ¦¾¡ í ¸Å¼ôÀð Î ûÇ ÀÙ ¨ Å 150 ¸.¸ ±É ì ¦ ¸¡û ¸. ¦¾¡ Ì ¾ « ¨ ÁôÀø ¯ ûÇ ºð¼ í ¸Çý ±¨¼ ¸ ¨ Çô ÒÈì ¸ ½ì ¸

(Å¨¼ : $\underline{F_G} = 175\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\underline{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\underline{j}\right)$ ¸.¸)

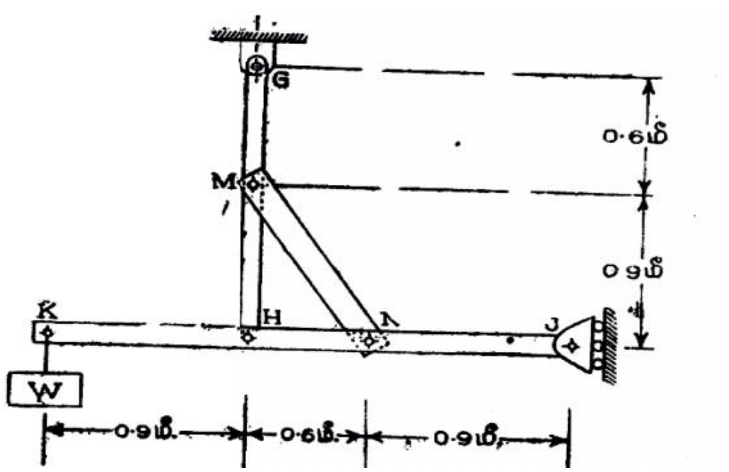
A ÅÆ§Â

À¼õ

$\underline{F_H} = 380\left(0.158\underline{i} - 0.9872\underline{j}\right)$ ¸.¸

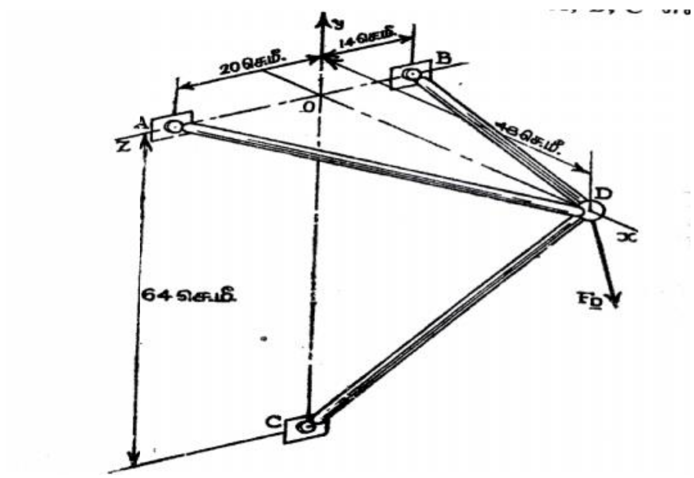
$\underline{F_j} = -90$ ¸.¸

$\underline{F_M} = 270.5\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}\right)$ ¸.¸



À¼õ 1-90

1.110. ÍÅ÷À Ì ¾Âø ¬¾¡ÃÁ¡ ¸ ì ¾¡ í Ì õ AD,BD,CD ±ý Ûõ ÅÖÅ¡É þÕõÒì ¸õÀ¸ û A,B,C ±ý Ûõ



À¼õ 1-91

ÒûÇ¢¸Ç¢ø ÀóÐì¸¢ ñ½¢ ãðÎô¦À¡Õò¾ø (ball and socket joint) «¨Áô¨À¸ ¨Çô ¦ÀüÚ D ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø À¼õ 1.91 ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÚì¸Á¡¸ô À¢¨½ì¸ôÀðÎûÇÐ. D ±ýÛõ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â $\underline{F_D} = \left(75\underline{i} - 600\underline{j} - 300\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. CD, AD ±ýÛõ ¸õÒô ÀÎ¾¢¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ñ¸.

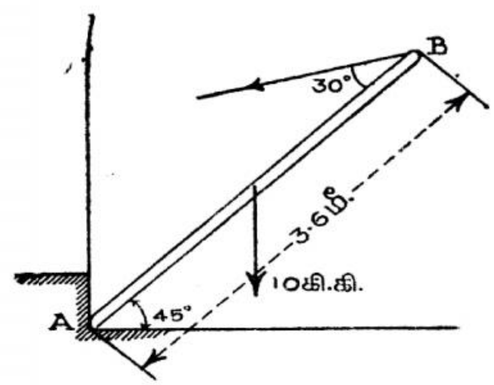
(Å¢¨¼: $\underline{F_{CD}} = 750\left(0.6\underline{i} + 0.8\underline{j}\right)$ ¸¢.¸¢

$\underline{F_{AD}} = -693\left(-0.923\underline{i} + 0.385\underline{j}\right)$ ¸¢.¸¢ þùÅ¢Ã ñ Î Å¢¨º¸Ùõ D ÅÆ¢§Â ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈÉ.)

1.111. 3.6 Á¢ð¼÷ ¿£ÇÓûÇÐõ 10 ¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇÐÁ¡É µ÷ À¡×¸ð¨¼ (joist) ¨Â À¼õ 1.92 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ÁÉ¢¾ý «¾ý §ÁøÑÉ¢Â¢ø ¸ð¼ôÀðÎûÇ ¸Â¢Ú ´ý¨È þØòÐ ¯Â÷òÐ¸¢È¡ý. A ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø ²üÀÎõ ±¾¢÷ò¾¡ì¸ Å¢¨º¨ÂÔõ ¸Â¢üÈ¢ø ¦ºÂøÀÎõ þØÅ¢¨º¨ÂÔõ ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ AÂ¢ø 13.785 ¸¢.¸¢

$\lceil +60^\circ 27'$ b ±ýÛõ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º BÂ¢ø þØÅ¢¨º $5\sqrt{2}$ ¸¢.¸¢

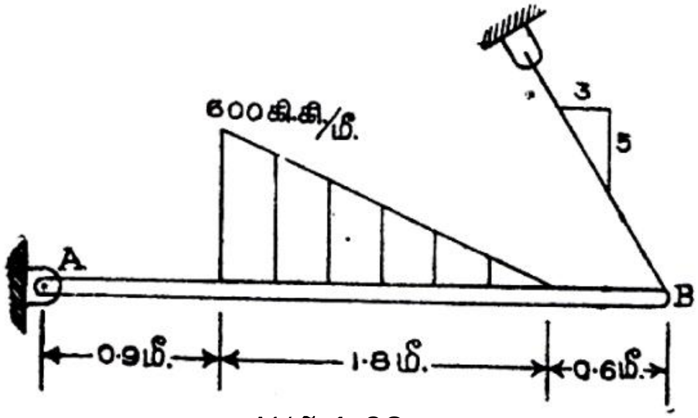


À¼õ 1-92

1.112. À¼õ 1.113ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¸¢¨¼Â¡¸ì ¸¢¼ì¸¢ýÈ ¯ò¾Ãò¾¢ý §Áø ¦ºÂøÀÎõ ±øÄ¡ þØÅ¢¨º¸¨ÇÔõ ¸¡ñ¸. ¯ò¾Ãò¾¢ý ±¨¼¨Â ÒÈì¸½¢ì¸.

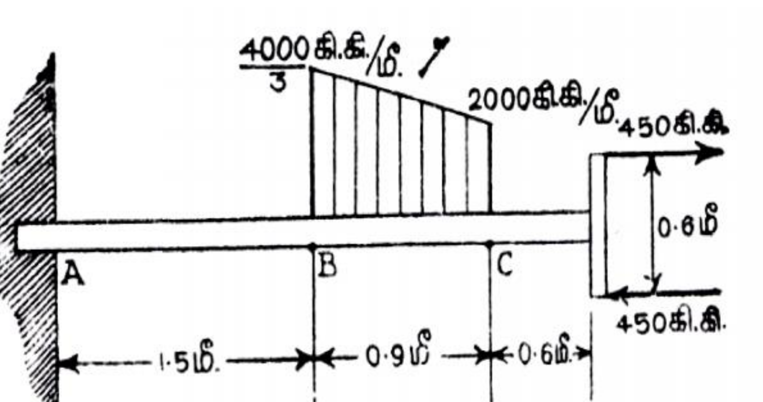
(Å¢¨¼ : F_A = 366 ¸¢.¸¢ À¼õ 1.93 s±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢ø A ÅÆ¢Â¡¸î ¦ºÂøÀÎõ.

F_B = 318 ¸¢.¸¢, À¼õ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢ø B ÅÆ¢Â¡¸î ¦ºÂøÀÎõ.



À¼õ 1-93

1.113. ´Õ Å¨Ç×ºð¼ ¯ò¾Ãõ (cantilever beam) À¼õ 1.94ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ûÅ¢¨º, ÒÈÅ¢¨º, ÍÆÄ¢¨ ½



À¼õ 1-94

¬¸¢ÂÅüÈ¡ø ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø « ¨Áó¾¢Õì¸¢ýÈÐ. ¸¢úì¸¡½¢õ ÒûÇ¢¸Ç¢ø ±ÎìÌõ ÌÚìÌ ¦ÅðÎôÀÌ¾¢Â¢ø ºÁ¿¢¨Ä « ¨ÁôÒìÌ¡¢Â ¯ûÅ¢¨º, ÍÆÄ¢¨½ôÒò ¾¢Èý¸Ç¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ñ¸.

(1) ÌÚìÌ ¦ÅðÎôÀÌ¾¢ A

(2) ÌÚìÌ ¦ÅðÎôÀÌ¾¢ B

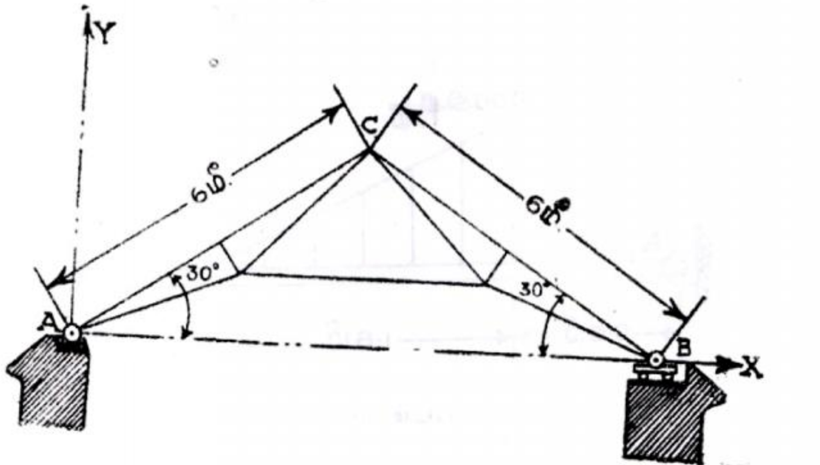
(3) ÌÚìÌ ¦ÅðÎôÀÌ¾¢ C

(Å¢¨¼, (a) $F_{A=}$900 ¸¢.¸¢; $M_{A=}$1980 Á£.¸¢.¸¢

(b) $F_{B=}$900 ¸¢.¸¢; $M_{B=}$630 Á£.¸¢.¸¢

(c) $F_{C=}$0 ¸¢.¸¢ ; $M_{C=}$270 Á£.¸¢.¸¢

1.114. 2000 ¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ ABC ±ýÛõ º¡É ¯ò¾Ãò¦¾¡Ì¾¢ ´ýÚ A ±ýÈ Ó¨ÉÂ¢ø À¼õ 1.95ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú À¢¨½ì¸ôÀðÎõ «¾ý B ±ýÛõ Áü¦È¡Õ



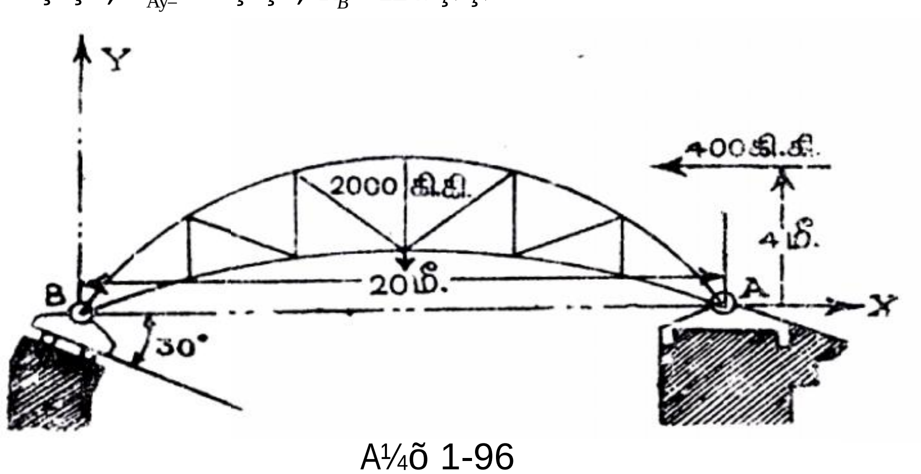
À¼õ 1-95

Ó¨É ¸¢¨¼Â¡¸×ûÇ ¾¸Î ´ýÈ¢ø ¯ÕñÎ ¦ºøÄò¾ì¸ ¯Õ¨ÇÂ¢ý§Áø ¦À¡Õò¾ôÀðÎÓûÇÐ. AC = BC = 6Á¢ : $\angle CAB = 30^\circ$ ±É×õ º¡É À¸¢÷¨Åì ¦ÀüÈÐõ 160 ¸¢.¸¢ ±¨¼ÔÓûÇ ¸¡üÚÅ¢¨º ´ýÚ (a uniformly distributed wind load of 160kg) AC ±ýÛõ ¯ò¾Ã ¯ÚôÀ¢üÌî ¦ºíÌò¾¡¸ ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸×õ ¦¸¡ñÎ A,B Ó¨É¸Ç¢ø ¿¢¸Øõ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼: ($R_{B=}1046$¸¢.¸¢) ; $F_{AX=}800$¸¢.¸¢; $F_{Ay=}1092$¸¢.¸¢)

1.115. 20 Á¢ð¼÷ ¿£ÇÓõ, 2000 ¸¢.¸¢ ±¨¼ÔÓûÇ Å¨Ç× ¯ò¾¢Ã¦Á¡ýÚ A ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø À¼õ 1.96ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú À¢¨½ì¸ôÀðÎûÇÐ. ¸¢¨¼¾¨ÇÂÐ¼ý 30° §¸¡½î º¡¢¨Åô¦ÀüÈ ¾¸Î ´ýÈ¢ø ¯ÕñÎ ¦ºøÄò¾ì¸ ¯Õ¨Ç¸Ç¢ý§Áø «¾ý B ±ýÈ Áü¦È¡ÕÓ¨É ¦À¡Õò¾ôÀðÎûÇÐ. ABÂ¢Å¢ÕóÐ 4 Á¢ð¼÷ ¯ÂÃò¾¢Öõ ABìÌ þ¨½Â¡É ¾¢¨ºÂ¢Öõ ÅÄ¢Ïõ ¸¡üÈ¡ÉÐ ¯ò¾Ãò¾¢ý§Áø 400 ¸¢.¸¢ «Ç×ûÇ Å¢¨º ´ý¨Èî ¦ºÂøÀÎòÐ¸¢È¦¾É¢ø Óð¼¸Ç¢ý ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ñ¸.

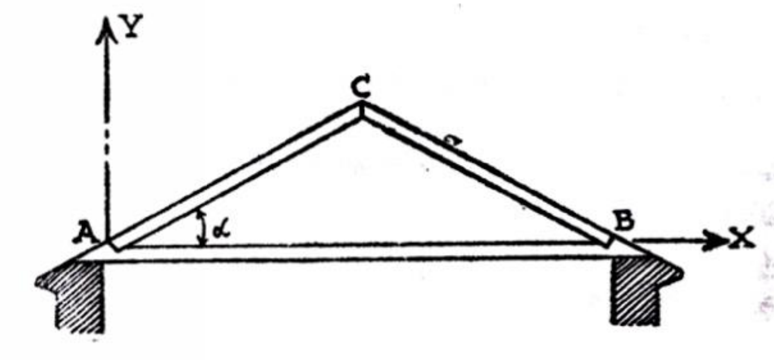
Å¢¨¼: $F_{Ax=}224$¸¢.¸¢ ; $F_{Ay=}920$¸¢.¸¢ ; $R_B = 1247$¸¢.¸¢



À¼õ 1-96

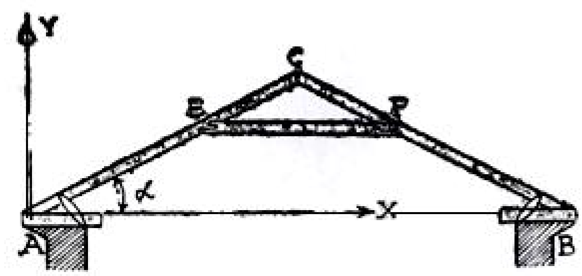
1.116. 5 Á¦ð¼÷ ¿¦ÇÓûÇ þÕ¯ò¾Ãí¸û C ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø À¢¨½ì¸ôÀð Îõ «ù×ò¾Ãò ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý þÕÓ¨É¸Ùõ À¼õ 1.97ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú AB ±ýÛõ µ÷ ¸¢¨¼ Å¢ð¼¦Á¡ýÈ¢ø ¦À¡Õò¾ôÀð Îõ ¯ûÇÉ. Ü¨ÃÂ¢ý ¯ò¾Ãí¸û ¸¢¨¼ò¾Çò¾¢ü Ì $\sim=\tan^{-1}(0.5)$ ±ýÈ §¸¡½ îº¡öÅ¢Öû ÇÉ. ¯ò¾Ã¯ÚôÒ ´ù¦Å¡ýÈ¢ý ¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢Öõ 180 ¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ ÀÙ ¦ºÂüÀÎ Å¾¡¸¢ø C,A ±ýÛÁ¢¼í¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸¨ÇÌ ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼: $F_C=$ 180 ¸¢.¸¢, $F_{AX}=180$ ¸¢.¸¢; $F_{Ay}=180$ ¸¢.¸¢



À¼õ 1-97

1.117. ´ù¦Å¡ýÚõ 4 Á¦ð¼÷ ¿¦ÇÓûÇ AC,BC ±ýÛõ ÁÃîºð¼í¸¨ÇÌ ¦¸¡ñ¼ µ÷ Ü¨Ã ¯ò¾Ãò¾¢ý

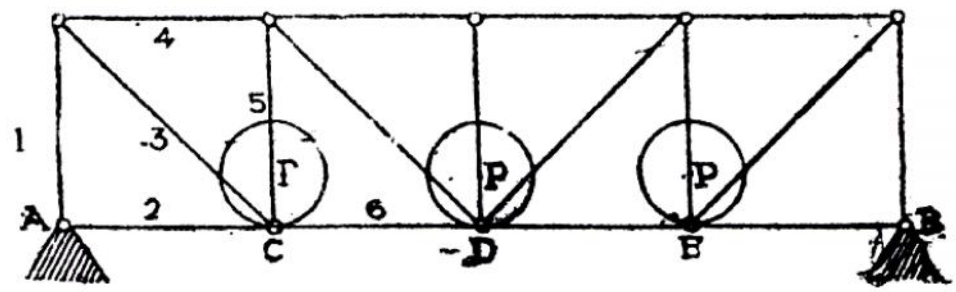


À¼õ 1-988

«ÊÓ¨É¸û A,B ±ýÛÁ¢¼í¸Ç¢Ä¨ÁÔõ ÍÅ÷ôÀÌ¾¢¸Ç¢ø ¦À¡Õò¾ôÀð Îõ, EF ±ýÛõ ¸¢¨¼ Å¢ð¼¦Á¡ýÈ¡ø ¾¡í¸ôÀð Îõ, À¼õ 1.98ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¿¢Úò¾¢ ¨Åì¸ôÀð Îû ÇÐ. AC, BC ºð¼í¸Ç¢ý ¨ÁÂô ÒûÇ¢¸Ç¢ø 160 ¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ ÀÙ ÀÂýÀÎò¾ôÀÎ¸¢ýÈÉ. ¯Ã¡ö× Å¢¨º ÒÈì¸½¢ì¸ôÀÎÅ¾¡¸×õ, Ü¨ÃÂ¢ý º¡¢× $\sim=\tan^{-1}(0.5)$ ±É×õ AC = 3EC ±É×õ ¦¸¡ñÎ A À¢Ä¨ÁÔõ ÍÅ÷ôÀÌ¾¢Â¢ý ±¾¢÷ò¾¡ì¸ Å¢¨º EFø ¿¢¸Øõ þØ Å¢¨º ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ : $R_A=160$ ¸¢.¸¢, T=480¸¢.¸¢

1.118. C,D,E ±ýÛÁ¢¼í¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ, p= 2000 ¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ ÀÙ ¨Åò ¾¡í¸¢Â Å ñ ½Á¡ÔûÇ À¡Ä¯ò¾Ãò¦¾¡Ì¾¢ ´ýÈ¢ý ÅÊÅ¨ÁôÒ À¼õ 1.99ø ¸¡ð¼ôÀð Îû ÇÐ. º¡ö¾ À¡×¯ò¾Ã¯ÚôÒ¸û (inclined web members) ¸¢¨¼¾¾ÇòÐ¼ý 45° §¸¡½ò¨¾ò ¾¡íÌ¸¢ýÈÉ. ÀÌÓ¨È¨Âì ¨¸Â¡ñÎ 1,2,3,4,5,6, ±ýÚ þÄì¸Á¢ð¼ ¯ÚôÒ¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸¨ÇÌ ¸¡ñ¸



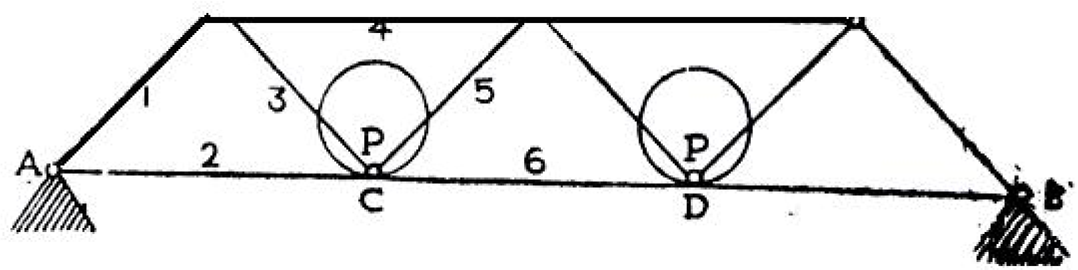
À¼õ 1-99

(Å¦ ¨ ¼ ; $S_1 = -3000$ ¸¦.¸¦ (þ Ú ì ¸ Å¦ ¨ º); $S_2 = 0$

$S_3 = +4250$ ¸¦.¸¦ (þ Ø Å¦ ¨ º); $S_4 = -3000$ ¸¦.¸¦

$S_5 = -1000$ ¸¦.¸¦, $S_6 = +3000$ ¸¦.¸¦,

1.119. À¼õ 1.100ø ¸¡ðÊÂ À¡Ä ¯ò¾¦Ã¦Á¡ ý Ú C,D ± ý È þ¼ í ¸ Ç¦ø p=2000 ¸¦.¸¦ ± ¨ ¼Ô û Ç þÕ ºÁÁ¡ É



À¼õ 1-100

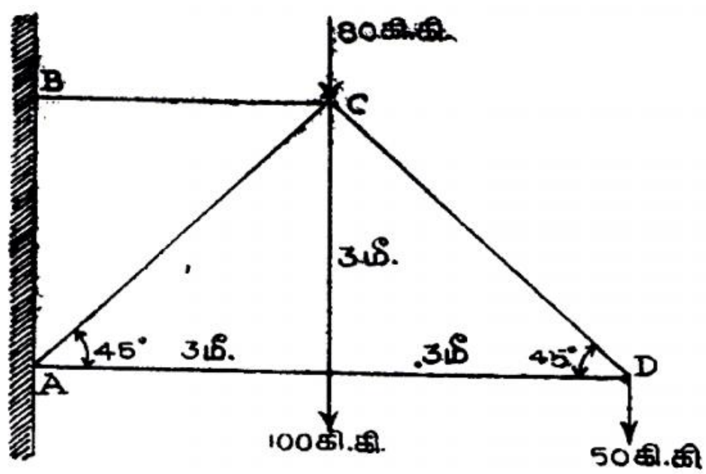
À Ù ¨ Åò ¾¡ í Ì ¸¦ÈÐ. º¡¦ó¾ À¡ × ¯ò¾Ã ¯ÚôÒ¸ û ¸¦ ¨ ¼¾Çò Ð¼ ý 45° § ¡ ½ í ¸ ¨ Ç ¯ ñ ¼¡ ì Ì ¸¦ ý È É ¦ Å É¦ø À Ì Ó ¨ È ¨ Â ì ¨ Â¡ ñ Î ÀÂ ý À Î ò¾ôÀð¼ À Ù Å¦ ý ¸¡Ã ½ Á¡ ¸ 1,2,3,4,5,6 ± É ì Ì È¦ì ¸ ôÀð Î û Ç ¯ÚôÒ¸ Ç¦ø ¿¦ ¸ Øõ Å¦ ¨ º ¸ ¨ Ç Ì ¸ ¡ ñ ¸ .

Å¦ ¨ ¼ : $S_1 = -3000$ ¸¦.¸¦ (þ Ú ì ¸ Å¦ ¨ º); $S_2 = 0$

$S_3 = +4250$ ¸¦.¸¦ : ¸¦.¸¦ (þ Ø Å¦ ¨ º); $S_4 = -3000$ ¸¦.¸¦

$S_5 = -1000$ ¸¦.¸¦, $S_6 = +3000$ ¸¦.¸¦,

1.120. Å ¨ Ç× ºð¼ ¯ò¾Ã¦¾¡ Ì ¾¦ (Cantilever truss) ´ ý Ú À¼õ 1.101ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ã ý Ú À Ù Å¦ ¨ É ò ¾¡ í ¸¦ÂÅ¡Úõ A,B ± ý Û Á¦¼ò¾¦ø ÀüÈ¦



À¼õ 1-101

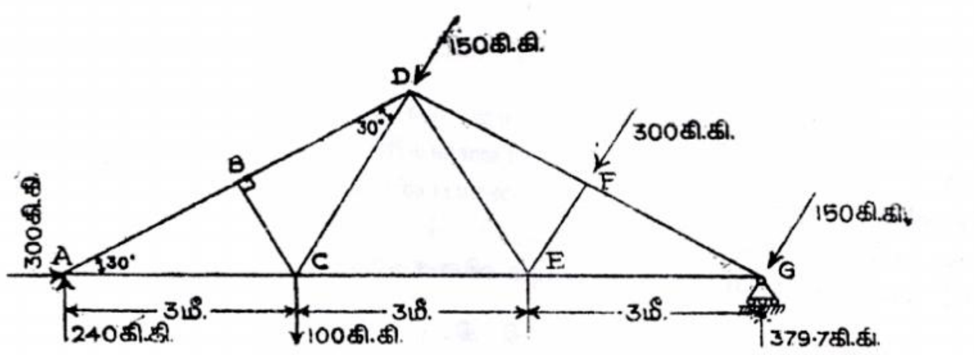
þÚì¸ôÀðÎõ (clamped)¯ûÇÐ. þÂü¸½¢¾ Ó¨È¨Âì ¨¸Â¡ñÎ ¯ò¾Ãî ºð¼í¸Ç¢ø ²üÀÎõ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼: $S_1 = -2820$ ¸¢.¸¢ : $S_2 = +2000$ ¸¢.¸¢

$S_3 = +2820$ ¸¢.¸¢ : $S_4 = -4000$ ¸¢.¸¢

$S_5 = 0$: $S_6 = +4000$ ¸¢.¸¢,

1.121. Ü¨Ã ¯ò¾Ãò¦¾¡Ì¾¢¦Â¡ýÚ À¼õ 1.102ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú A ±ýÈ Ó¨ÉÂ¢ø À¢¨½ì¸ôÀðÎõ G±ýÈ Ó¨ÉÂ¢ø ¯Õ¨Ç ´ýÈ¢ý §ÁØ ¦À¡Õò¾ôÀðÎõ 4 ÅÙ¨Åò ¾¡í¸¢ÂÅ¡Úõ ¯ûÇÐ. þÂü¸½¢¾ Ó¨È¨Âô ÀÂýÀÎò¾¢ ¯ò¾Ãò¦¾¡Ì¾¢ ¯ÚôÒ¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ ¿¢¸Øõ Å¢¨º¸¨Çì ¸¡ñ¸.

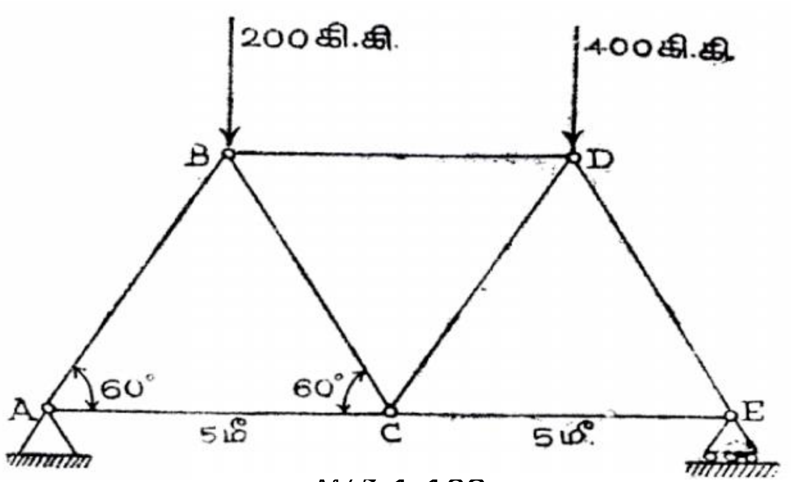


À¼õ 1-102

1.122. À¼õ 1.103ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ûÇ º¢Ó¨É þ¨½ô¨Àô ¦ÀüÈ (pin connected) ¯ò¾Ãò ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý ¯ÚôÒ¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ ²üÀÎõ Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ¸.

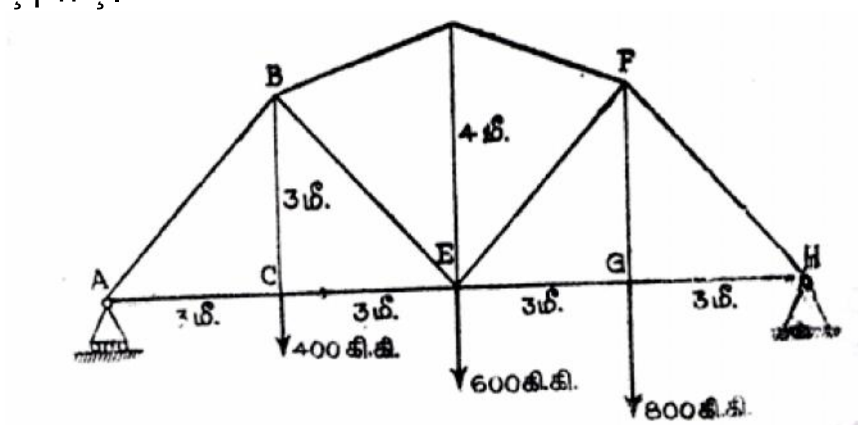
Å¢¨¼, $F_{AB} = 288$ ¸¢.¸¢ (þÚì¸ Å¢¨º)

$F_{BC} = 57.7$ ¸¢.¸¢ þØÅ¢¨º)
$F_{CD} = 57.7$ ¸¢.¸¢ þÚì¸Å¢¨º)
$F_{BD} = 173$ ¸¢.¸¢ þÚì¸Å¢¨º)
$F_{BD} = 173$ ¸¢.¸¢ þÚì¸Å¢¨º
$F_{CE} = 202$ ¸¢.¸¢ þØÅ¢¨º)
$F_{AC} = 144$ ¸¢.¸¢ þØÅ¢¨º)



À¼õ 1-103

1.123. À¼õ 1.104ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú º¼¢Ó¨É þ¨½ô¨Àô ¦ÀüÈ ¯ò¾Ãò ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý EC,ED,EF ±ýÛõ ¯ÚôÒ¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¨ÂÌ ¸¡ñ¸.



À¼õ 1-104

Å¢¨¼ $S_{EC} = 800$ ¸¢.¸¢(þØ Å¢¨º)
$S_{ED} = 600$ ¸¢.¸¢(þØ Å¢¨º)
$S_{EF} = 100\sqrt{2}$ ¸¢.¸¢ (þÚì¸ Å¢¨º)

1.124. <u>º¢È¢Â Å¢¨¼¸Ùì¸¡É §¸ûÅ¢¸û</u>

1. ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû ±ýÈ¡ø ±ýÉ?

2. ¯ûÅ¦¨º¸Ù ì Ì õ, ¦ÅÇ¦Å¦¨º¸Ù ì Ì ÓûÇ §ÅÚÀ¡Î ¸û Â¡¨Å?
3. þÕÀ¡¦Á¡½ í¸Ç¦ý « ¨ÁôÀ¦ø ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû ´ýÚ ºÁ¿¦¨ÄÂ¦ø þÕôÀ¾ü¸¡É §Å ñ ÊÂ ÁüÚõ §À¡¾¦Â ¿¦Àó¾¨ É¸¨Çì ÜÈ×õ
4. ¿¨¼Ó ¨ÈÂ¦ø ÀÂ ý À Î ò¾ôÀ¼ì ÜÊÂ ¾¡ í Ì ¾ø ¸¨Çô (supports)ÀðÊÂø þ¼×õ.
5. ¿¨¼ Ó ¨ÈÂ¦ø ÀÂ ý À Î ò¾ôÀ Î õ þ ¨ ½ôÒ¸ ¨Çô (connections) ÀðÊÂø þ¼×õ.
6. ÓôÀ¡¦Á¡½ ºÁ¿¦¨Ä ¯ò¾Ãì¸½ ì¸¦ý ¾É¦ôÀ Î ò¾¦Â Å¨ ÃÀ¼ò¾¦ø ¯ðÀ Î ò¾ôÀ¼§Å ñ ÊÂ¨ Å¸û Â¡¨Å?

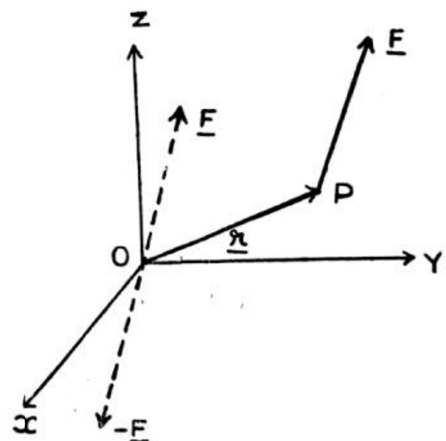
« Ä Ì – 2

¸ ðÊÚ ì ¸ô ¦À¡Õû ¸Ç¢ý ºÁ¿¢¨Ä

2.1 Å¢¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢ « ¨ÁôÀ¢ý ´ Î ì ¸õ

´Õ ¸ðÊÚ ì ¸ô ¦À¡ÕÇ¢ø ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢ ´ ýÈ¢ø ¦ºÂøÀ Î õ ´ü¨È Å¢¨ º Å¢ÕôÀôÀÊ Â¡§¾Û ¦Á¡Õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î ¸¢ýÈ ´Õ Å¢¨ º, «òÐ¼ý ´ÕÁ¢ì ¸ « ¨ÁÔõ ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¡ø ®Î ¦ºöÐ ºÁôÀ Î ò¾ø

¸ðÊÚ ì ¸ô ¦À¡Õû ´ýÈ¢ø P ± ý Û õ ÒûÇ¢Â¢ø F ± ý Û õ Å¢¨º ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ¸ .



À¼õ 2-1

O ± ýÀÐ Å¢ÕôÀôÀÊ ± Î òÐ ì ¦ ¸ ¡ û Ù õ ´Õ ÒûÇ¢Â¡ Ì ¸ . $\underline{F}$ ± ý Û õ Å¢ ¨ º ¨ Â O ± ý Û õ ÒûÇ¢ì Ì þ¼õ¦ÀÂ÷ò¾ø ¦ºöÅ¾ü Ì ¯¡Â « ¨ÁôÒ À¢ýÅÕÁ¡Ú Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ.

O ¨Åò ÐÅì ¸ôÒûÇ¢Â¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î P Â¢ý ¿¢ ¨Äò¾¢ ¨ º ¨ Â $\underline{r}$ ±É ì Ì ÈÈ¢ì ¸×õ. O Å¢ý ÅÆ¢§Â $\underline{F}$ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊü Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ Å ¨ ÃÔõ §¸¡ðÊø À¼õ 2.1 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú $\underline{F},\underline{-F}$ ± ý Û õ Å¢¨ º ¸ ¨ Çô Ò Ì ò¾×õ. þ ¨ Å ¸ û ´§Ã §¿÷ì§¸¡ðÊø ºÁ Û ¦Á¾¢ÕÁ¡ ¸ î ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ø þÅüÈ¢ý ¦¾¡ ÌÀÂý ÍÆ¢Â¡ Ì õ. ¬ §Å þ ¨ Å «ô¦À¡ÕÇ¢ý ºÁ¿¢ ¨ Ä ¨ Â ÀÄ¡¾¢ì ¸ ¡Ð.

±É§Å P Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ $\underline{F}$ ìÌ O ìÌ O Å¢ø ¦ºÂüÀÎõ $\underline{F}$ õ «òÐ¼ý ´ÕÁ¢ì¸ «¨ÁÔõ $(\underline{F}, -\underline{F})$ ±ý Ûõ ÍÆÄ¢¨ ½Ôõ ºÁÁ¡Ìõ. þí Ì $\underline{OP}, = \underline{r}$ ±ýÀÐ ÍÆÄ¢¨ ½Â¢Ä¨ÁÔõ Å¢¨º¸Ù ìÌò ¦¾¡¼÷ÒÀÎòÐõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢Â¡Å¾¡ø (Relative position vector) ÍÆÄ¢¨ ½ ìÌ ¯¡¢Â ¾¢ÕôÒò¾¢Èý $\underline{r} \wedge \underline{F}$ ±ýÈ¡Ìõ. ¬É¡ø þÐ§Å ÐÅì¸ôÒûÇ¢ O ÀüÈ¢ P ±ý Ûõ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ $\underline{F}$ ±ý Ûõ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÉ¡Ìõ.

$$\left\{\therefore P_{\text{Â¢ø} - \text{û Å¢¨º}} \underline{F}\right\} \equiv \left\{\left(P_{\text{Â¢ø}} \underline{F}\right)\left(\text{O}_{\text{ Å¢ø}} \underline{F}, -\underline{F}\right)\right\}$$

$$\equiv \left(\text{O}_{\text{ Å¢ø}} \underline{F}\right)$$

$$\left(P_{\text{Â¢ø}} \underline{F} \ \text{O}_{\text{ Å¢ø}} \underline{F}\right)$$

$$\equiv \left(\text{O}_{\text{ Å¢ø}} \underline{F}\right) + \underline{r} \wedge \underline{F}$$

$$\equiv \left(\text{O}_{\text{ Å¢ø}} \underline{F}\right) + \underline{M_0}$$

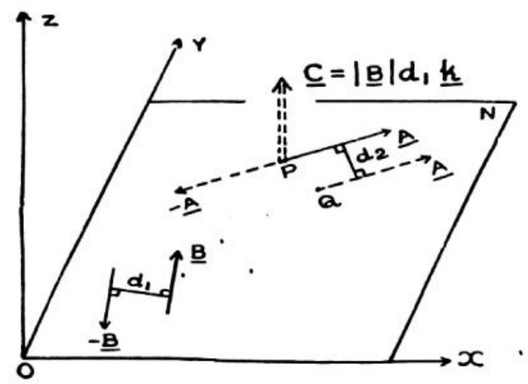
±É§Å P ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º Å¢ÕôÀôÀÊ Â¡§¾¡Û ¦Á¡Õ O ±ý Ûõ ÒûÇ¢ìÌ «¨¾ þ¨ ½Â¡¸ þ¼õ¦ÀÂ÷ò¾ø ¦ºöÐ «òÐ¼ý O Å¢ø «ùÅ¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢È¨É ´ÕÁ¢ì¸ «¨ÁòÐî ºÁôÀÎò¾Ä¡õ.

þùÅ¢¾ Å¢¨º, ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý ¬¸¢Â¨Å ´ÕÁ¢ì¸ ±ÎòÐî¦ºÂüÀÎõ «¨Áô§À,Å¢¨º-ÍÆÄ¢¨ ½ Ó¨È¨Â ± ñ ½üÈ ÅÆ¢¸Ç¢ø «¨Áì¸ÓÊÔõ.

“Å¢¨º-ÍÆÄ¢¨ ½” Ó¨ÈÂ¢ø Å¢¨º-ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý ¬¸¢ÂÅü¨È Å¨ÃÂÚìÌõ ¾¢¨ºÂ¢¸û ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ ¾¢¨º¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎÅ¾¡¸×õ ¯ûÇÉ.

2.2 Å¢¨º, ÍÆÄ¢¨ ½ ¬¸¢Â¨Å ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º-ÍÆÄ¢¨ ½ «¨ÁôÒìÌî º¡¢¿¢¸Ã¡É µ÷ ´ü¨È (single) Å¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚò¾ø

À¼õ 2.2ø ÍÆÄ¢¨ ½ ¨Â Å¨ÃÂÚìÌõ $(\underline{B}, -\underline{B})$ ±ý Ûõ Å¢¨º¸Ùõ, A ±ý Ûõ ¾É¢Å¢¨ºÔõ N ±ý Ûõ Å¢¨ºÔõ XOY ¾Çò¾¢Ä¢¨ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.



À¼õ 2-2

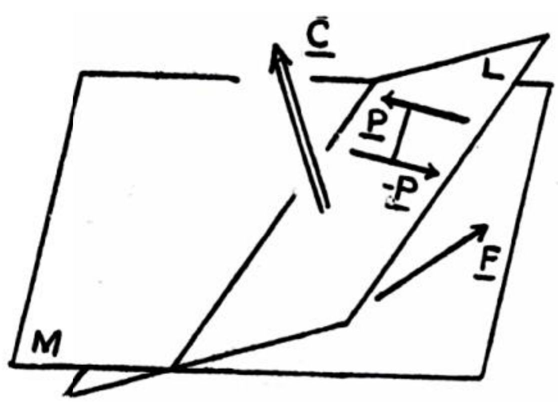
$(\underline{B}, -\underline{B})$ ±ý Ûõ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì ¯¡¢Â ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢ÈÝ $\underline{C} = |\underline{B}| d_1 \underline{k}$ ±ýÀÐ ¾¨ ¼¼ÂüÈ ¾¢¨ ºÂ¢Â¡Å¾¡ø «Ð $\underline{A}$ ±ý Ûõ Å¢¨ º ¦ºÂüÀ Î õ P ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø «¨ÁÂð Î õ. $\underline{P}$ Å¢ø $\underline{A}$ ì Ì ±¾¢÷ ¾¢¨ ºÂ¢Ä¨ÁÔÁ¡Ú $-\underline{A}$ ±ý Ûõ Å¢¨ º¨ÂÔõ «Ð ¦ºÂüÀ Î õ §¿÷ì§¸¡ðÊü Ì þ¨ ½Â¡¸ $d_2 = \frac{|\underline{B}| d_1}{|\underline{A}|}$ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø «¨ÁÔõ §¸¡ðÊø $\underline{A}$ ±ý Ûõ Å¢¨ º¨ÂÔõ ±Î ì ¸×õ.

þ í Ì $|\underline{B}| d_1 = |\underline{A}| d_2$ ±ýÈ¡Å¾¡ø $(\underline{B}, -\underline{B}) \equiv (\underline{A}, -\underline{A})$ ±É§Å

$(P Â¢ø \underline{A}) + (\underline{B} - \underline{B}) \equiv (P Â¢ø \underline{A}) + \{P Â¢ø \underline{A}, Q Å¢ø \underline{A}\} \equiv \{P Â¢ø \underline{A} + (-\underline{A}) +\} + \{Q Â¢ø \underline{A}\} \equiv (Q Å¢ø \underline{A})$

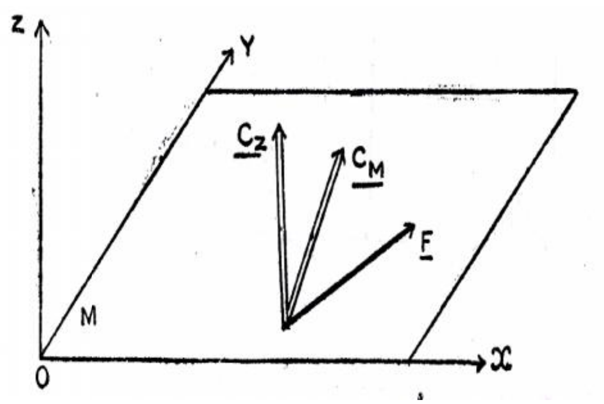
2.3 ÓÚì¸ø (Wrench):

Å¢¨ ºÔõ, ÍÆÄ¢¨ ½Ôõ ¦ÅùÅÚ ¾Ç í ¸Ç¢ø «¨ÁÂð Î õ. F ±ý Ûõ Å¢¨ º M ±ý Ûõ ¾Çò¾¢Öõ $\{\underline{P}, -\underline{P}; d\}$ L ±ý Ûõ ¾Çò¾¢Öõ À¼õ2.3ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂüÀ Î Å¾¡¸ì ¦¸¡û¸.



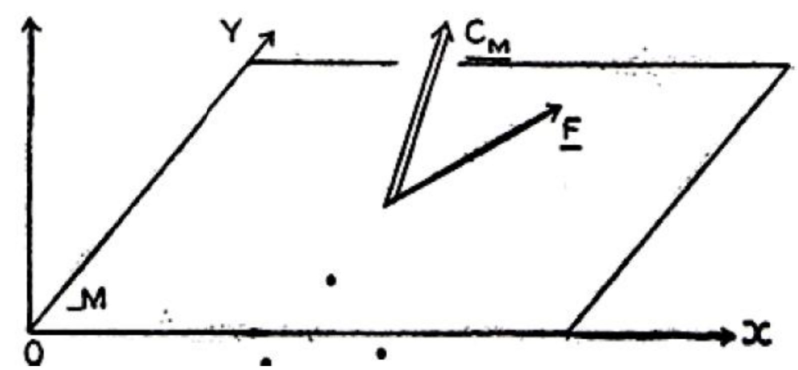
À¼õ 2-3

$\underline{C}$ ±ýÀÐ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý ¾¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚì¸ðÎõ. «Ð L ±ýÛõ ¾Çò¾¢ü Ìî ¦ºí Ìò¾¡É ¾¢¨ºÂ¢ø ¾¨¼ÂüÈ ¾¢¨ºÂ¢Â¡¸î ¦ºÂüÀÎõ, $\underline{C}$ Â¢ý À¸¢÷×¸¨Ç M ¾Çò¾¢ü Ìî ¦ºí Ìò¾¡É ¾¢¨ºÂ¢Öõ M ¾Çò¾¢Öõ Å¨ÃÂÚòÐ «Åü¨È $\underline{C_Z},\underline{C_M}$ ±Éì ÌÈ¢ì¸×õ. (À¼õ 2.4³ À¡÷ì¸)



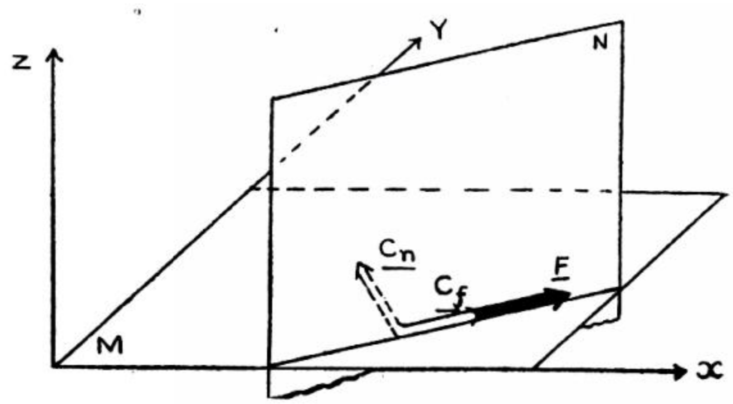
À¼õ 2-4

$\underline{F},\underline{C_z}$ ±ýÀ¨Å ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÅ¾¡ø «¨Å¸Ùì Ì º¡¢¿¢¸Ã¡É ´ü¨ÈÅ¢¨º¨Â M ¾Çò¾¢ø P ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ $\underline{F}$ ±ýÛõ Å¢¨º¨Â Q ±ýÛõ Å¢ÕõÀ¢Â ÒûÇ¢ ÅÆ¢Â¡¸ þ¨½Â¡¸ þ¼õ¦ÀÂ÷òÐô ¦ÀÈÄ¡õ. «¾üÌ ²üÈ¾¡É «¨ÁôÒ À¼õ 2.5 ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ.



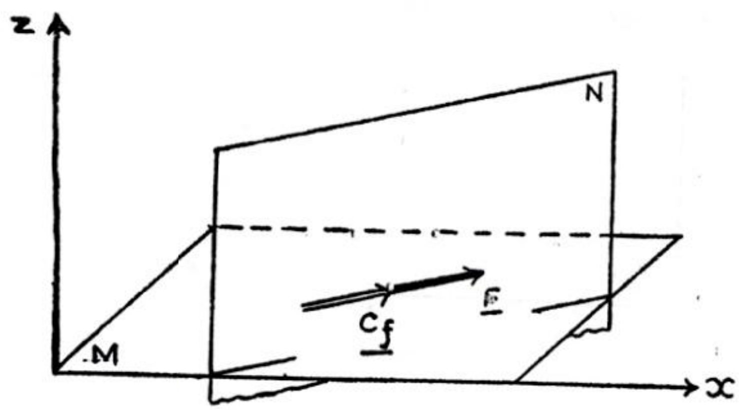
À¼õ 2-5

$\underline{C_M}$ ±ýÛõ ¾¢¨ºÂ¢ M ¾Çò¾¢Ä¨ÁÅ¾¡ø «¾ý À¸¢÷×¸¨Ç $\underline{F}$ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÂ¢Öõ $\underline{F}$ ìÌ ¦ºí Ìò¾¡É ¾¢¨ºÂ¢Öõ Å¨ÃÂÚòÐ «Åü¨È Ó¨È§Â $\underline{C_f},\underline{C_n}$ ±ÉìÌÈ¢ì¸×õ. (À¼õ 2.6 ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ) $\underline{F},\underline{C_n}$ ±ýÀ¨Å M ¾Çò¾¢ø ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ þÕó¾¡ø



À¼õ 2-6

« ¨ Å ¸ Ù ì Ì º¡¢¿¢ ¸Ã¡É ´ü¨ÈÅ¢¨º¨Â M ¾Çò¾¢ü Ì î ¦º í Ì ò¾¡É N ± ý Û õ ¾Çò¾¢ø $\underline{F}$ ± ý Û õ Å¢¨º¨Â þ ¨ ½ Â¡ ¸ þ¼õ¦ÀÂ÷òÐô ¦ÀÈÄ¡õ. ±É§Å $(\underline{F},\underline{C})$ ¬ ¸¢Â ¨ Å þÚ¾¢Â¡ ¸ ´ Î ì ¸ôÀð Î $(\underline{F},\underline{C_f})$ ± ý Û õ ´§Ã§À¡ ¸ Á¡É « ¨ Áô ¨ Àô
À¼õ 2.7 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ÀÚõ.



À¼õ 2-7

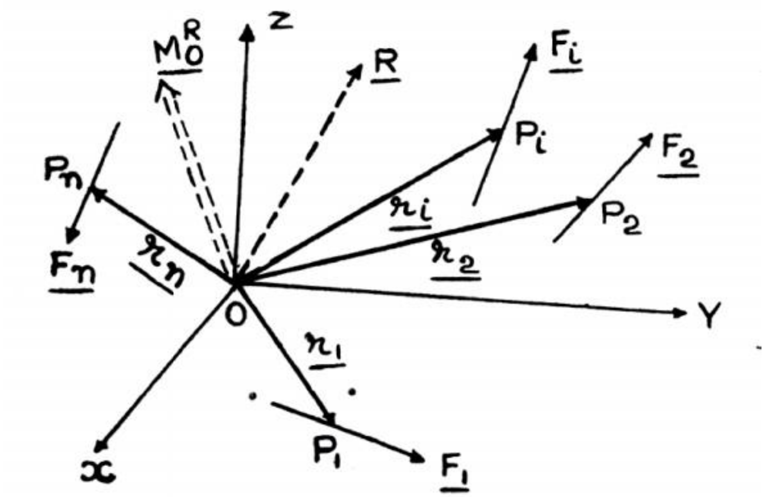
(F,C_f) ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ ý §º÷ì ¨ ¸§Â ÓÚì ¸ø (wrench) ± ÉôÀ Î õ. ±øÄ¡ Å¢ ¨ ºì ¸ ½ í ¸ ¨ Ç ì Ì ¨ È×À Î òÐõ ¿¢ ¨ Ä ¸ Ç¢ø ÓÚì ¸ ø ¿¢ ¨ Ä§Â « ÅüÈ¢ü Ì î º¡¢¿¢ ¸Ã¡É ±Ç¢Â « ¨ Áô ¨ Àô ¦ÀüÚûÇÐ. $(\underline{F},\underline{C_f})$ ± ý À ¨ Å ´ §Ã ¾¢ ¨ º¨Â¢ø « ¨ ÁÔ¦Á ý È¡ø, ÓÚì ¸ø Á¢ ¨ ¸Â¡É¾¡ ¸ ×õ (positive) « ¨ Å ¸ û

±¾¢¦Ã¾¢÷ò¾¢¨ºÂ¢ø «¨ÁÔõ §À¡Ð ÓÚì¸ø Ì¨ÈÂ¡É¾¡¸×õ (negative) ¸Õ¾ôÀÎõ.

2.4. Å¢¨º¸Ç¢ý ¸½ò¾¢üÌî º¡¢¿¢¸Ã¡É “Å¢¨º-ÍÆÄ¢¨½” ´Îì¸õ.

´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý Á¢Ð ¦ºÂüÀÎ¸¢È Â¡§¾Û¦Á¡Õ Å¢¨º¸Ç¢ý ¸½ò¾¢üÌî º¡¢¿¢¸Ã¡É ”Å¢¨º-ÍÆÄ¢¨½” «¨Áô¨À Å¢ÕõÀ¢ Â¡§¾Û¦Á¡Õ ÒûÇ¢Â¢ø Å¨ÃÂÚò¾ø:

$\underline{F_1},\underline{F_2},......\underline{F_i},.......\underline{F_n}$ ±ýÀ¨Å ´Õ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¸½ò¨¾ì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. Å¢¨º¸û ´ù¦Å¡ýÚõ $P_1,P_2,.......P_i,......P_n$ ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. À¼õ 2.8ø O ±ýÀÐ Å¢¾¢ì¸ðÊýÈ¢ Å¢ÕõÀ¢ÂÀ¡Ú ±ÎòÐì¦¸¡ûÙõ ÒûÇ¢Â¡Ìõ.



À¼õ 2-8

O ¨Åò ÐÅì¸ôÒûÇ¢¸ì ¦¸¡ñ¼ ¸ð¼¨ÁôÀ¢ø $P_1,P_2,.......P_i,......P_n$ ±ýÛõ ÒûÇ¢¸Ç¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç $\underline{r_1},\underline{r_2},......\underline{r_i},.......\underline{r_n}$ ±Éì ÌÈ¢ì¸×õ.

´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º Å¢ÕõÀ¢Â Â¡§¾Û¦Á¡Õ ¸ð¼¨ÁôÒô ÒûÇ¢Â¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ Å¢¨ºÔ¼ý §º÷ó¾ ´Õ ÍÆÄ¢¨½ì Ì¨ÈÂ¡ì ¸ÁÁ¡Ìõ ±ýÀ¾¡ø p_i ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ $\underline{F_i}$ ±ýÛõ Å¢¨ºìÌî º¡¢¿¢¸Ã¡¸ O- Å¢ø $\underline{F_i}$ ±ýÛõ Å¢¨º¨ÂÔõ O ÀüÈ¢ $-$ ñ¼¡Ìõ $\underline{F_i}$ Â¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢È¨É ÔÕõ ´ÕÁ¢ì¸ «¨Áì¸Ä¡õ.

$\{P_i$ -Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ F ±ý Û õ Å¢ ¨ º $\}$ ≡ O-ø ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F_i}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ ºÔ¼ ý O ÀüÈ¢ ´ ÕÁ¢ ì ¸ « ¨ ÁÔõ $\underline{M}.F_i = \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ ±ý Û õ Í ÆÄ¢ ¨ ½ ôÒò¾¢È ý , þ ùÅ ¡§È « ùÅ¢ ¨ º ¸ Ç¢ ý ¸ ½ ò¾¢Ö û Ç ´ ù ¦ Å ¡Õ Å¢ ¨ º $\underline{F_i},(i=1,2,3.....n)$ ì Ì õ ² üÀ Î ò¾Ä ¡õ.

¬ ¾Ä ¡ ø $\{P_1, P_2....P_i....P_n$ ±ý Û õ Òû Ç¢ ¸ Ç¢ ø ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F_1}, \underline{F_2}, ...\underline{F_i}, ...\underline{F_n}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ ý ¸ ½ õ $\equiv O-$ ø ¦ºÂüÀ Î õ $(\underline{F_1}, \underline{F_2}, ...\underline{F_i}, ...\underline{F_n})$ ±ý Û õ Å¢ ¨ ºÔ¼ ý $(\underline{r_1} \wedge \underline{F}_1 + \underline{r_2} \wedge \underline{F}_2 + ... + \underline{r_n} \wedge \underline{F}_n)$ ´ ÕÁ¢ ì ¸ « ¨ ÁÔõ ±ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ¨ ¼Â ´ Õ Í ÆÄ¢ ¨ ½ ¦ºÂüÀ Î õ $\sum_{i=1}^{n} F_i$ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º ±ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ¨ ¼Â ´ Õ ¾É¢î Í ÆÄ¢ ¨ ½)

« ¾¡ÅÐ ¾ÃôÀÎ¼ Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ ý ¸ ½ õ, OÅ¢ø Óó¾¢Â ¾¢ ¨ º ¸ Ù ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ î ¦ºÂüÀ Î ¸ ¢ ý È $F_1, F_2, ...F_n$ ±ý Û õ Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º§Â¡ Î §º÷ó¾ $\sum r_i \wedge F_i$ ±ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ¨ ¼Â ´ Õ ¾É¢î Í ÆÄ¢ ¨ ½ ì Ì î ºÁÁ¡ Ì õ. ±É§Å Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ ý ¸ ½ ò¾¢ü Ì î º¡¢¿¢ ¸ Ã¡ É ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º, « òÐ¼ ý §º÷ó¾ ¾É¢î Í ÆÄ¢ ¨ ½ ¬ ¸ ¢Â ¨ Å Ó ¨ È§Â $\sum_{i=1}^{n} F_i, \sum r_i \wedge F_i$ ¬ Ì õ.

2.4(1) ÀÃó¾ ¦ ÅÇ¢Â¢ø ´ ýÚ ì ¦ ¸ ¡ ýÚ ¦º í Ì ò¾ ¡ ¸ « ¨ ÁÔõ 3 ¾¢ ¨ º ¸ Ç¢ø $\underline{R}$, $\underline{M_\circ}^R$ ¬ ¸ ¢ÂÅüÈ¢ ý À ¸ ¢÷Å¢ Î ¸ ¨ Ç ì ¸ ¡ Ï ¾ø:

O ±ý Û õ Òû Ç¢Â¢ø ´ ýÚ ì ¦ ¸ ¡ ýÚ ¦º í Ì ò¾ ¡ ¸ « ¨ ÁÔõ O_X, O_Y, O_Z ±ý Û õ « î Í ¸ ¨ Ç ± Î ì ¸ ×õ. « ÅüÈ¢ ý ¾¢ ¨ º ¸ ¨ Ç $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ±ý Û õ µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ð Î õ. « ô¦À¡ØÐ

$$\underline{r_i} = x_i \underline{i} + y_i \underline{j} + z_i \underline{k}$$

$$\underline{F_i} = F_{ix} \underline{i} + F_{iy} \underline{j} + F_{iz} \underline{k}$$

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

$$M_{\circ}^{R} = M_{\circ x}^{R} \underline{i} + M_{\circ y}^{R} \underline{j} + M_{\circ z}^{R} \underline{k}$$ ± ý È¡ Ì õ.

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$$ ± ý ÀÐ

$$R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \underline{i} + F_{iy} \underline{j} + F_{iz} \underline{k} \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \right) \underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \right) \underline{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz} \right) \underline{k}$$ ¬ Ì õ.

« ¾¡ÅÐ

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

« ùÅ¡§È

$$\underline{M}_{\circ}^{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$$ ± ý ÀÐ

$$\underline{M_0}^{R} x_{\underline{i}} + \underline{M_0}^{R} y_{\underline{j}} + \underline{M_0}^{R} z_{\underline{k}} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy} \right) \underline{i} + \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz} \right) \underline{j} + \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \right) \underline{k} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy} \right) \right\} \underline{i} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz} \right) \right\} \underline{j} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \right) \right\} \underline{k}$$ ¬ Ì õ.

« ¾¡ÅÐ

$$M_{\circ x}^{R} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right)$$

$$M_{\circ y}^{R} = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right)$$

$$M_{\circ z}^{R} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right)$$

¬ ¸§Å « ùÅ¢ ¨ º ¸Ç¢ý ¸ ½Á¡ ÉÐ

OX ÅÆ¢§Â $\sum_{i=}^{n} F_{ix} = R_x$ ± ý È Å¢ ¨ º ì Ì õ,

OY ÅÆ¢§Â $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = R_y$ ± ý È Å¢ ¨ º ì Ì õ,

OZ ÅÆ¢§Â $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = R_z$ ± ý È Å¢ ¨ º ì Ì õ,

OX ÀüÈ¢ $\left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right) = \underline{M}_{ox}^{R}$ ± ý È ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ì Ì õ,

OY ÀüÈ¢ $\left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right) = \underline{M}_{oy}^{R}$ ± ý È ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ì Ì õ,

OZ ÀüÈ¢ $\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = \underline{M}_{oz}^{R}$ ± ý È ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ì Ì õ,

§ÁÖõ O ÅÆ¢Â¡ ¸ î ¦ º øÖõ $\underline{R}$ ± ý Û õ ¦ ¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ ºÂ¢ ý ± ñ Á¾¢ôÒ

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ ± ý È¡ Ì õ.

þ ò ¦ ¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º x, y, z ¬ Â í ¸ Ù ¼ ý ¯$_x$, ¯$_y$, ¯$_z$ ± ý Û õ § ¸ ¡ ½ í ¸ ¨ Ç

¯ ñ ¼¡ ì ¸ ¢É ¡ ø $\underline{R}$ ¦ ºÂüÀ Î õ § ¸ ¡ ðÊ ý ¾¢ ¨ º ì ¸ ¢¼ì ¨ ¸ ¸ ¨ Ç

$\frac{\cos¯_x}{R_x} = \frac{\cos¯_y}{R_y} = \frac{\cos¯_z}{R_z} = \frac{1}{R}$ ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î ¸Ç¢Ä¢ÕóÐ ¦ ÀÈÄ¡õ.

« ùÅ¡§È O ÀüÈ¢ « ¨ ÁÔõ M_o^R ± ý Û õ Å ¨ Ç× íÆÄ¢ ¨ ½ôÒò¾¢ÈÉ¢ ý ± ñ

Á¾¢ôÒ $M_o^R = \sqrt{\left(M_{ox}^R\right)^2 + \left(M_{oy}^R\right)^2 + \left(M_{oz}^R\right)^2}$ ± ý È¡ Ì õ.

§ÁÖõ þùÅ¨Ç× ÍÆÄ¨ ½ôÒò¾ÈÝ x, y, z ¬Â í¸ Ù¼Ý $¤_x, ¤_y, ¤_z$ ±Ý Ûõ §¸¡½ í¸¨Ç ¯ñ¼¡ì¸É¡ø $\underline{M_o^R}$ ¦ºÂü§¸¡ðÊÝ ¾¨ºì¸¼ì¨¸¸¨Ç

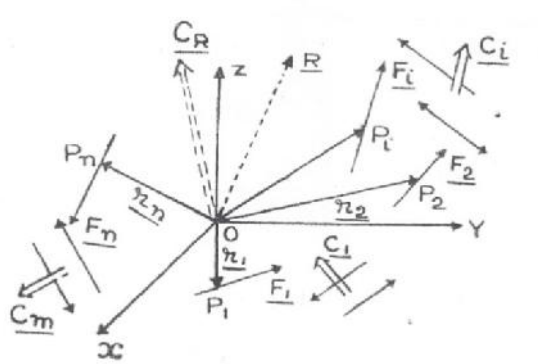
$$\frac{\cos¤_x}{M_{o\,x}^R}=\frac{\cos¤_y}{M_{o\,y}^R}=\frac{\cos¤_z}{M_{o\,z}^R}=\frac{1}{M_o^R}$$ ±Ý Ûõ ºÁÝÀ¡Î¸û Å¨ÃÂÚìÌõ.

$R, \bar{}_x, \bar{}_y, \bar{}_z$ ±ÝÀÉÅüÈÝ Á¾ôÒ¸û, OÅÝ ¿¨Ä¨ÂÎ º¡÷ó¾ÉÅ¡¸ þø¨Ä ±ÝÀÐ ¦¾Ç×:

²¦ÉÉø «ÅüÈÝ Á¾ôÀø $P_1, P_2, ...P_i......P_n$ ±ÝÀÉÅüÈÝ ¬Âò¦¾¡¨Ä¸û þ¼õ ¦ÀÈÅø¨Ä. ¬É¡ø $\underline{M_o^R}$ ÅÝ Á¾ôÒ OÅÝ ¿¨Ä¨ÂÎ º¡÷ó¾¾¡ö þÕìÌ¦ÁÝÀÐ ¦¾Ç×.

2.4(2) ´Õ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇø ¦ºÂüÀÎ¸ÝÈÂ¡§¾Û¦Á¡Õ Å¨º¸ÇÝ ¸½õ, «ô¦À¡ÕÇø ¾¡ìÌ¸ÝÈ ÍÆÄ¨ ½¸ÇÝ ¸½õ ¬¸ÂÅüÈü Ìî º¡¿¸Ã¡ Å¨º-ÍÆÄ¨ ½ «¨Áô¨À ÅÕõÀÂ Â¡§¾Û¦Á¡Õ ÒûÇÂø Å¨ÃÂÚò¾ø:

´Õ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇø $P_1, P_2, ...P_i......P_n$ ±Ý Ûõ ÒûÇ¸Çø Ó¨È§Â $F_1, F_2, ...F_i......F_n$ ±Ý Ûõ "ÍÆÄ¨ ½¸¨Ç ¯ÕÅ¡ì¸ ÓÊÂ¡¾ Å¨º¸û" (non-couple forces) ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. $C_1, C_2, ...C_n$ ±ÝÀ¨Å ÍÆÄ¨ ½¸¨Ç ¯ÕÅ¡ìÌõ Å¨º¸ÇÝ ¾ÕôÒò¾ÈÝ¸¨Ç «ÈÅôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. À¼õ 2.9 ø O ±ÝÀÐ Å¾ì¸ðÊÝÈ ÅÕõÀÂÅ¡Ú ±Îìì ÒûÇ¨Âì ÌÈì¸ðÎõ. O¨Å ÐÅì¸ôÒûÇÂ¡¸ì ¦¸¡ñ¼ ¸ð¼¨ÁôÀø, $P_1, P_2, ...P_i......P_n$ ±Ý Ûõ ÒûÇ¸ÇÝ ¿¨Ä¾¨ºÂ¸¨Ç $\underline{r}_1, \underline{r}_2, ...\underline{r}_i......\underline{r}_n$ ±Éì ÌÈì¸×õ.



À¼õ 2-9

O-Å¢ø ºÁÛ ¦Á¾¢ÕÁ¡É $\underline{F_i}, -\underline{F_i}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ º ¸ ¨ Ç «ÅüÈ¢Û ¨ ¼Â ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î ¸û P_i ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F_i}$ Â¢ÉÐ ¾¢ ¨ º ì Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ ²üÀ Î òÐ ¸. þ ¨ Å «ô¦À¡ÕÇ¢ý ºÁ¿¢ ¨ Ä ¨ Âô À¡¾¢ôÀ¾¢ø ¨ Ä. P_i Â¢ø ¯ûÇ Å¢ ¨ º $\underline{F_i}$ ±ýÀÐ Å¢ ¨ ºÂ¡ ÉÐ, O Å¢ø ¯ûÇ ±¾¢÷ þ ¨ ½ Å¢ ¨ º $-\underline{F_i}$ ±ýÀÐ §º÷óÐ $\underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ ±ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ¨ ¼Â ´Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¨ Â ¬ ì Ì õ.

P_i Â¢ø ¯ûÇ $\underline{F_i}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ ºÂ¡ ÉÐ, O-ø ¯ûÇ $\underline{F_i}$ ±ý Û õ ´Õ ºÁÁ¡É Å¢ ¨ º(parallel force) §Â¡ Î §º÷ó¾ $\underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ ±ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ¨ ¼Â ´Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ì Ì î ºÁõ.

« í ¹ ½ §Á Å¢ ¨ º ì ¸ ½ ò¾¢Ö ûÇ ´ ù ¦Å¡Õ Å¢ ¨ ºÔõ O-ø «¾ü Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ ±Î ì Ì õ Å¢ ¨ º§Â¡ Î §º÷ó¾ ´Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ì Ì î ºÁÁ¡ ¸ ²üÀ Î ò¾Ä¡õ. ¬¾Ä¡ø, $[P_1, P_2, ...P_i......P_n]$ ±ý Û õ ÒûÇ¢ ¸ Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î õ $\{F_i......F_n\}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ý ¸ ½ õ]+ $\{C_1, C_2 ....C_m\}$ ±ý Û õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ôÒò ¾¢Èý ¸ Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Ü Î ¾¼ø] $\equiv \Big[\{O$ Å¢ø ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F_1} + \underline{F_2} + ...\underline{F_i}......\underline{F_n}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ ºÔ¼ý ,O ±ý Û õ ÒûÇ¢ÂüÈ¢ ´ÕÁ¢ì ¸ « ¨ ÁÔõ. $\left(\underline{r_i} \wedge F_i + ... + \underline{r_i} \wedge F_i + \underline{r_n} \wedge \underline{F_n}\right)$ ±ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢Èý ¸ Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Ü ð Î ò¦¾¡ ¨ ¸ ¨ Âô ¦ÀüÈ ´Õ ¾É¢î ÍÆÄ¢ ¨ ½} + $\{C_1, C_2 ....C_m\}\Big]$ $\equiv \Big[\{O$ Å¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢ ¨ º $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$ } + $\{\underline{C}_R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i} + \sum_{i=1}^{m} \underline{C_i}$ ±ý Û õ ´Õ ¾É¢î ÍÆÄ¢ ¨ ½Â¡ Ì õ. ±É§Å ´Õ ¸ ðÊÚ ì ¸ ô ¦À¡ÕÇ¢§Ä ¦ºÂüÀ Î ¸¢ýÈ Â¡§¾Û ¦Á¡Õ Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ý ¸ ½ õ, «ô¦À¡ÕÇ¢§Ä ¾¡ì Ì ¸¢ýÈ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¸ Ç¢ý ¸ ½ õ ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È ´Õ ¾É¢ Å¢ ¨ º§Â¡ Î §º÷ó¾ ´Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½Â¡ ¸ ´ Î ì ¸ ÓÊÔõ (reduce). $\underline{R}, \underline{C_R}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý À ¸¢÷× ¸ ¨ Ç $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ±ý Û õ ¾¢ ¨ º ¸ Ç¢ø À¢ý ÅÕÁ¡Ú Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ Ä¡õ:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{iX}\,; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iY}\,; R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ}$$

$$C_{Rx=}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i F_{iZ} - z_i F_{iY}\right) + \sum_{i=1}^{m} C_{iX}$$

$$C_{Ry=}\sum_{i=1}^{n}\left(z_i F_{iX} - x_i F_{iZ}\right) + \sum_{i=1}^{m} C_{iY}$$

$$C_{RZ=}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i F_{iY} - y_i F_{iX}\right) + \sum_{i=1}^{m} C_{iZ}$$

Å¢ ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢ « ¨ ÁôÀ¢ý ´ Î ì ¸ õ
§ÁÖõ

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

$C_R^2 = C_{Rx}^2 + C_{Ry}^2 + C_{Rz}^2$ ±ýÈ¡ Ì õ.

2.5 ¾É¢î ºÈôÀ¡É Å¢ ¨ º « ¨ ÁôÒ¸Ç¢ý ´ Î ì ¸ õ (Reduction of Special Force Systems):

´Õ ¸ðÊÚ ì ¸ô¦À¡ÕÇ¢ý Á¢Ð ¦ºÂüÀ Î ¸¢ýÈ Â¡§¾Û ¦Á¡Õ Å¢ ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢ Å¢ÕôÀôÀÊ ± Î ì Ì õ O ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º $\underline{R}$ −¼ý §º÷óÐ ´Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ $\underline{M_o^R}$ ì Ì ´ Î ì ¸ ÓÊÔ¦ÁÉ ÓýÉ§Ã ÜÈôÀð¼Ð.

2.5.1 Å ¨ ¸ 1:

¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º $\underline{R}$ ±ýÀÐ ÍÆ¢Â¡ Ì ¦ÁýÈ¡ø $\underline{M_o^R}$ ±ý Û õ º¢ÈôÒò¾¢È ¨ Éô ¦ÀüÈ ´Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½Â¡ ¸ ´ Î ì ¸ôÀ Î õ.

2.5.2 Å ¨ ¸ 2:

$\underline{M_o^R}$ ±ýÀÐ O ÀüÈ¢ ± Î ì Ì õ Å¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ÖûÇ Å¢ ¨ º¸Ç¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢Èý ¸Ç¢ý Ì È¢Â¢Âø ÜðÎò¦¾¡ ¨ ¸ ¨ Âì Ì È¢ì Ì õ. þ¾ý Á¾¢ôÒ ÍÆ¢Â¡ Ì ¦ÁÉ¢ø ± Î ò¾ Å¢ ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢ O Å¢ø « ¨ ÁÔõ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º $\underline{R}$ ¬ ¸ ´ Î ì ¸ôÀ Î õ.

2.5.3 Å¨¸ 3:

"Å¢¨º ÍÆÄ¢¨½" «¨ÁôÀ¢ø Å¢¨ºÔõ ÍÆÄ¢¨½Ôõ ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸î ¦ºÂüÀÎ¦ÁÉ¢ø «ÅüÈ¢üÌî º¡¢¿¢¸Ã¡¸ Óó¾¢Â ¾¢¨ºìÌ Þ¨½Â¡É ¾¢¨ºÂ¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ ´Õ ´ü¨È Å¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚì¸ÓÊÔõ ±É Óý§À ÜÈôÀð¼Ð.

þùÅ¢¾¿¢¨Ä¨Á ¸¡úì¸¡ Ïõ «¨ÁôÒ¸Ç¢ø ²üÀÎõ

(i) ´Õ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢

(ii) ´Õ ¾Çò¾¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢

(iii) ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨ºìÌ Þ¨½Â¡¸î ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢.

2.5.3.1 ´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ Å¢¨º¸û:

Å¢¨º¸Ç¨ÉòÐõ ´ÕÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎÅ¾¡ø Þ¨½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºÔõ «ôÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ. ±É§Å ±Îò¾ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢ìÌî º¡¢¿¢¸Ã¡¸ ´Õ ´ü¨Èò ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚì¸ÓÊ¸¢ÈÐ.

2.5.3.2 ´Õ ¾Çò¾¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢:

´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý ÁÐ ´Õ ¾Çò¾¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ Â¡§¾Û¦Á¡Õ ÒûÇ¢Â¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ ´Õ ¾É¢ Å¢¨º§Â¡Î §º÷ó¾ ´Õ ÍÆÄ¢¨½ìÌî ºÁÁ¡Ìõ ±É ¿¢ÚÅ ÓÊÔõ. $\underline{F_1}, \underline{F_2}....\underline{F_i}....\underline{F_n}$ ±ýÈ ´Õ ¾ÇÅ¢¨º¸û $P_1, P_2, ...P_i......P_n$ ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ¼ðÎõ.

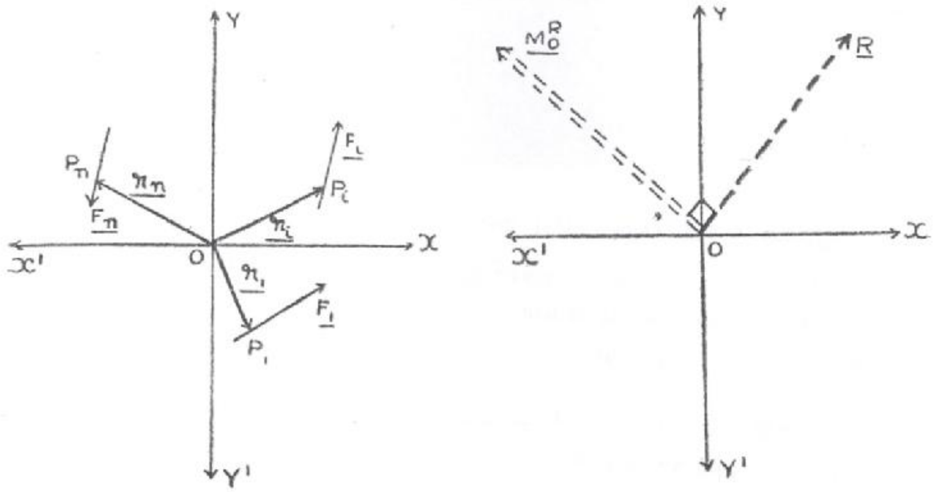
O ±ýÀÐ «ùÅ¢¨º¸Ç¢ý ¾Çò¾¢ÖûÇ Â¡§¾Û¦Á¡Õ ÒûÇ¢Â¡¸ðÎõ.

À¼õ 2.10 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú O ¨Åò ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¡¸×õ, O ÅÆ¢§Â $x'ox, y'oy$ ±ýÚõ ¦ºí ÌòÐì§¸¡Î¸¨Ç ì¸¢¨¼¼¢¨Ä «îÍ¸Ç¡¸×õ ¦¸¡û¸.

$P_1, P_2, ...P_i......P_n$ ±ýÀÉÅüÈ¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç $\underline{r_1}, \underline{r_2}, ...\underline{r_i}......\underline{r_n}$ ±Éì¦¸¡û¸.

O Å¢ý ÅÆ¢§Â $\underline{F_i}$ Â¢ÉÐ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊüÌ Þ¨½Â¡¸ Å¨ÃÂÔõ

§¸¡ðÊø À¼õ 2.10ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, $\underline{F_i}, -\underline{F_i}$ ±ýÛõ ºÁÛõ ±¾¢÷ÁÛÁ¡É Å¢¨º¸¨Ç ²üÀÎòÐ¸. þ¨Å¸û ´§Ã §¿÷ì§¸¡ðÊø ºÁÛõ ±¾¢÷Á¡¸ þÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý ÍÆ¢Â¡Ìõ. ¬¸§Å þ¨Å «ô¦À¡ÕÇ¢ý ºÁ¿¢¨Ä¨Âô À¡¾¢ôÀ¾¢ø¨Ä.



À¼õ 2-10

±É§Å P_i Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F_i}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ ºÂ¡ÉÐ O Å¢ø ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F_i}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ ºì Ì õ «òÐ¼ý ´ÕÅ¢ì ¸ « ¨ ÁÔõ $\underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ «ÇÅ¢ ¾¢ÕôÒò¾¢È ¨ É ô ¦ÀüÈ $\underline{F_i}, -\underline{F_i}$ ±ý Û õ ´Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ì Ì õ ºÁÁ¡ Ì õ.

þ í Ì $\underline{F_i}$ ±ýÀÐ Å¢ ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢Ö û Ç ²¾¡Å¦¾¡Õ Å¢ ¨ º ¨ Âì Ì È¢ôÀ¾¡ø, þùÅ¢¾î ¦ºÂø ¦¾¡ Ì ¾¢Ö û Ç ´ù¦Å¡Õ Å¢ ¨ ºì Ì õ ¦À¡ÕóÐõ. ±É§Å Å¢ ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢Ö û Ç ´ù¦Å¡Õ Å¢ ¨ º ¨ ÂÔõ, OÅ¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀ Î õ ºÁÁ¡É Å¢ ¨ ºÂ¡ ¸ ×õ, «òÐ¼ý ÜÊÂ ÍÆÄ¢ ¨ ½Â¡ ¸ ×õ « ¨ Áì ¸ Ä¡õ.

±É§Å {P_1 ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º $\underline{F_1}$,

P_2 ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º $\underline{F_2}$,

P_i ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º $\underline{F_i}$,

P_n ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º $\underline{F_n}$} ¬ ¸¢ÂÅüÈ¡ø Å ¨ ÃÂÚì ¸ ôÀ Î õ Å¢ ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢Â¡ÉÐ,

O ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{F_1}+\underline{F_2}+...+\underline{F_i}+...+\underline{F_n}=\underline{R}$ ±ýÈ ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢ ¨ ºì Ì õ,

« òÐ¼ý §Áü Ì È¢ôÀ¢ð¼ ÍÆÄ¢¨ ½ ôÒò ¾¢Èý ¸Ç¢ý Ì È¢Â¢Âø

Üð Î ò¦¾¡¨ ¸ ¨Âò ¾¢Õôòò¾¢ÈÉ¡ ¸ × ¨¼Â $\underline{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ ±ý Ûõ ´Õ ¦¾¡ Ì ÀÂý ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì õ (resultant couple) ºÁÁ¡ Ì õ.

þ í Ì $\underline{R}$ ±ý ÀÐ xoy ¾Çò¾¢Öõ $\underline{M}_o^R$ ±ý ÀÐ xoy ¾Çò¾¢ü Ì î ¦º í Ì ò¾¡É ¾¢¨ ºÂ¢Öõ ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ø « ¨ Å ¸ ¨ Ç Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ û ´ ýÚ ì ¦ ¸ ¡ ýÚ ¦º í Ì ò¾¡É ¾¢ ¨ º ¸Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î õ.

±É§Å $\{F_i\} = 1, 2 ....n$ ±ý Ûõ ´Õ ¾ÇÅ¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢, « ò¾Çò¾¢§Ä

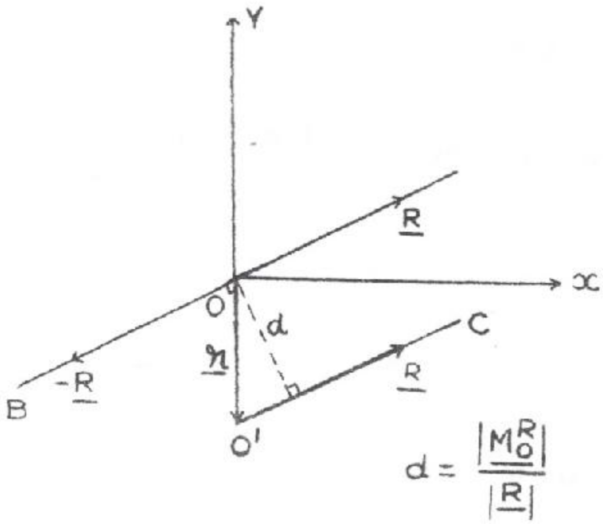
Â¡§¾Û ¦Á¡Õ O ±ý Ûõ $\underline{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ òûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ´Õ ¾É¢Å¢ ¨ º $\underline{R}$

¬ ¸×õ, « òÐ¼ý §º÷ó¾ ¾¢Õôòò¾¢Èý ¬ ¸ × ¨¼Â ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ Â¡ ¸×õ ´ Î ì Ì õ. §ÁÖõ « ò¦¾¡ Ì ¾¢ ´Õ ¾É¢Å¢ ¨ ºÂ¡ ¸ §Å¡ « øÄÐ ´Õ ¾É¢î ÍÆÄ¢¨ ½ Â¡ ¸ §Å¡ ´ Î ì ¸ ôÀ¼ì Ü Î õ ±ý Úõ ¸ ¡ð¼Ä¡õ.

² ¦É ýÈ¡ø ¾É¢Å¢ ¨ º $\underline{R} = 0$ ±ýÈ¡ Ì õ§À¡Ð ± Î ò¾Ç Å¢ ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢ $\underline{M}_o^R$ ±ý Ûõ ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ Â¡ ¸ ´ Î í Ì õ. $\underline{M}_o^R = 0$ ±ýÈ¡ø ± Î ò¾ ¾ÇÅ¢ ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾¢ ´Õ ¾É¢ Å¢ ¨ º $\underline{R}$ ¬ ¸ ´ Î í Ì õ. $\underline{R} \neq 0, \underline{M}_o^R \neq 0$ ±É¢ø « ò¦¾¡ Ì ¾¢ ´Õ ¾É¢Å¢ ¨ ºì Ì ´ Î í Ì ¦ÁÉ ì ¸ ¡ð¼Ä¡õ.
´Õ ¸ðÊÚ ì ¸ ô¦À¡Õû Ç¢ý ÁÐ ´§Ã¾Çò¾¢§Ä ¦ºÂüÀ Î ¸¢ýÈ ´Õ ¾É¢Å¢ ¨ ºÔõ ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ Ôõ §º÷óÐ ºÁ¿¢ ¨ Ä ¨ Â ¯ ñ Î À ñ ½ ¡Ð. ¬ É¡ø « Åü ¨ È Óó¾¢Â¾¢ ¨ ºì Ì õ þ ¨ ½ Â¡É ¾¢ ¨ ºÂ¢§Ä ¦ºÂüÀ Î ¸¢ýÈ ´Õ ¾É¢Å¢ ¨ ºì Ì î ºÁÁ¡ ¸ Á¡üÈÓÊÔõ.

þ ¨ ¾ ¿¢ÚÅ $\underline{M}_o^R$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ¨ Â, ´ù¦Å¡ ýÚõ R « Ç×ûÇ þÕ ºÁ Û ¦Á¡ò¾¡É ¡É $(\underline{R_i}, -\underline{R})$ ±ý Ûõ Å¢ ¨ º ¸ ¨ Çì ¦ ¸ ¡ ñ Î , ´ ýÚ Rý ¾¢ ¨ ºì Ì

§¿¦Ã¾¢Ã¡ ¸ À¼õ 2.11 ø



À¼õ 2-11

¸¡ðÊÂÅ¡Ú OB ÅÆÂ¡¸×õ, $O'C$ Áü¦È¡ýÚ ÅÆÂ¡¸×õ ¦ºÂøÀÎõ ÍÆÄ¨½Â¡ø Á¡üÈÎ ¦ºö¸. þí Ì $O'C$ ±ýÛõ §¸¡Î, $\frac{M_o^R}{}$ Åý ÌÈì§¸üÀ OBì Ì ÅÄÁ¡¸§Å¡ «øÄÐ þ¼Á¡¸§Å¡, «¨ÁóÐ OB, O'C þ¨¼ÂÄ¨ÁÔõ ¦ºí Ìò Ðò ¦¾¡¨Ä× $= \frac{|M_0^R|}{|\underline{R}|}$ ¬¸ ¿ÚÅôÀÎõ. O Åø ¦ºÂüÀÎõ Å¨º¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ ºÁôÀÎò¾ì ¦¸¡ûÅ¾¡ø, O' þø $O'C$ ÅÆ§Â ¦ºÂüÀÎõ $\underline{R}$ ±ýÛõ ¾ÉÅ¨º§Â ±ïºÔûÇ¾¡Ìõ. $\underline{R}, M_o^R$ ¬¸ÂÅüÈý À¸÷×¸¨Çì ¸¡Ï¾ø:

$$\underline{F_i} = F_{ix}\underline{i} + F_{iy}\,\underline{j}$$

$$\underline{r_i} = x_i\underline{i} + y_i\,\underline{j}$$

$$\therefore \underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$$

«¾¡ÅÐ

$$R_x\,\underline{i} + R_y\,\underline{j} = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\,\underline{i} + F_{iy}\,\underline{j})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)\underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)\underline{j}$$

$\therefore R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$ ±ýÈ¡ Ì õ.

§ÁÖõ

$$\underline{M_o^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & O \\ F_{ix} & F_{iy} & O \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i\, F_{iy} - y_i\, F_{ix} \right) \underline{k}$$

$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \right) \right) \underline{k} = M_0^R \underline{k}, \underline{k}$ ±ýÀÐ XOY ¾Çò¾üÌ î ¦º í Ì ò¾¡¸ « ¨ÁÔõ

µÃÄ Ì ò ¾ ¨ ºÂÂ¡ Ì õ. O ±ý Û õ ÒûÇÂý ¿ ¨ Äò¾ ¨ ºÂ ¨ Â $\underline{r_0} = x\underline{i} + y\underline{j}$ ±É ì ¦ ¸ ¡ûÇ.

$\underline{M_o^R} = r \wedge \underline{R}$ ±ýÈ¡ ¸ §Å ñ Î õ.

« ¾¡ÅÐ

$$M_0^R \underline{k} = \left(x\underline{i} + y\underline{j} \right) \wedge \left(R_x \underline{i} + R_y \underline{j} \right)$$

$$= \left(xR_y - yR_x \right) \underline{k}$$

« ¾¡ÅÐ

$M_o^R = xR_y - yR_x$ ¬ Ì õ.

þÐ§Å O ÅÆ§Â ¦ºÂüÀ Î õ ¾ÉÅ ¨ º $\underline{R}$ ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊý ºÁýÀ¡¼¡ Ì õ.

2.5.3.3. ´Õ Ì ÈôÀð¼ ¾ ¨ ºì Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ « ¨ÁÔõ Å ¨ ºò¦¾¡ Ì ¾:

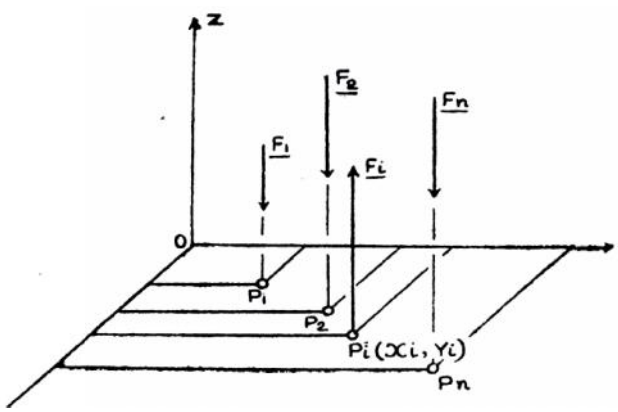
$\underline{F_1}, \underline{F_2} ....\underline{F_i}......\underline{F_n}$ ±ý Û õ Å ¨ º¸û z « î Í ì Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ þÕì ¸ð Î õ. « ùÅ ¨ º¸û XOY ¾Çò ¨ ¾ô À¼õ 2.12 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú $P_1, P_2, ...P_i...P_n$ ±ý Û õ ÒûÇ¢ ¸ Ç¢ø ¦Åð¼ð Î õ.

O¨Å Íð¼¨ÁôÀ¡¸ì ¦¸¡ñÎ P_i ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{r_i}$ ±É ì¦¸¡û¸.

O Å¢ý ÅÆ¢§Â$\underline{F_i}$ Â¢ÉÐ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊüÌ þ¨½Â¡¸ Å¨ÃÔõ §¸¡ðÊø ¸¡ðÊÂ¡Ú $\underline{F_i}, -\underline{F_i}$ ±ýÛõ ºÁÛ¦Á¾¢ÕÁ¡É Å¢¨º¸¨Ç ²üÀÎòÐ¸. þÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý ÍÆ¢Â¡Å¾¡ø, þ¨Å ±Îò¾ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢Â¢ý «¨Áô¨Àô À¡÷ôÀ¾¢ø¨Ä.

±É§Å P_i Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ F_i ±ýÛõ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ, O Å¢ø ¦ºÂüÀÎõ $\underline{F_i}$ ±ýÛõ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ, «òÐ¼ý ´ÕÁ¢ì¸ « ¨ÁÔõ $\underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ ±ýÛõ ¾¢ÕôÒò¾¢È¨Éô ¦ÀüÈ $\underline{F_i}, -\underline{F_i}$ ±ýÛõ ´Õ ÍÆÄ¢¨½ìÌî ºÁÁ¡Ìõ.

þùÅ¡§È, þ¨½ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢ÂÖûÇ ´ù¦Å¡Õ Å¢¨º¨ÂÔõ, OÅ¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ ºÁÁ¡É Å¢¨ºÂ¡¸×õ, «òÐ¼ý §º÷ó¾ ÍÆÄ¢¨½Â¡¸×õ Á¡üÈ¢Â¨Áì¸Ä¡õ.



Ã¼õ 2-12

O ÅÆ¢§Â ºÁÁ¡¸î ¦ºÂüÀÎõ $\underline{F_1} + \underline{F_2} + ... + \underline{F_i} + ... + \underline{F_n} = \underline{R}$ ±ýÈ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨ºìÌõ,

«òÐ¼ý ´ÕÁ¢ì¸ « ¨ÁÔõ ÍÆÄ¢¨½ôÒò ¾¢Èý¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢ø

Üð¼ò¦¾¡¨¸¨Âò ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÉ¡¸×Ó¨¼Â $\underline{M_o^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ ±ýÛõ ´Õ ¦¾¡ÌÀÂý ÍÆÄ¢¨½ìÌî ºÁÁ¡Ìõ.

þ í Ì $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \underline{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \underline{k}$ ¬ Ì õ.

$$\underline{M_0^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \underline{i} + y_i \underline{j} \right) \wedge \left(F_i \underline{k} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-x_i . F_i \right) \underline{j} + \sum_{i=1}^{n} \left(y_i . F_i \right) \underline{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_i \right) \underline{i} + \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_i \right) \underline{j}$$ ¬ Ì õ.

±É§Å $\underline{R}$ ±ýÀÐ $\underline{k}$ ±ý Ûõ µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢Öõ, $\underline{M_o^R}$ ±ýÀÐ XOY ¾Çò¾¢Öõ ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ø « ¨ Å ¸ û ´ ý Ú ì ¦ ¸ ¡ ý Ú ¦ º í Ì ò¾¡ É ¾¢ ¨ º ¸ Ç¢ø ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ Ì õ.

¬ ¾Ä¡ø þ ¨ ½ Å¢ ¨ ºò¦ ¾¡ Ì ¾¢ ´ ý ¨ È, Â¡§¾Ûõ ´ Õ O ±ý Ûõ Òû Ç¢Â¢ø ºÁ¡ó¾ÃÁ¡ ¸ î ¦ºÂüÀ Î õ ´ Õ ¾É¢ Å¢ ¨ º $\underline{R}$ ¬ ¸ ×õ, « òÐ¼ý ´ ÕÁ¢ ì ¸ þ ¨ ½ Å¢ ¨ º ¸ Ù ì Ì î ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ « ¨ ÁÔõ ¾Çò¾¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ´ Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ Â¡ ¸ ×õ ´ Î ì ¸ ÓÊÔõ.

¾É¢Å¢ ¨ º $\underline{R} = 0$ ±É¢ø, þ ¨ ½ Å¢ ¨ ºò¦ ¾¡ Ì ¾¢ $\underline{M_o^R}$ ±ý Ûõ ´ Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ Â¡ Ì õ.

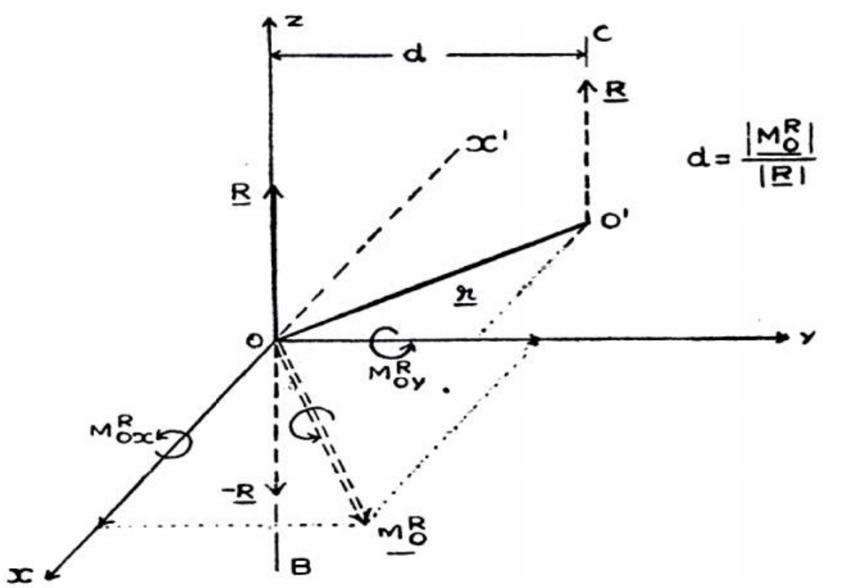
$\underline{M_O^R} = O$ ±É¢ø þ ¨ ½ Å¢ ¨ ºò¦ ¾¡ Ì ¾¢ ´ Õ ¾É¢ Å¢ ¨ º R ¬ ¸ ´ Î í Ì õ.

$\underline{R} \neq 0, \underline{M_o^R} \neq 0$ ±É¢ø, « ùÅ¢ ¨ ½ ò¦ ¾¡ Ì ¾¢ ´ Õ ¾É¢Å¢ ¨ º ì Ì ´ Î í Ì õ ±É ì ¸ ¡ð¼Ä¡õ.

þ ¨ ¾ ¿¢ÚÅ, Ó¾Ä¢ø $\underline{R}$ ±ýÀÐ, z « îº¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ ¸ ×õ,

$\underline{M_o^R}$ ±ý Ûõ ÍÆÄ¢ ¨ ½ XOY ¾Çò¾¢Ä ¨ ÁÅ¾¡ ¸ ×õ ¦ ¸ ¡ û Ç ×õ.

$\underline{M_o^R}$ ±ý Ûõ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¨ Â, ´ ù ¦ Å¡ ý Úõ $\underline{R}$ « Ç× û Ç þÕ ºÁÛ ¦Á¾¢ÕÁ¡É $(\underline{R}, -\underline{R})$ ±ý Ûõ Å¢ ¨ º ¸ ¨ Ç ì ¦ ¸ ¡ ñ Î , ´ ý Ú $\underline{R}$ ý ¾¢ ¨ º ì Ì §¿÷¾¢¨Ã¡ ¸ À¼õ 2.13ø ¸ ¡ðÊÂÅ¡Ú OB ÅÆ¢Â¡ ¸ ×õ Áü¦È¡ ý Ú $O'C$ ÅÆ¢Â¡ ¸ ×õ ¦ºÂøÀ Î õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ Â¡ø Á¡üÈ¢ Î ¦ ºö ¸ .



À¼õ 2-13

þ í Ì $O'C$ ±ý Ûõ §¸¡Î $\underline{M_o^R}$ Å¢ý ÌÈ¢ì§¸üÀ z «î Í ì Ì þ ¨ ½ Â¡¸ Á¢¨ ¸ò¾¢ ¨ ºÂ¢§Ä¡ «øÄÐ Ì ¨ È×ò¾¢ ¨ ºÂ¢§Ä¡ « ¨ ÁóÐõ, OB $O'C$ ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ ¦º í Ì òÐò¦¾¡ ¨ Ä× $= \frac{|\underline{M_0^R}|}{|\underline{R}|}$ ¬ ¸ þÕ ì Ì Á¡Úõ ¿¢ÚÅôÀ Î õ. O Å¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ º ¸ û ´ ý ¨ È¦Â¡ ýÚ ºÁôÀ Î ò¾¢ì¦ ¸¡ûÅ¾¡ø O' Å¢ø, $O'C$ ÅÆ¢Â¡¸î ¦ºÂüÀ Î õ $\underline{R}$ ±ý Ûõ ¾É¢Å¢ ¨ º§Â ± ï º¢Ôû Ç¾¡ Ì õ.

$\underline{R}$, $\underline{M_o^R}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý À¸¢÷× ¸ ¨ Ç ì ¸ ¡ Ï ¾ø:

$$\underline{F_i} = F_i \underline{k}$$

$$\therefore R_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = \sum_{i=1}^{n} F_i \underline{k}$$

« ¾¡ÅÐ

$$R\underline{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \underline{k}$$

$$\therefore R = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

¬ Ì õ.

§ÁÖõ $\underline{M_o^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$

$$\underline{M_{oX}^R}\,\underline{i} + \underline{M_{oy}^R}\,\underline{j} = \left(\sum y_i F_i\right)\underline{i} - \left(\sum x_i F_i\right)\underline{j}$$

« ¾¡ÅÐ $M_0^R X = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i F_i\right); M_0^R Y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i F_i\right)$ ¬ Ì õ.

O' ±ý Ûõ 0ûÇ¢Â¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$ ±É ì ¦ ¸ ¡ûÇ $\underline{M_o^R} = \underline{r} \wedge \underline{R}$ ±ýÈ¡ ¸§Å ñ Î õ.

¬ ¾Ä¡ø $M_{0x}^R \underline{i} = M_{0y}^R \underline{j} = \left(x_i + y\underline{j}\right)\left(R\underline{k}\right)$

$$= -xR\underline{j} + yR\underline{i}$$

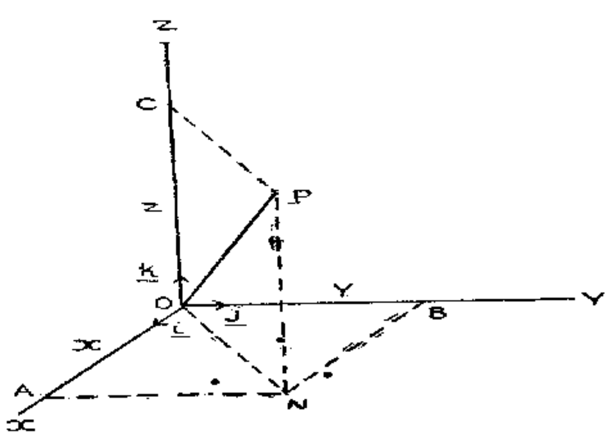
$$= yR\underline{i} + xR\underline{j}$$

¬ ¾Ä¡ø $M_{0x}^R = yR, M_{0y}^R = -xR$ ¬ Ì õ.

¬ ¾Ä¡ø $x = -\dfrac{M_{oy}^R}{R}, y = \dfrac{M_{ox}^R}{R}$ ±ý Ú Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ôÀ Î õ.

2.6 ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ (position vector)

´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ 0ûÇ¢¨Âî Íð¼¨ÁôÀ¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ²§¾Ûõ ´Õ 0ûÇ¢Â¢ý ¿¢¨Ä¨Â Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ. þùÅ¢Õ 0ûÇ¢¸¨Ç î §º÷ì Ì õ ¾¢¨ºÔ¼ý ÜÊÂ Ð ñ Î §¿÷§¸¡ðÊý ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ± Î ò¾ 0ûÇ¢Â¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ ±ÉôÀÎ õ. ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢Â¢ý ± ñ Á¾¢ô¨Àò Ð ñ Î §¿÷§¸¡ðÊý ¿¦Çõ Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ.



À¼õ 2-14

À¼õ 2.14ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø Ox, Oy, ±ýÈ ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ ¦ÅðÊì¦¸¡ûÙõ «î Í¸¨Ç «¨Áì¸×õ. ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø P ±ýÈ ÒûÇ¢¨Â ±Î ì¸×õ P ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{OP}$ ±ýÈ «õÒì§¸¡Î Å¨ÃÂÚì Ìõ. $\underline{OP}$ ý ¿¢¨Ä r ±É ì ¦¸¡ ñ Î x, y, z «î Í¸Ç¢ø «¾ý Å¢úîº¢¸û (projections) Ó¨È§Â, x, y, z ±ýÈ¢Õì Ì ¦ÁÉ¢ø P ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ $\underline{OP} = \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ ±ýÚ ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ. þí Ì $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ±ýÀ¨Å x, y, z «î Í¸Ç¢ý ¾¢¨º¸¨Ç Å¨ÃÂÚì Ìõ µÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡ Ìõ. §ÁÖõ x, y, z ±ýÀ¨Å P ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ý «î Íò ¦¾¡¨Ä×¸Ç¡ Ìõ.

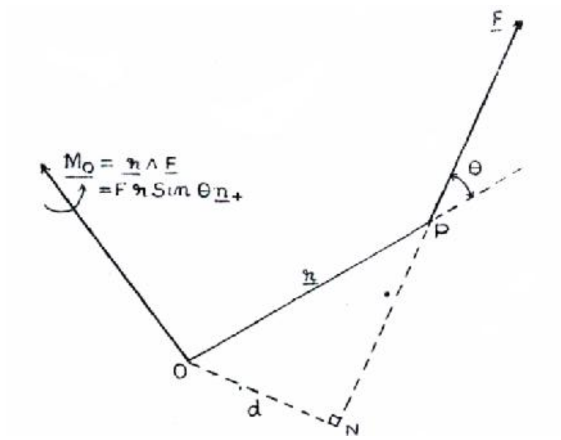
2.7 ´Õ ÒûÇ¢ì Ì ¯¡¢Â ´Õ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò ¾¢Èý (Moment of a force about a point)

ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø O ±ýÀÐ ´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É ÒûÇ¢¨Âì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. $\underline{F}$ ±ýÀÐ ´Õ Å¢¨º¨Â «È¢Å¢ì¸ðÎõ. O ±ýÈ ÒûÇ¢ì Ìõ $\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨º ¦ºÂüÀÎõ §¿÷§¸¡ðÊüÌõ ¯ûÇ ¦ºí ÌòÐò ¦¾¡¨Ä¨Å d ±É ì ¦¸¡ûÇ×õ.

$\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨º ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸¢ø, «Ð «ô¦À¡Õ¨Ç O ±ýÈ ÒûÇ¢¨Âî ÍüÈ¢ ÅÄÐ «øÄÐ þ¼ÐÒÈõ ÍÆÄî¦ºöÔõ «ùÅ¢¾î ¦ºÂø "¾¢ÕôÒò¾¢Èý" (Moment) ±ÉôÀÎõ. Å¢¨ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ, O Å¢Ä¢ÕóÐ Å¢¨º ¦ºÂüÀÎõ §¿÷§¸¡ðÊüÌ Å¨ÃÔõ ¦ºí ÌòÐì§¸¡ðÊý ¿£Çõ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕì Ìò ¦¾¡¨¸Â¡ø ¾¢ÕôÒò¾¢Èý Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ, §ÁÖõ «¾ý $(\underline{O}, \underline{F})$ Å¢¨Ç×(effect) ¬¸¢ÂÅüÈ¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ ¾Çò¾¢üÌî ¦ºí Ìò¾¡É ¾¢¨ºÂ¢ø ²üÀÎõ. ±É§Å ¾¢ÕôÒò¾¢Èý ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ. «Ð ¾¢¨ºÂ¢ì ÌÈ¢Â¢ðÊø ±É ì ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ.

À¼õ 2.15ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú O ±ýÈ ÒûÇ¢ì Ì ¯¡¢Â $\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÉ¢ý ± ñ Á¾¢ô¨À (magnitude) $|\underline{M}_{\circ}| = |\underline{F}| d,$

«øÄÐ $M_{\circ} = F.d$ ±ýÈ ºÁýÀ¡Î «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ.



À¼õ 2-32

$\underline{n}$ ±ýÀÐ (O,F) ¾Çò¾¢ü Ì §Áø§¿¡ì¸¢Â ¦ºí Ìò¾¡É ¾¢¨º¨Â «È¢Å¢ì Ìõ µÃÄ Ì ¾¢¨ºÂ¢ ±ýÈ¡ø

$$M_{\circ} = F.d\underline{n}$$ ¬ Ìõ.

2.7.1 ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢Â¡ø ¾¢Õôò¾¢È¨ É Å¨ÃÂÚò¾ø

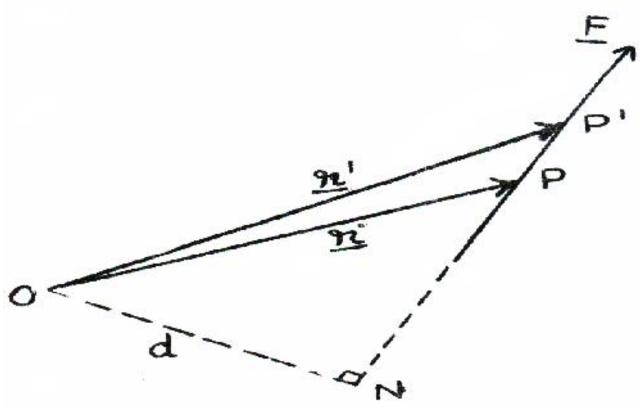
$\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨º ¦ºÂüÀÎõ §¿÷§¸¡ðÊø À¼õ 2.16ø ¸¡ðÊÂ¡ÅÚ P ±ýÈ ²¾¡Å¦¾¡Õ òûÇ¢¨Â ±Î ì¸×õ. P ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{OP} = \underline{r}$ ±É ì¦¸¡ûÇ×õ $(\underline{OP}, \underline{F})$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ü Ì þ¨¼Â¢ÂÄ¨ÁÔõ ÌÚí§¸¡½ò¨¾¯ ±É ì Ì È¢ì¸×õ.

OÅ¢Ä¢ÕóÐ $\underline{F}$ ì Ì ON ±ýÈ ¦ºí ÌòÐì §¸¡ð¨¼ Å¨ÃÂ×õ $ON = d = r\sin$¯ . ¬ Ìõ.

$\therefore \underline{M_{\circ}} = Fr\sin$¯ $\underline{n}+$ ±ýÈ¡ Ìõ.

$\underline{F}$, $\underline{r}$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢¨Â ±Îò¾¡ø $\underline{r} \wedge \underline{F} = Fr\sin$¯ $\underline{n}+$ ±ýÈ¡Å¾¡ø, ¾¢Õôò¾¢Èý ¾¢¨ºÂ¢¨Â (Vector Moment) $\underline{r}, \underline{F}$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ÌÚì Ìô¦ÀÕì¸¢ «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ ¬ Ìõ.

¾¢Õôò¾¢Èý ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ð¨¼ «îº¡¸ì ¦¸¡ñ Î ¦À¡Õû $(O,\underline{F})$ ¾Çò¾¢ø ÍÆÖ¸¢ÈÐ. «ùÅ¢¾ ÍÆü º¢ þ¼ôÒÈ «øÄÐ ÅÄôÒÈîÍÆü º¢¨Âô ¦ÀüÈ¢ÕôÀÐ $(\underline{r}, \underline{f}, \underline{n}+)$ ±ýÀ¨Å ´Õ þ¼ ï ÍÆ¢ «øÄÐ $(\underline{F}, \underline{M}, \underline{n}-)$ ±ýÀ¨Å ´Õ ÅÄ ï ÍÆ¢ «¨Áô¨À §Áü¦¸¡ûÅ¨¾ º¡÷óÐûÇÐ. þí Ì $\underline{n}-$ ±ýÀÐ (O,F) ¾Çò¾¢ü Ì ì ¸£ú§¿¡ì¸¢Â ¦ºí ÌòÐò ¾¢¨º¨Â «È¢Å¢ì Ìõ µÃÄ Ì ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ìõ. §ÁÖõ $\underline{F}$ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊø P' ±ýÈ Áü¦È¡Õ



À¼õ 2-16

Òû Ç¢¨Â ±Î òÐ «¾ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{OP'}=\underline{r'}$ ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø, À¼õ 2.16Ä¢ÕóÐ

$\underline{OP'}=\underline{OP}+\underline{PP'}$

$\underline{r}'=\underline{r}+\underline{PP'}$ ¬ Ì õ.

$\therefore \underline{r}'\wedge\underline{F}=\left(\underline{r}+\underline{PP'}\right)\wedge\underline{F}$ ($\underline{PP'}$ $\underline{F}$ ±ýÀ¨ Å ´§Ã §¿÷§¸¡ðÊø «¨ÁÅ¾¡ø)

$\underline{r}\wedge\underline{F}+\underline{PP'}\wedge\underline{F}$

$=\underline{r}\wedge F$

$=\underline{M_O}$ ¬ Ì õ.

$\underline{PP'}\wedge\underline{F}=0$ ¬ Ì õ.

±É§Å 0 ±ýÈ Òû Ç¢ì Ì ¯¡¢Â $\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒ¾¢Èý $\underline{F}$ ¦ºÂüÀÎ õ Òû Ç¢¨Â º¡÷ó¾¢ÕôÀ¾¢ø¨Ä ±ýÈ¡¸¢ÈÐ. ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¾¢¨ºÂ¢¨Â Å¨ÃÂÚôÀ¾¢ø Å¢¨º¨Â ¿Ø×õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡¸ ì (Sliding Vector) ¸Õ¾Ä¡õ.

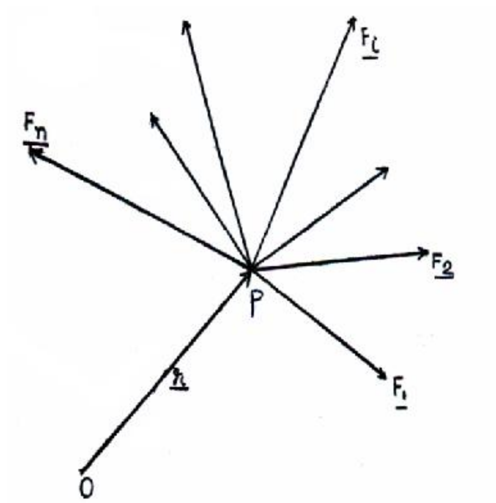
0ì Ì ¯¡¢Â ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ÍÆ¢Â¡¸ þÕì¸. $\underline{F}=0$ «øÄÐ d=0 ¬¸ §Å ñ Î õ. «¾¡ÅÐ Å¢¨º ÍÆ¢Â¡¸ §Å ñ Î õ «øÄÐ Å¢¨º o Å¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºøÄ §Å ñ Î õ.

¾¢ÕôÒ¾¢ÈÉ¢ý À¡¢Á¡½í ¸û (dimensions) Å¢¨º x ¿¦Çõ = $[FL]$ ¬ Ì õ. ¦Áð¡¢ì Ó¨ÈÂ¢ø «¾ü Ì ¯¡¢Â «Ä Ì ¸û ¸¢.¸¢.Å¢¨º ¦ºÁ¦., ¸¢.¸¢.Å¢¨ºÁ¦ð¼÷ «øÄÐ ¦Áð¡¢ì¼ý Å¢¨º Á¦ð¼÷ ¬ Ì õ.

2.8 Å¡¡¢ì É É¢ý §¾üÈõ (Varignon’sTheorem)

ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎõ ¸½Å¢¨º¸Ç¢ý (Set of Concurrent Forces) ¾¢Õôò¾¢Èý ²§¾Ûõ ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ Íð¼¨Áôòô ÒûÇ¢Â¢ø ±Î ì¸ôÀð¼¡ø «¾ý ¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢Õôò¾¢ÈÛ ì Ì îºÁÁ¡ Ìõ

$\underline{F}_1, \underline{F}_2 ....\underline{F}_i, ...\underline{F}_n$ ±ýÀ¨Å À¼õ 2.17 ¸¡ðÊÂÀÊ P ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎ Å¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ.



À¼õ 2-17

o ±ýÈ ¸ð¼¨Áôòô ÒûÇ¢Â¢ø ¸½Å¢¨º¸Ç¢ý ¾¢Õôò¾¢Èý §¾¨ÅôÀÎ Å¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ.

$\underline{F}_1, \underline{F}_2 ....\underline{F}_i, ...\underline{F}_n$ ±ýÈ Å¢¨º¸û P Â¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎ Å¾¡ø «¨Å¸Ç¢ý ¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨ºÔõ, þ¨ ½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ «ôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎõ. $\underline{R}$ ±ýÀÐ ¸½Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨º¨Âì ÌÈ¢ì Ì ¦ÁýÈ¡ø,

$R = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + ... + \underline{F}_i + ... + \underline{F}_n$ ¬ Ìõ.

±É§Å P ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø ¸½Å¢¨º¸Ç¢ý ¾¢Õôò¾¢Èý ¸Ù ì Ì ¯¡¢Â Ü Î¾ø

$= r \wedge (\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + ...\underline{F}_i + ... + \underline{F}_n)$

$$= \underline{r} \wedge (\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + ... + \underline{F}_i + ... + \underline{F}_n),$$

(ÌÚì¸ô¦ÀÕì¸¢ Àí¸¦ð Î Å¢¾¢ì Ì þ¨ºóÐûÇ¾¡ø)

$= \underline{r} \wedge \underline{R}$

= o ø ¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢Õôò¾¢ÈÉ¡ Ìõ.

þò§¾üÈò¨¾ô ÀÂýÀÎò¾¢ Å¢¨º ´ýÈ¢ý ¾¢Õôò¾¢È¨É «¾ý ¬ì¸ì ÜÚ¸Ç¢ý ¾¢Õôò¾¢Èý Å¡Â¢Ä¡¸ «È¢ÂÄ¡õ.

2.8.1 ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ 3 ¾¢¨º¸Ç¢ø ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÉ¢ý À¸¢÷Å¢Î ¸û. (Rectangular Components of Moment)

OS ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø ox, oy, oz ±ýÀ¨Å ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ «îÍ¸¨Ç ÌÈ¢ì¸ð Î õ. $\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨º P ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. $\underline{P}$ Â¢ý ¿¢¨Ä¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{r}$ ±É ì ¦¸¡ûÇ¡×õ.

$\underline{r},\underline{F}$ ¬¸¢ÂÅü¨È x, y, z ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ø À¸¢÷Å¢Î ¦ºöÂ

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$\underline{F} = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k}$ ±ýÈ¡ Ìõ.

$\underline{Mo}$ ±ýÀÐ O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø $\underline{F}$ ý ¾¢Õôò¾¢È¨É ì Ì È¢ì¸ð Î õ.

«ô§À¡Ð

$$\underline{M_\circ} = \underline{r} \wedge \underline{F}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\underline{i} - (xF_z - zF_x)\underline{j} + (xF_y - yF_x)\underline{k}$$
$$= (yF_z - zF_y)i - (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)\underline{k}$$
¬ Ìõ.

$\underline{M_\circ} = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k}$ ±ýÈ¡ø

$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$M_z = xF_y - yF_x$ ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â x, y, z ¾¢¨º¸Ç¢ý ¾¢Õôò¾¢Èý $\underline{M_0}$ ý ± ñ ½¢ôÀ¸¢÷×¸¡ Ìõ

$\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨º XOY ¾Çò¾¢Ä¨ÁÔ¦Áý È¡ø $F_z = 0, z = 0$ ¬ Ìõ. ±É§Å

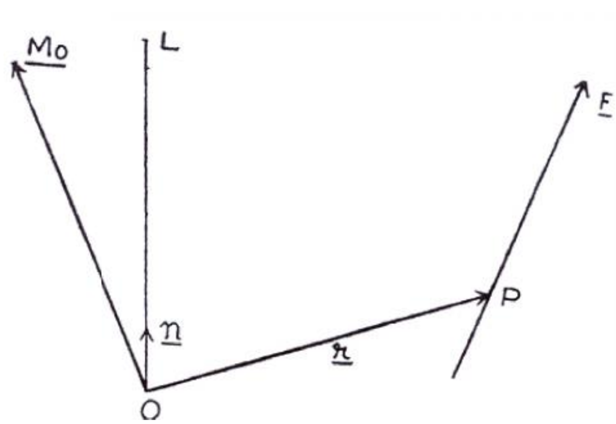
$$\underline{M_0} = (xF_y - yF_x)\underline{k}$$ ¬ Ìõ.

þ í Ì $\underline{k}$ ± ý ÀÐ XOY ¾Çò¾¢ü Ì ¦º í Ì òÐò ¾¢ ¨ ºÂ¢Ä ¨ ÁÔõ µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡Å¾¡ø ¾Çò¾¢ø ¦ºÂüÀ Î õ Å¢ ¨ ºÂ¢ ý ¾¢ÕôÒ¾¢È ý ¾Çò¾¢ø ¦º í Ì òÐò ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î ¸¢ÈÐ ± ý À ¨ ¾ «È¢Â §Å ñ Î õ.

2.9 µ÷ « î Í ÀüÈ¢ Å¢ ¨ ºÂ¢ ý ¾¢ÕôÒ ¾¢È ¨ É ì ¸ ¡ Ï ¾ø:

þÚ ì Ì ô ¦À¡Õû ´ ý È¢ø $\underline{P}$ ± ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø $\underline{F}$ ± ý È Å¢ ¨ º ¦ºÂüÀ Î ¸¢ÈÐ. O Å¢ø « ùÅ¢ ¨ ºÂ¢ ý ¾¢ÕôÒ¾¢È ý $\underline{M}_\circ = \underline{r} \wedge \underline{F}$ ¬ Ì õ.

À¼õ 2.18ø OL ± ý ÀÐ O Å¢ ý ÅÆ¢§Â Ì È¢ôÀ¢ð¼ « î Í ì Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ « ¨ ÁÔõ §¸¡¼¡ Ì õ. OL §¸¡ðÊ ý ¾¢ ¨ º ¨ Â $\underline{n} = n_x \underline{i} + n_y \underline{j} + n_z \underline{k}$ ± ý È µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ð Î õ.



À¼õ 2-18

2.18ø OL ± ý È « îº¢ø $\underline{F}$ ± ý È Å¢ ¨ ºÂ¢ ý ¾¢ÕôÒ¾¢È ý OL ± ý È §¸¡ðÊø $\underline{M}_{OL}$ ý Å¢î Í ¿¢Çò¾¡ø (Length of Projection) Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ. «Ð, µÕ ± ñ Á¾¢ô ¨ À Áð Î õ ¦ÀüÈ¢ÕôÀ¾¡ø « ¨ ¾ $M_\circ \underline{i}$ ± É ì Ì È¢ôÀÐ ÅÆì ¸õ.

$$\therefore M_{OL} = \underline{n}.\underline{M}_\circ$$

$$= \underline{n}.(\underline{r} \wedge \underline{F})$$

$$= \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

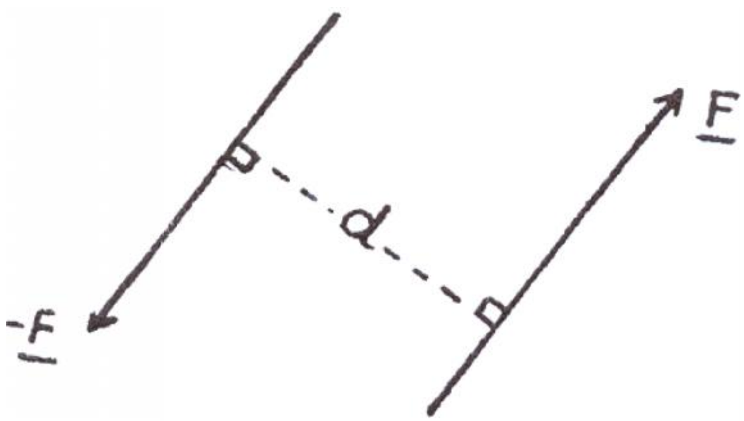
$$= n_x(yF_z - zF_y) + n_y(zF_x - xF_z) + n_z(xF_y - yF_x)$$ ¬ Ì õ.

2.10 ÍÆÄ¢¨ ½Ôõ, ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢ÈÛ õ

(Couple and Couple Moment) :

þÕ þ¨ ½Å¢¨º¸û ºÁÁ¡É ±ñ Á¾¢ôÒ¸¨Çô ¦ÀüÚõ, ±¾¢÷§À¡ì¸¡É §¸¡Î¸Ç¢ø ¦ºÂüÀð Îõ «¨ÁÔÁ¡É¡ø «¨Å¸û ÍÆÄ¢¨ ½ ±ÉôÀÎõ.

ÍÆÄ¢¨ ½ô¦À¡ÐÅ¡¸ $\{\underline{F}, -\underline{F}\}$ ±ýÈ ÌÈ¢Â¢ð¼¡ø ÌÈ¢ôÀÐ ÅÆì¸õ. ÍÆÄ¢¨ ½Â¢ý «¨Áôò, À¼õ 2.19 ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÕì Ìõ. ÍÆÄ¢¨ ½Â¡¸ «¨ÁÔõ þÕ Å¢¨º¸Ù ì¸¢¨¼Â¢ø ¯ûÇ ¦ºí ÌòÐ ¿¦Çõ, þ¨¼ò¦¾¡¨Ä× (arm length) ±ÉôÀÎõ.



À¼õ 2-19

ÍÆÄ¢¨ ½Â¢ø «¨ÁÔõ þÕ Å¢¨º¸Ç¢ý À¸¢÷×¸¨Ç ±ò¾¢¨ºÂ¢ø ±Îò¾§À¡¾¢Öõ «ÅüÈ¢ý þÂü¸½¢¾¢ì Ü Î¾ø ÅÆ¢Â¡Å¾¡ø ÍÆÄ¢¨ ½ ´ýÚ ¦ºÂüÀÎõ§À¡Ð ¦À¡ÕÇ¢ø ±ùÅ¢¾ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢ ÂÅ¢ì¸ò¨¾Ôõ, «¾¡ÅÐ ¾û ÙÅÐ «øÄÐ þØôÀÐ §À¡ýÈ þÂì¸í¸¨Ç ±ò¾¢¨ºÂ¢Öõ ¯ñ ÎÀñ Ï Å¾¢ø¨Ä. ¬É¡ø, ²¾¡Å¦¾¡Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢Â¢ø ÍÆÄ¢¨ ½Â¨ÁÔõ Å¢¨º¸Ç¢ø ¾¢Õôô¾¢Èý¸û ÍÆÂ¡Å¾¢ø¨Ä. ±É§Å, ÍÆÄ¢¨ ½ ´Õ þÚì¸ô¦À¡Õ¨Çî ÍÆÄî ¦ºöÅ¾ü Ì ¸¡Ã½Á¡¸ ¯ûÇÐ. ´Õ ¦À¡ÕÇû, ´Õ ÒûÇ¢¨Âî º¡÷óÐ «øÄÐ ´Õ §¿÷ì§¸¡ð¨¼î º¡÷óÐ ÍÆÖÅ¨¾ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒ ¾¢ÈÉ¡ø «ÇÅ¢ð Îì ÜÈÄÊÔõ.

2.10.1 ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢ø ÍÆÄ¢¨ ½ôÒ¾¢È¨ Éì ¸¡ Ï ¾ø

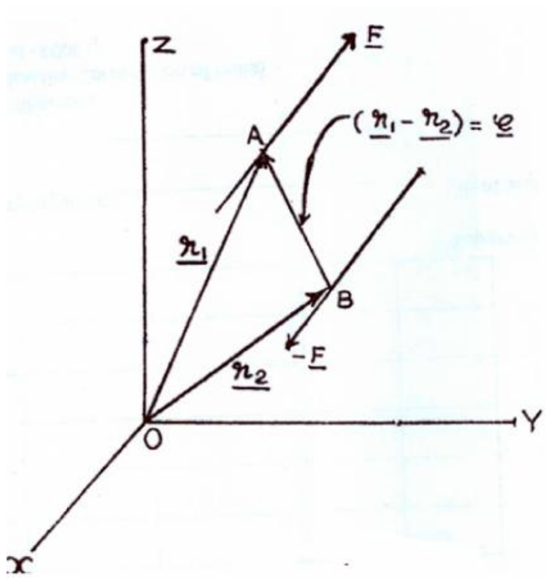
O ±ýÈ ÒûÇ¢¨Âò ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¡¸ì ¦¸¡ñ¼ ¸ð¼¨ÁôÀ¢ø ÍÆÄ¢¨ ½ìÌ¡¢Â þÕÅ¢¨º¸û $\{\underline{F}, -\underline{F}\}$ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸Ç¢ø Ó¨È§Â A, B ±ýÈ ²§¾Ûõ ÒûÇ¢¸¨Ç À¼õ 2.20 ¸¡ðÊÂÅ¡Ú $\underline{r_1}, \underline{r_2}$ ±Éì¦¸¡ûÇ×õ.

$\underline{BA} = \underline{OA} - \underline{OB}$

$= \underline{r_1} - \underline{r_2}$

$= \underline{\Phi}$ ±Éì¦¸¡ûÇ×õ.

ÐÅì¸ôÒûÇ¢ O ø Å¢¨ºò¾¢Õôò ¾¢Èý ¸Ç¢ý Ü Î¾ø.



À¼õ 2-20

$\underline{M} = r_1 \wedge \underline{F} + r_2 \wedge (-\underline{F})$

$= r_1 \wedge \underline{F} - r_2 \wedge \underline{F}$

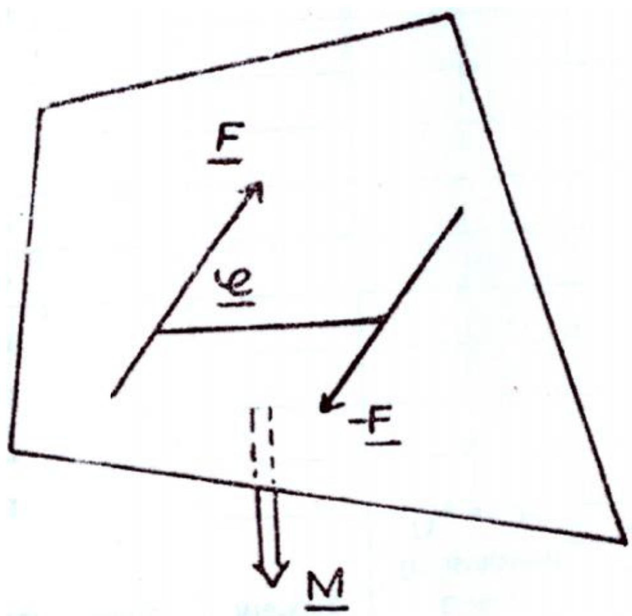
$= (r_1 - r_2) \wedge \underline{F}$

$= \underline{\Phi} \wedge \underline{F}$ ¬ Ìõ.

ÌÚìÌô¦ÀÕì¸¢ ¿¢Â¾¢ôÀÊ $\underline{M}$ ±ýÀÐ $(\underline{\Phi}, \underline{F})$ ¬¸¢Â¨Å Å¨ÃÂÚìÌõ ¾Çò¾¢üÌî ¦ºí Ìò¾¡É §¿÷ì§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎõ. «Ð§Å ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢È¨É Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ.

þ í Ì ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º ÅÄôÒÈò¾¢Õ Ì Ó¨ÈôÀÊ ¸¡ú§¿¡ì¸¢ À¼õ 2.21ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú « ¨Á¸¢ÈÐ. §ÁÖõ $\underline{\Phi}$ Ä¢ÕóÐ $\underline{F}$ ì Ì î ¦ºøÖõ ÍÆüº¢ Ì Úì Ìô¦ÀÕì¸ø Å¨ÃÂ¨È¦Â¡ðÊ þÕÅ¢¨º¸Ç¢ý ¾¢¡¢Ò (twist) ²üÀÎõ ¾¢¨ºÂ¢§Ä§Â « ¨Á¸¢ÈÐ. ±É§Å ÍÆüº¢ ²üÀÎõ ¾¢¨º¨Â ¾¼÷Á¡É¢ì¸. þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ ¾¢¨ºÂ¢ $\dot{-}$ Ä¢ÕóÐ $\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨ºì Ì î ¦ºøÖõ ÍÆüº¢¨Â «È¢¾ø «Åº¢ÂÁ¡¸¢ÈÐ.

ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º, ÍÆüº¢Â¢ý §À¡ì Ì (sense of rotation) ¬¸¢ÂÅü¨È «È¢ÅÐ ÁðÎÁ¢ýÈ¢, ± ñ Á¾¢ô¨ÀÔõ ¸½ì¸¢ð¼¡ø¾¡ý « ¨¾ Å¨ÃÂÚò¾¾¡¸ ì ¦¸¡ûÇÓÊÔõ.



À¼õ 2-21

ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò ¾¢È¨É ì ¸½¢ôÀ¾¢ø Å¢¨º¸û ¿Ø×õ (sliding) ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎÅ¾¡ø Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎõ ÒûÇ¢¸¨Ç, $\underline{BA}$ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸Ç¢ø ±ó¾ þ¼ò¾¢ø « ¨Áò¾§À¡¾Öõ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý Á¡ÚÅ¾¢ø¨Ä. ±É§Å, ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢ÈÉ¢ý ± ñ Á¾¢ô¨À ±Ç¢¾¡¸ø ¸½¢ì¸, A,B ±ýÈ ÒûÇ¢¸¨Çî §º÷ì Ì õ §¸¡Î Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸Ù ì Ì î ¦ºí Ìò¾¡¸ þÕì ÌÁ¡Ú « ¨Áì¸ôÀÎõ. «ô¦À¡ØÐ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ò ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{\Phi_{\perp}}$ ±É ì ÌÈ¢ò¾¡ø,

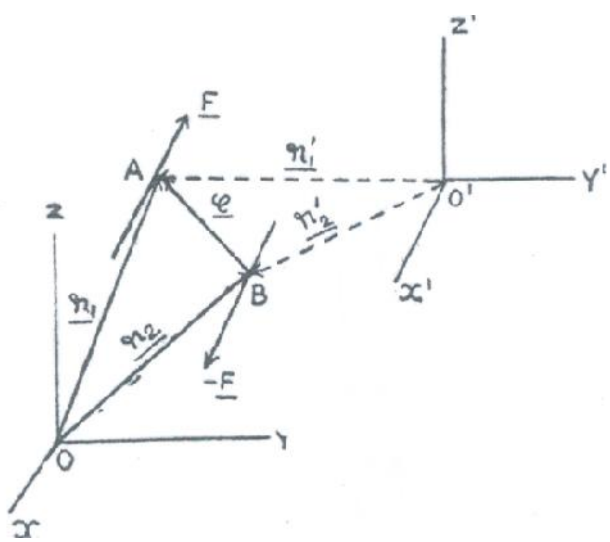
$$|M| = |\underline{\Phi_{\perp}}||\underline{F}| Sin 90^{\circ}$$

$=|\underline{F}|d$ ¬ Ìõ. þíÌ d ±ýÀÐ ÍÆÄ¢¨½Â¢ý Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸Ùì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ ¦ºíÌòÐò ¦¾¡¨ÄÅ¡Ìõ. ±É§Å ÍÆÄ¢¨½ôÒò¾¢Èý ±ýÀÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ. «Ð ¦ºÂüÀÎõ¾¢¨º Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎõ ¾Çò¾¢üÌî ¦ºíÌò¾¡¸ ÅÄôÒÈò¾¢ÖÌ ÍÆÖõÓ¨È¨Âì ¸¨¼À¢ÊòÐ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. §ÁÖõ «¾ý ±ñ Á¾¢ôÀ¡ÉÐ Å¢¨ºÂ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ, Å¢¨º¸Ùì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ ¦ºíÌòÐ¦¾¡¨Ä× ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕìÌò¦¾¡¨¸Â¡ø ¾÷Á¡É¢ì¸ôÀÎõ.

2.10.2 ÍÆÄ¢¨½ôÒò¾¢Èý µ÷ ¾¨¼Â¡üÈ ¾¢¨ºÂ¢ ±Éì¸¡ ðÎ ¾¡ø

À¼õ 2.22ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú O,O^1 ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¢ø (ox, oy, oz), $(o'x',o'y',o'z')$ ±ýÈ þÕ ÍðÎ¨ÁôÒ¸¨Ç Å¨ÃÂÚì¸×õ. $\{\underline{F},-\underline{F}\}$ ±ýÈ Å¢¨º¸û ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø µ÷ ÍÆÄ¢¨½Â¡¸ «¨ÁÂðÎõ. $\underline{F},-\underline{F}$ ¬¸¢Â¨Å ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸Ç¢ø Ó¨È§Â A, B ±ýÈ ²§¾Ûõ þÕÒûÇ¢¸¨Ç ±Îì¸×õ.

A,B ±ýÈ ÒûÇ¢¸¨Ç O,O^1 O,O^1 ¸ðÎ¨ÁôÒ¸Ç¢ø $\underline{r_1},\underline{r_2};\underline{r_1'},\underline{r_2'}$ ±ýÈ ¿¢¨Äò ¾¢¨ºÂ¢¸û Å¨ÃÂÚì¸ð Îõ.



À¼õ 2-22

O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø ÍÆÄ¢¨½ôÒò¾¢Èý

$$=(\underline{r_1}\wedge\underline{F})+(\underline{r_2}\wedge.-\underline{F})$$

$$=\underline{r_1}\wedge\underline{F}-\underline{r_2}\wedge\underline{F}$$

$$=(\underline{r_1}-\underline{r_2})\wedge\underline{F} \qquad =\underline{\Phi}\wedge\underline{F}$$ ± ý Úõ

O' ± ý È Òû Ç¢Â¢ø Í ÆÄ¢ ¨ ½ ôÒò¾¢È ý

$$=(\underline{r'_1}\wedge\underline{F})+(\underline{r'_2}\wedge-\underline{F})$$

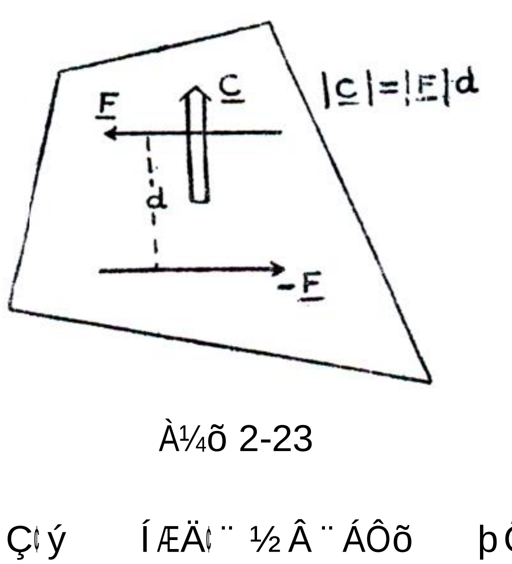
$$=\underline{r'_1}\wedge\underline{F}-\underline{r'_2}\wedge\underline{F}$$

$$=(\underline{r'_2}-\underline{r'_2})\wedge\underline{F}$$

$$=\underline{\Phi}\wedge\underline{F}$$

± ý Úõ ¬ Å¾¡ø Í ÆÄ¢ ¨ ½ ôÒò¾¢È ý ¸ð¼ ¨ ÁôÀ¡ø À¡¾¢ì ¸ôÀ Î Å¾¢ø ¨ Ä. ± É §Å ÀÃó¾ ¦ ÅÇ¢Â¢ø ´ ù ¦ Å¡Õ Òû Ç¢Â¢Öõ Í ÆÄ¢ ¨ ½ Â¢ø « ¨ ÁÔõ Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ø ¾¢ÕôÒò¾¢È ý ´ ý È¡ ¸§Å (same) þ Õ ì Ì õ. §ÁÖõ ¾¢ÕôÒò¾¢È ý , Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ ý ¾Çò¾¢ü Ì î ¦ º í Ì ò¾¡ É §¸¡ðÊø « ¨ ÁÔõ ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡Å¾¡Öõ, ¾¢ÕôÒò¾¢È ¨ É «È¢Å¢ì Ì õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Âò¾ ¨ ¼ÂüÈ ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ ¸ ì (free vector) ¸Õ¾Ä¡õ.

¿¢ ¨ Ä ¨ Á ¸ Ù ì Ì ²üÈÅ¡Ú ¾¢ÕôÒò¾¢È ý ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â ÀÃó¾ ¦ ÅÇ¢Â¢ø Í ÆÄ¢ ¨ ½ Â ¨ ÁÔõ Å¢ ¨ º ¸ û Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ¾Çò¾¢ü Ì î ¦ º í Ì ò¾¡ É ±ó¾ §¿÷ì§ ¸¡ðÊÖõ «¾ý ¦ À¡Õû Á¡ÚÀ¼¡Áø ¦ ºÂüÀ Î õÀÊ ¿¸÷ò¾Ä¡õ. «¾ý ÀÂÉ ¡ ¸ò ¾¢ÕôÒò¾¢È ¨ É Å ¨ ÃÂÚôÀ¾¢ø Í ÆÄ¢ ¨ ½ ¨ Â «¾ý ¾Çò¾¢§Ä§Â «¾ü Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ « ¨ ÁÔõ ¾Çò¾¢Öõ ¾¢¡¢Ò (twist) ¿¢ ¸ Øõ§À¡ì Ì (sense) Á¡È¡Áø ¿¸÷ò¾Ä¡õ.



À¼õ 2-23

þ ùÅ¢¾õ ¾Ç í ¸ Ç¢ ý Í ÆÄ¢ ¨ ½ Â ¨ ÁÔõ þÕÅ¢ ¨ º ¸ ¨ ÇÔõ $|F|d$ ± ý È¢Õ ì Ì Á¡Ú Á¡üÈ¢Â ¨ Á ì ¸ Ä¡õ. §ÁüÜÈ¢Â Å ¨ ¸ ¸ Ç¢ø Í ÆÄ¢ ¨ ½ ôÒò¾¢È ¨ É

Á¡üÈ¢ « ¨ÁôÀ¾¡ø ¾¢¨º ± ñ Á¾¢ôÒ, ¾¢¡¢Ò ¿¢¸Øõ§À¡ì Ì (sense) ¬ ¸¢Â ¨ Å ±ó¾Å¢¾ò¾¢Öõ À¡¾¢ì ¸ôÀ Î Å¾¢ø ¨ Ä ± ý È ¸¡Ã½ ò¾¡ø « ùÅ¢¾ « ¨ÁôÒ ¸ û Â¡ ×õ ´ ýÚ ì ¦ ¸ ¡ ý Ú ºÁòÐÅÁ¡ ¸ (equivalent) ¸Õ¾ôÀ Î õ.

À¼õ 2.23ø $\underline{C}$ ± ý ÀÐ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ôÒò¾¢È ý «È¢Å¢ì ¸ô ÀÂ ý À Î òÐõ Ì È¢Â¼¡ Ì õ.

2.11 ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¸Ç¢ ý ºÁòÐÅõ (Equivalence of Couples):

´ ù ¦ Å ¡ Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ Ô¼ Û õ « ¾ü Ì ¡¢Â ¾¢Õôò¾¢È ý À¢ ¨ ½ ì ¸ôÀð Î ûÇ¾¡ø ¾¢Õôò¾¢È ý ¸ û ºÁÁ¡ ¸ ¯ ûÇ þ Õ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¸ û ºÁõ ± ý À ¨ ¾ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ Ä¡õ. « ùÅ¢¾ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¸Ç¢ø ´ ü ¨ È «ÊôÀ ¨ ¼Â¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î ÁüÈ ¨ ¾ «ÊôÀ ¨ ¼Â¡ î ÍÆÄ¢ ¨ ½ Â¢ ý « ¨ÁôÒ ì Ì ²üÈÅ¡Ú Á¡üÈ¢¼ À¢ ý ÅÕõ ±Ç¢¾¡ É Á¡üÈ¿¢ ¨ Ä ¸ ¨ Çô ÀÂ ý À Î ò¾Ä¡õ.

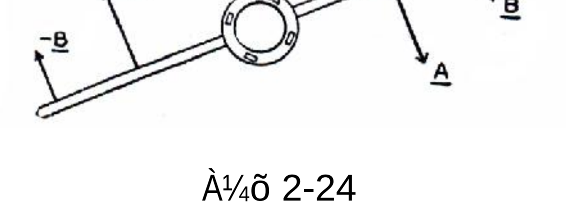
(1) Å¢ ¨ º ¸Ç¢ ý ± ñ Á¾¢ô ¨ À «¾¢ ¸ ¡¢ì Ì õ. « ¨ Å ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å ²üÈÅ¡Ú Ì ¨ ÈòÐ «øÄÐ þÅüÈ¢ü Ì ±¾¢÷Á¡È¡ ¸ ± Î òÐõ « ¨ Áò¾ø

(2) ÍÆÄ¢ ¨ ½ ôÒò¾¢È ý ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢ ¨ º ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ ± Î ì Ì õ « î º¢ø ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¨ Â î ÍÆüÚ¾ø.

(3) ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¨ Â Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ Å¢ ¨ º ¸Ç¢ ý ± ñ Á¾¢ôÒ, ¾¢ ¨ º ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È Á¡È¡Áø , « ¨ Å ¸ û ¦ºÂüÀ Î õ ¾Çò¾¢§Ä§Â þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢ (translation) ¦ºö¾ø. ¿ ¨ ¼Ó ¨ ÈÂ¢ø þùÅ¢¾ ÍÆÄ¢ ¨ ½ ¸ ¨ Ç ´ ýÈ¢ ý « ¨ÁôÀ¢Ä¢ÕóÐ Áü¦È¡ ýÈ¢ ý « ¨ÁôÒì Ì Á¡üÈÓÊÔõ ± ý À ¨ ¾ ¦¿õÒ§ ¸ ¡ø ¾òÐÅõ ¯ ½ ÷òÐ ¸¢ÈÐ.

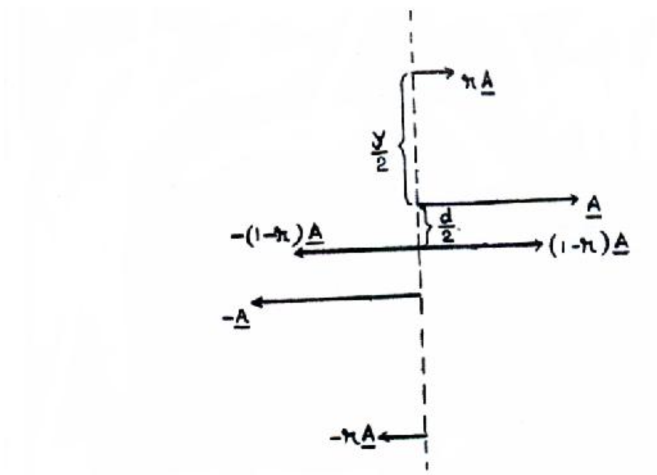
± Î òÐì ¸ ¡ð¼¡ ¸ þÕ ÅÖ×ûÇÅ÷ ¸ û $\underline{A}, -\underline{A}$ ± ý È Å¢ ¨ º ¸ ¨ Ç ì Ì Ú ¸¢Â ¦ ¾¡ ¨ ÄÅ¢ø À¼õ 2.24ø ¸¡ðÊÂÀÊ ¦ºÂøÀ Î òÐõ§À¡Ð Capstan ¸ÕÅ¢Âø

²üÀ Î õ Å¢ ¨ Ç× þÕ ÅÖ×üÈÅ÷ ¸ û $\underline{B}, -\underline{B}$ ± ý È Å¢ ¨ º ¸ ¨ Ç « ¾¢ ¸ ò ¦ ¾¡ ¨ ÄÅ¢ø ¦ºÂøÀ Î ò¾¢ «§¾ Å¢ ¨ Ç ¨ Å ²üÀ Î ò¾ÓÊÔõ ± ý ÀÐ « Û ÀÅò¾¢ø ¸ ñ ¼È¢ó¾ ¯ ñ ¨ Á



À¼õ 2-24

$\{\underline{A},-\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ¨Â d ¦¾¡ ¨ÄÅ¢ø « ¨ÁÔÁ¡Ú À¼õ 2.25ø ¸¡ðÊÂÀÊ $\{\underline{A},-\underline{A}\}$ ±Î ì ¸×õ $0<r<1$ ±ýÈ¢Õì Ì Á¡Ú r ±ýÈ Á¢ ¨ ¸ ± ñ ¨ ½ ôÀÂ ýÀ Î ò¾¢ $\{\underline{A},-\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì î ºÁÁ¡É Å¢ ¨Ç ¨Å ¿¢ ¸úòÐõ $\{r\underline{A},-r\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ¨Â Å ¨ÃÂÚôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ûÇ×õ. $\{\underline{A},-\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì þ ¨ ½ Â¡ ¸ ¿ Î Å¢ø « ¨ÁÔõ §¿÷ì§ ¸¡ðÊø $(1-r)\underline{A},(1-r)\underline{A}$ ±ýÈ ±¾¢¦Ã¾¢÷ Å¢ ¨ º ¸ ¨ Ç À¼õ 2.25ø ¸¡ðÊÂÐ§À¡Ä « ¨Áì ¸×õ



À¼õ 2-25

$\underline{A},-(1-r)\underline{A}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º,

$R=\underline{A}-(1-r)\underline{A}$

$=\underline{A}-\underline{A}+r\underline{A}$

$=r\underline{A}$ ¬ Ì õ.

« ùÅ¡§È $-\underline{A},(1-r)\underline{A}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý

Å¢ ¨ º $=-\underline{A}+(1-r)\underline{A}$

$=-\underline{A}+\underline{A}-r\underline{A}$

$=-rA$ ¬ Ì õ.

±É§Å $\{r\underline{A}, -r\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½Â¢ý Å¢¨º¸û ´ù¦Å¡ýÚõ À¼õ 2.25ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, ¨ÁÂò¾¢Ä¢ÕóÐ $\frac{y}{2}$ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø ¦ºÂüÀÎ Å¾¡¸¢ø,

$$\frac{1-r}{1} = \frac{\frac{y}{2}-\frac{d}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{y-d}{y} = 1-\frac{d}{y}$$

$\therefore r = \frac{d}{y}$ « øÄÐ $y = \frac{d}{r}$ ¬ Ì õ.

$\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì ¡¢Â ¾¢ÕôÒ¾¢ÈÉ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ, $|\underline{C}| = |\underline{A}|d$ ¬ Ì õ.

« ùÅ¡§È $\{r\underline{A}, -r\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì ¡¢Â ¾¢ÕôÒ¾¢ÈÉ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒõ,

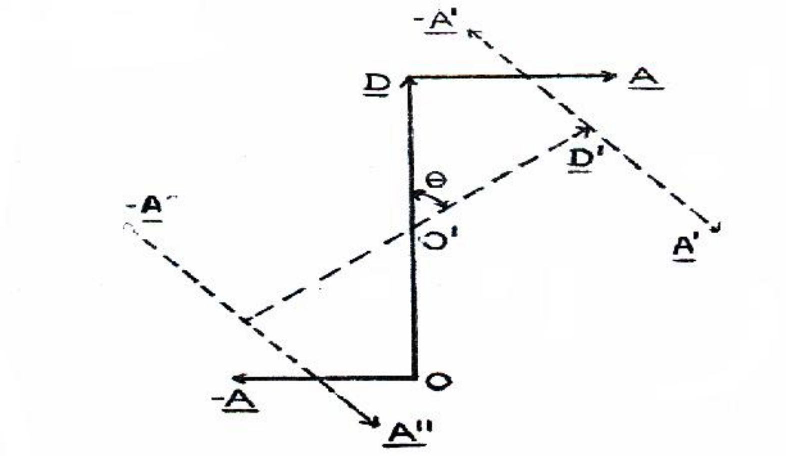
$$r|\underline{A}|y = r|\underline{A}|\frac{d}{r} = |\underline{A}|d = |\underline{C}|$$

¬ Ì õ.

±É§Å, d ¦¾¡¨ÄÅ¢ø ¦ºÂüÀÎ õ $\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ ±ýÈ þÃð¨¼Ôõ, $y = \frac{r}{d}$ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø ¦ºÂüÀÎ õ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½Ôõ ´ýÚì¦¸¡ýÚ º¡¢¿¢¸Ã¡ Ìõ. þ í Ì þÕÅ¢¾ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò ¾¢Èí¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ¸û $|\underline{A}|d$ ±ýÚ ÅÕ¸¢ýÈÉ. §ÁÖõ þ í Ì Å¢¨ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ô¨À ì Ì ¨ÈòÐ, ¦¾¡¨Ä¨Å «¾¢¸¡¢òÐ, «ÊôÀ¨¼ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡É ÁÜ¦È¡Õ $\{r\underline{A}, -r\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ Å¨ÃÂÚ ì ¸ôÀð Î ûÇÐ.

« ùÅ¡§È Å¢¨º¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ô¨À «¾¢¸¡¢òÐõ, ¦¾¡¨Ä¨Å ²üÈÅ¡Ú Ì ¨ÈòÐõ, «ÊôÀ¨¼ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì î ºÁÁ¡É ÁÜ¦È¡Õ ÍÆÄ¢¨ ½Ôõ ÓÊÔõ. ÍÆÄ¢¨ ½ ´ý¨È «¾ý ¾¢ÕôÒ¾¢¨ºÂ¢ì Ì þ¨ ½Â¡¸ «¨ÁÔõ µ÷ «îº¢ø ÍÆÖõÀÊ ¦ºöÐ, «¾ý Å¢¨ÇÅ¡¸ì ¸¢¨¼ì Ì õ ÍÆÄ¢¨ ½ §ÁÜ¦¸¡ ñ¼ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì º¡¢¿¢¸Ã¡¸ «¨ÁÔ¦ÁýÀ¨¾Ôõ À¢ýÅÕÁ¡Ú ¿¢ÕÀ¢ì¸Ä¡õ.

$\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ¨Â Ó ý§À¡Ä§Å À¼õ 2.26ø ¸¡ðÊÂÐ§À¡ø,



À¼õ 2-26

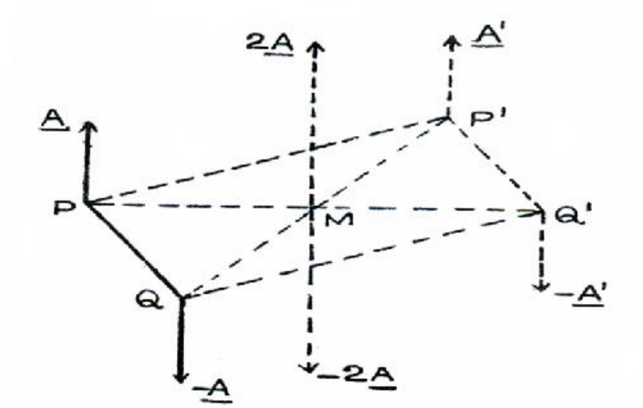
d ¦¾¡¨ÄÅ‹ø «¨ÁÔÁ¡Ú ±Î ì¸×õ. $\underline{A}$ Â‹ý ± ñ Á¾‹ô¨À a ±É ì¦¸¡ûÇ×õ. $(-\underline{A})$ ±ýÈ Å‹¨º ¦ºÂüÀÎõ§¸¡ðÊø, O ±ýÈ ÒûÇ‹¨Â ±ÎòÐ $\underline{A}$ ±ýÈ Å‹¨ºì Ì ¦ºí Ìò¾¡¸ OD ±ýÈ §¸¡ð¨¼ Å¨ÃÂ×õ. $\underline{P}$ Â‹ý ¿‹¨Äò¾‹¨ºÂ‹¨Â $\underline{OP} = \underline{D}$ ±É ì¦¸¡ûÇ×õ. O' ±ýÀÐ OP Â‹ý $\underline{P}$ ¨ÁÂôÒûÇ‹¨Âì Ì È‹ì¸ðÎõ. ±ýÈ ÍÆÄ‹¨½ «¨ÁÔõ ¾Çò¾‹ø OP ³ , O' ±ýÈ ÒûÇ‹Â‹ø, ¯° «Ç×ì Ì î ÍÆüÈ×õ. «ô§À¡Ð $\underline{D}'$ ±ýÈ ¾‹¨ºÂ‹, $\underline{D}$ Â‹ý ¿¸ø§À¡ýÚ «¨ÁÔõ. $\underline{D}$ Â‹ý Ó¨ÉôÒûÇ‹¸Ç‹ø Ó¨È§Â $(\underline{A}', -\underline{A}'), (\underline{A}'', -\underline{A}'')$ ±ýÈ¾‹¨ºÂ‹¸¨Ç $\underline{D}'$ ±ýÈ ¾‹¨ºÂ‹ ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊüì Ì î ¦ºí Ìò¾¡¸×õ, «¨Å¸Ç‹ý ±ñ Á¾‹ôÒ¸û a ìì Ì î ºÁÁ¡¸ þÕì Ì Á¡Úõ À¼õ 2.26ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ±Î ì¸×õ.

$[(\underline{A}', -\underline{A}'), (\underline{A}'', -\underline{A}'')]$ ¬¸‹ÂÅüÈ‹ý ¦¾¡Ì ÀÂý ÍÆ‹Â¡Å¾¡ø,

$= \{\underline{A}, -\underline{A}\} \equiv \{(\underline{A}, -\underline{A}); (\underline{A}', -\underline{A}'); (\underline{A}'', -\underline{A}'')\}$ ¬ Ìõ. ¬É¡ø $(\underline{A}, -\underline{A}'); (\underline{A}'', -\underline{A})$ ¬¸‹ÂÅüÈ‹ý ¦¾¡Ì ÀÂý Å‹¨º¸û ´ýÚì¦¸¡ýÚ ±¾‹÷±¾‹Ã¡¸ ´§Ã §¿÷ì§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡ø, $[(\underline{A}, -\underline{A}'); (-\underline{A}, \underline{A}'')] \equiv \underline{0}$ ¬ Ìõ.

±É§Å Á¾‹ÓûÇ Å‹¨º¸û $\{\underline{A}, -\underline{A}\} \equiv \{\underline{A}'', -\underline{A}''\}$ ¬ Ìõ. ¬¾Ä¡ø ÍÆÄ‹¨½Â‹ø «¨ÁÔõ Å‹¨º¸¨Ç ¬¸‹ÂÅüÈ‹ý ¾Çò¾‹§Ä§Â ÍÆüÈ‹Î Å¾¡ø ÍÆÄ‹¨½ôÒò¾‹Èý À¡¾‹ì¸ôÀÎÅ¾‹ø¨Ä ±ýÈ¡¸‹ÈÐ. þÚ¾‹Â¡¸ $\{\underline{A}, -\underline{A}\}, \{\underline{A}', -\underline{A}'\}$

±ýÈ þÕ ÍÆÄ¦¨ ½¸û ´§Ã §À¡¸Á¡¸×õ $|\underline{A}| = |\underline{A}'| = a$ ±ýÚõ, ´ù¦Å¡Õ ÍÆÄ¦¨ ½Â¦ý Å¦¨º¸Ù ì Ì þ¨¼Â¦Ä¨ÁÔõ ¦ºí ÌòÐò ¦¾¡¨Ä× d «Ç× þÕôÀ¾¡¸×õþ¼«¨ÁôÀ¦ø Áð Î õ §ÅÚÀ¡Î ¨¼Â¾¡¸×õ À¼õ 2.27ø ¸¡ðÊÂÀÊ «¨ÁÂð Î õ. À¼ò¾¦ø $\underline{P}, Q, P', Q'$ ±ýÀ¨Å $\underline{A}, -\underline{A}, \underline{A}' - \underline{A}'$ M¬¸¦Â Å¦¨º¸û ¦ºÂüÀ Î õ ÒûÇ¦¸¨Çì ÌÈ¦ì¸¦ýÈÉ. þí Ì $\underline{D} = \underline{D}'$ ±ýÈ¡Å¾¡ø, $PQQ'P'$ ±ýÀÐ µ÷ þ¨½¸ÃÁ¡ Ì õ.



À¼õ 2-27

ã¨ÄÅ¦ð¼í¸û ¦Åð Î õÒûÇ¦¨Â M ±É ì ÌÈ¦ì¸×õ.

$\therefore PM = MQ'; QM = MP'$ ¬ Ì õ. M ±ýÈ ÒûÇ¦Â¦ø, $2\underline{A}, -2\underline{A}$ ±ýÈ Å¦¨º¸¨Ç $\underline{A}$- ì Ì þ¨½Â¡¸ «¨ÁÔÁ¡Ú ±Î ì¸×õ.

«ô¦À¡ØÐ,

$(\underline{A}, \text{Å¦¨º}\,\underline{P}) + (-2\underline{A}\,\text{Å¦¨º}\,M) \equiv (-\underline{A}'\,\text{Å¦¨º}\,Q')$ ±ýÚõ,

$(\underline{A}, \text{Å¦¨º}\,\underline{P}) + (-2\underline{A}\,\text{Å¦¨º}\,M) \equiv (-\underline{A}'\,\text{Å¦¨º}\,P')$ ±ýÚõ ¬Å¾¡ø,

$$\{\underline{A}, -\underline{A}\} \equiv \{(\underline{A}, -\underline{A})(2\underline{A}, -2\underline{A})\}$$

$$\equiv \{(\underline{A}, -2\underline{A})(-\underline{A}, -2\underline{A})\}$$

$$\equiv \{-\underline{A}', \underline{A}\}$$ ¬ Ì õ.

¬¾Ä¡ø, ÍÆÄ¦¨ ½¸û þ¼õ ¦ÀÂ÷Å¾¡ø À¡¾¦ì¸ôÀÎ Å¾¦ø¨Ä±ýÈ¡¸¦ÈÐ. ±É§Å ÍÆÄ¦¨ ½¨Â Å¨ÃÂÚì Ì õ Å¦¨º¸û «ÅüÈ¦ü Ì þ¨¼Â¦Ä¨ÁÔõ ¦¾¡¨Ä× ¬¸¦ÂÅü¨È Á¦Ì¾ôÀ Î òÐÅÐ «øÄÐ Ì ¨ÈôÀÐ, ÍÆÄ¦¨ ½¨Âî ÍÆüÚÅÐ þ¼õ¦ÀÂ÷ò¾ø ¬¸¦Â ¦ºÂø¸¨Çô ÀÂýÀÎ ò¾¦ò ¾¦Õô¾¦¾¦Èý ¸û ºÁ¡¢ÔûÇ þÕ ÍÆÄ¦¨ ½¸û º¡¢¿¦¸Ã¡É¨Å ±É ¿¢ÕÀ¦ì¸Ä¡õ.

2.12 ÍÆÄ¨ ½ ¸Ç ý ¦¾¡ Ì ôÒ (Addition of couples):

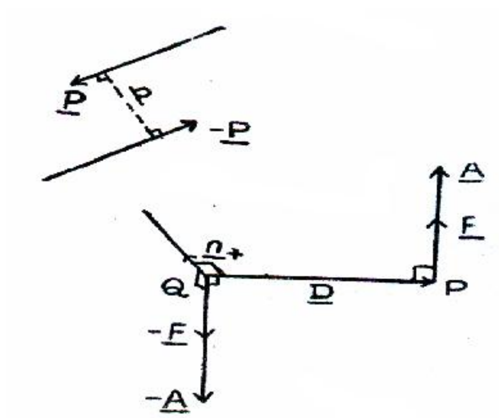
2.12.1 ´§Ã ¾Çò¾Ä ¨ÁÔõ þÕ ÍÆÄ¨ ½ ¸Ç ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ¨ É ì ¸¡ Ï ¾ø.

$(\underline{A},-\underline{A}),(\underline{P},-\underline{P})$ ± ý È þÕ ÍÆÄ¨ ½ ¸û À¼õ 2.28ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ´§Ã ¾Çò¾Ä ¨ÁÅ¾¡ ¸ ì ¦¸¡ û ¸. d, p ± ý À ¨Å ÍÆÄ¨ ½ Å ¨º ¸Ù ì Ì þ ¨¼Â ø « ¨ÁÔõ ¦º í Ì òÐò ¦¾¡ ¨Ä ¨Å Ì È ì ¸ð Î õ. $\underline{n_+}$ ± ý ÀÐ ¾Çò¾ ø §Áø§¿¡ ì ¸ ¦º í Ì òÐò ¾ ¨º ¨Â «ÈÅ ì Ì õ µÃÄ Ì ¾ ¨ºÂ¡ Ì õ. $\underline{C_1},\underline{C_2}$ ± ý À ¨Å ÍÆÄ¨ ½ ¸Ç ý ¾ÕôÒ¾È ý ¸ ¨Ç ì Ì ÈôÀ¾¡Â ý

$\underline{C_1} \equiv \left(\underline{A},-\underline{A}\right) = \left|A\right| \underline{dn_+}$

$\underline{C_2} \equiv \left(\underline{P},-\underline{P}\right) = \left|\underline{P}\right| \underline{pn_+}$ ¬ Ì õ.

ÍÆÄ¨ ½ $(\underline{P},-\underline{P})$ ± ý À ¨¾ $(\underline{A},-\underline{A})$ ± ý Û õ Å ¨º ¸§Ç¡ Î ´§Ã ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ Î ¸ Ù ¨¼Â ÜÚ ¸û ¦¸¡ ñ¼¾¡Ôõ, ÍÆÄ¨ ½ $(\underline{P},-\underline{P})$ ì Ì î ºÁ¾ÕÔÒò¾È Û ¨¼Â¾¡ÔÓ ûÇ ´ Õ ÍÆÄ¨ ½Â¡ø Á¡üÈ Î ¦ºö ¸. þ î ÍÆÄ¨ ½ÂÛ ¨¼Â Å ¨º ¸û ´ ù ¦Å¡ ýÚõ $\underline{F}$ ¬ É¡ø $\underline{P}.p.\underline{n_+} = F.d\underline{n_+}$ « øÄÐ $F = \dfrac{P.p}{d}$ ¬ Ì õ.



À¼õ 2-28

$\underline{C_2} = \underline{P}.p.\underline{n_+}$

$\therefore (\underline{C_2} \wedge \underline{D}) = Fd\underline{n_+} \wedge \underline{D} = F.d\underline{n_+}$

$= Fd(\underline{n_+} \wedge \underline{D})$ ±É§Å

$= Fd(1.d)\underline{a}$ (a ±ýÀÐ $\underline{A}$ ±ýÈ Å¢¨º ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊø «¨ÁÔõ µÃÄÌ¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ).

$= F\underline{a}(d^2)$

$= F\underline{a}(\underline{D}.\underline{D})$

$= F(\underline{D}.\underline{D})$

$\therefore \underline{F} = \dfrac{(\underline{C_2} \wedge \underline{D})}{(\underline{D}.\underline{D})}$

±É§Å $\{(\underline{P}, -\underline{P}); p\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨½ ìÌî º¡¢¿¢¸Ã¡É $\{(\underline{F}, -\underline{F}); d\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨½Â¢ý Å¢¨º¨Â Å¨ÃÂÚì¸ÓÊ¸¢ÈÐ.

$\therefore \underline{C_1} + \underline{C_2} - (\underline{A}, -\underline{A}) + (\underline{P}, -\underline{P})$

$= (\underline{A}, -\underline{A}) + Pp\underline{n_+}$

$= (\underline{A}, -\underline{A}) + Fd\underline{n_+}$

$= (\underline{A}, -\underline{A}) + (\underline{F}, -\underline{F})$

$\{\underline{A} + \underline{F}\}, -(\underline{A} + \underline{F})$

¬¸§Å ´Õ ¾Çò¾¢ø «¨ÁÔõ $(\underline{A}, -\underline{A}), (\underline{P}, -\underline{P})$ ±ýÈ þÕ ÍÆÄ¢¨½¸Ùõ, Å¢¨º¸û ´ù¦Å¡ýÚõ ÍÆÄ¢¨½ìÌî ºÁÉ¡ö d «Ç×¨¼Â ¦ºí ÌòÐò ¦¾¡¨ÄÅ¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ ´Õ ÍÆÄ¢¨½ìÌî ºÁÁ¡Ìõ. þî ÍÆÄ¢¨½Â¢ý ¾¢Õô¾¢Èý

$(A + \dfrac{Pp}{d})d\underline{n_+}$

$Ad\underline{n_+} + Pp\underline{n_+}$

$= \underline{C_1} + \underline{C_2}$ ¬Ìõ.

§ÁÖõ ´Õ þÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ ´Õ ¾ÇòÐ ÍÆÄ¢¨½¸û ±ò¦¾¡¨¸Â¡Â¢ÛÁ «î ÍÆÄ¢¨½¸¦ÇøÄ¡õ «ÅüÈ¢ý ¾¢Õô¾¢Èý ¸Ç¢ý þÅü¸½¢¾ì Üð¼ò¦¾¡¨¸ìÌì ºÁÁ¡É ¾¢Õô¾¢È¨É ¦¸¡ñ¼ ´§Ã¦Â¡Õ ÍÆÄ¢¨½ìÌî ºÁÁ¡Ìõ. $\{(\underline{P_1}, -\underline{P_1}); p_1\}, \{(\underline{P_2}, -\underline{P_2}); p_2\} .... \{(\underline{P_n}, -\underline{P_n}); p_n\}$ ±ýÈ n

ÍÆÄ¢¨ ½ ¸û ´§Ã ¾Çò¾¢Ä¨ ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ ÌÀÂ¨ É ì ¸¡ ½ $\{(\underline{P_1}, -\underline{P_1}); p_1\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ¨Â «ÊôÀ¨¼Â¡¸ì ¦¸¡ ñ Î ÁüÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ¸ Ù ì Ì ¯¸ó¾ º¡¢¿¢¸Ã¡É ÍÆÄ¢¨ ½ ¸ ¨Ç $\{(\underline{P_1}, -\underline{P_1}); p_1\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ ¦ºÂüÀÎ õ §¸¡Î¸Ç¢ø Å¨ÃÂÚòÐ «¨Å¸¨Ç Ó¨È§Â $\left\{\left(\underline{F_2}, -\underline{F_2}\right)P_1\right\}.........\left\{\left(\underline{F_n}, -\underline{F_n}\right)P_1\right\}$ ±É ì Ì È¢ì ¸×õ.

¬¸§Å ±øÄ¡î ÍÆÄ¢¨ ½ ¸Ç¢ý ¦¾¡ ÌÀÂý ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý

$$\underline{C_R} = \underline{C_1} + \underline{C_2} + ... + \underline{C_n}$$

$$= \left\{\left(\underline{P_1}, -\underline{P_1}\right); P_1\right\} + \left\{\left(\underline{P_2}, -\underline{P_2}\right); P_2\right\} + ... + \left\{\left(\underline{P_n}, -\underline{P_n}\right); P_n\right\}$$

$$= \left\{\left(\underline{P_1}, -\underline{P_1}\right); P_1\right\} + \left\{\left(\underline{F_2}, -\underline{F_2}\right); P_1\right\} + ... + \left\{\left(\underline{F_n}, -\underline{f_n}\right); P_1\right\}$$

$$= \left\{\left(\underline{P_1}, -\underline{F_2} + ... + \underline{F_n}\right), -\left(\underline{P_1} + \underline{F_2} + ... + \underline{F_n}\right); P_1\right\}$$

¬ Ìõ.

þ í Ì $\underline{F_i} = \frac{C_i \wedge D_i}{(\underline{D_i}.\underline{D_i})}, i = 2, 3, ...n$ ¬ Ìõ.

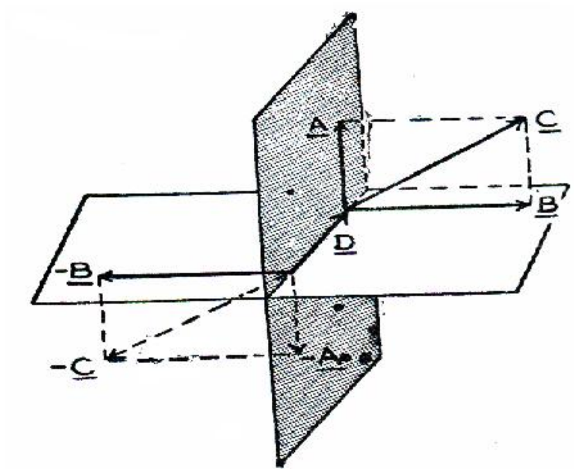
¬¾Ä¡ø ¦¸¡Î ò¾ ÍÆÄ¢¨ ½ ¸¦ÇøÄ¡õ ¾õ ÍÆø¾¢Èý ¸Ç¢ý þÂü¸ ½¢¾ì Üð Î ò¦¾¡¨ ¸ì Ì î ºÁÁ¡É ¾¢ÕôÒò¾¢Èý ¦¸¡ ñ¼ ´§Ã ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ì Ì î ºÁÁ¡ Ìõ.

ÍÆÄ¢¨ ½ ¸¦ÇøÄ¡ÅüÈ¢üÌõ ´§Ã ÌÈ¢ (same sign) þø¨ÄÂ¡Â¢ý ´ù¦Å¡Õ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢ÈÛ ì Ì¡¢Â ÌÈ¢¨Â þð Î §Á§Ä ¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ ¿¢ÕÀ½ò¨¾ô ÀÂýÀÎ ò¾Ä¡õ.

2.12.2. þ¨ ½ÂüÈ ¾¢ÕôÒò¾¢Èý ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç Å¨ÃÂÚì Ìõ þÕ ÍÆÄ¢¨ ½ ¸Ç¢ý ¦¾¡ ÌÀÂ¨ É ì ¸¡ Ï ¾ø,

þ í Ì ÍÆÄ¢¨ ½ ¸û ´ù¦Å¡ý ¨ÈÔõ Å¨ÃÂÚì Ìõ Å¢¨º¸û ¦ÅÙ§ÅÈ¡É ¾Çí¸Ç¢ø ¦ºÂüÀÎ ¸¢ýÈÉ. ¾Çí¸û ¦ÅðÊì¦¸¡ûÙõ §¿÷ì§¸¡ðÊø À¼õ 2.29ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú $\underline{D}$ ±ýÈ ¦¾¡¼÷ÒÀÎ òÐõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â «¨Áì¸×õ. §Áü¦¸¡ ñ¼ ÍÆÄ¢¨ ½ ¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢üÌõ $\underline{D}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢¨Âò ¦¾¡¼÷ÒÀÎ òÐõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢Â¡¸ì ¦¸¡ ñ¼ ÍÆÄ¢¨ ½ ¨Â ´ù¦Å¡Õ ¾Çò¾¢Öõ Å¨ÃÂÚòÐ «¨Å¸¨Ç $\{\underline{A}, -\underline{A}\}; \{\underline{B}, -\underline{B}\}$ ±É ì¦¸¡û¸. $\underline{A}, \underline{B}$ ±ýÀ¨Å

´Õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎÅ¾¡ø «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º $\underline{C}$ ³ þ¨½¸Ã Å¢¾¢ôÀÊ «ôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢Â¡¸î ¦ºøÖõ «ùÅ¢¨½¸Ãò¾¢ý ã¨ÄÅ¢ð¼õ ± ñ Á¾¢ôÀ¢Öõ ¾¢¨ºÂ¢Öõ Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. «ùÅ¡§È $(-\underline{A},-\underline{B})$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º $(-\underline{C})$ Ôõ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. ¬¾Ä¡ø $\{\underline{C},-\underline{C}\}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨½ §Áü¦¸¡ ñ¼ þÕ ÍÆÄ¢¨½¸Ç¢ý º¡¢¿¢¸Ã¡É ¦¾¡ÌÀÂÉ¡Ìõ. §ÁÖõ $\underline{C}$ ±ýÈ Å¢¨ºÂ¡Ìõ $\underline{D}$ ±ýÈ ¾¢¨º§Â ¦¾¡¼÷À¡¸ (relative) ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢Â¡¸¢ÈÐ..



.

À¼õ 2-29

$\therefore \{(\underline{A},-\underline{A});(\underline{B},-\underline{B})\} \equiv \{\underline{C},-\underline{C}\}$

ÍÆÄ¢¨½¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢üÌõ ¯¡¢Â ¾¢Õô¾¢Èý Ó¨È§Â

$\underline{C_A} = \underline{D} \wedge \underline{A}; \underline{C_B} = \underline{D} \wedge \underline{B}; \underline{C_R} = \underline{D} \wedge \underline{C}$ ±ýÈ¡Ìõ.

¬É¡ø

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$$

$$\therefore \underline{C_R} = \underline{D} \wedge \underline{C}$$

$$= \underline{D} \wedge (\underline{A} + \underline{B})$$

$$= \underline{D} \wedge \underline{A} + \underline{D} \wedge \underline{B}$$

$$= \underline{C_A} + \underline{C_B}$$

±É§Å þÕ ÍÆÄ¢¨½¸Ù ìÌ ¯¡¢Â ¾¢Õô¾¢Èý ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý Ü Î¾ø «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂý ÍÆÄ¢¨½ ìÌ ¯¡¢Â ¾¢Õô¾¢Èý ¾¢¨ºÂ¢Â¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎ ¸¢ÈÐ.

Ì È¢ôÀ¡¸, $\underline{C_A}, \underline{C_B}$ ±ýÀ¨Å ´Õ §À¡¸Á¡¸ «¨ÁÔõ§À¡Ð ´Õ ¾Çò¨¾ §Áü¦¸¡ñ Î «ò¾Çò¾¢ø $\underline{D}$ ±ýÈ ²§¾Û õ ¦¾¡¼÷ÒÀ Î òÐõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â ±Î òÐ ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ¾¢ÕôÒ¾¢È ý ¾¢¨ºÂ¢ $(\underline{C_R})$ ³ Å¨ÃÂÚ ì¸Ä¡õ.

¬¸§Å ÍÆÄ¢¨ ½¸û «ÅüÈ¢ý ¾¢ÕôÒ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡ø Ì È¢ôÀ¢ð¼¡ø «Åü¨Èò ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çô §À¡ø Üð¼Ä¡õ. «¾¡ÅÐ $\underline{C_1}, \underline{C_2}.....\underline{C_n}$ ±ýÈ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò ¾¢Èý¸û ±ò¾¨¸Â þ¼«¨Áô¨Àô ¦ÀüÈ§À¡¾¢Öõ «ÅüÈ¢ý ¸½ò¾¢ü Ì î ºÁÁ¡É µ÷ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒ ¾¢È¨É Å¨ÃÂÚ ì¸ ÓÊÔõ. $\underline{C_R}$ ±ýÀÐ ¸½ò¾¢ü Ì ¡¢Â ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ÍÆÄ¢¨ ½ôÒ ¾¢È¨É ì Ì È¢ì Ì ¦Á ýÈ¡ø

$\underline{C_R} = \underline{C_1} + \underline{C_2} + ... + \underline{C_n}$ ¬ Ì õ.

2.12.3 ¾õ ¾¢ÕôÒ¾¢Èý¸û ºÁÁ¡Ôõ ±¾¢Ã¡¸×ûÇ þÕ ÍÆÄ¢¨ ½¸û ´Õ þÚ ì¸ô¦À¡ÕÇ¢ý ÁÐ ´§Ã¾Çò¾¢ø ¦ºÂøÀÎ Á¡É¡ø, «¨Å ´ý¨È¦Â¡ýÚ ºÁÁ¡ì Ì õ:

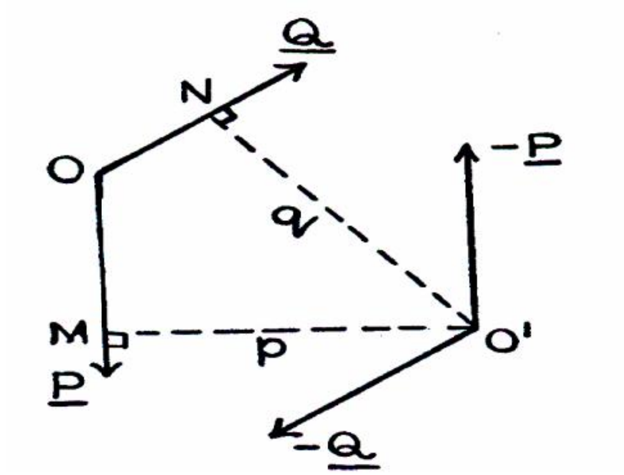
´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ p ¨Âô ÒÂÁ¡¸ì ¦¸¡ñ Î (arm length) «¾ý Ó¨É¸Ç¢§Ä $(\underline{P}, -\underline{P})$ ±ý Û õ Å¢¨º¸¨Çì ¦¸¡ñ Î ûÇ¾¡¸×õ, Áü¦È¡Õ ÍÆÄ¢¨ ½ q ¨Åô ÒÂÁ¡¸ì ¦¸¡ñ Î «¾ý Ó¨É¸Ç¢§Ä $(\underline{Q}, -\underline{Q})$ ±ý Û õ Å¢¨º¸û ¦ºÂøÀÎ Å¾¡¸×õ ¦¸¡û¸.

Å¨¸ 1

$\underline{P}$ ±ý Û õ Å¢¨ºÔõ $\underline{Q}$ ±ý Û õ Å¢¨ºÔõ O Å¢ø ºó¾¢ì¸ð Î õ. «ùÅ¡§È $(-\underline{P}, -\underline{Q})$ ±ýÀ¨Å O' Å¢ø ºó¾¢ì¸ð Î õ. O' Å¢Ä¢ÕóÐ $O'M, O'N$ ±ý Û õ þÕ ¦ºí Ì òÐì§¸¡Î ¸¨Ç $\underline{P}, \underline{Q}$ ±ýÈ Å¢¨º¸û ¦ºÂøÀÎ õ §¸¡Î ¸Ç¢ý ÁÐ Å¨Ã¸.

þî¦ºí Ì òÐì §¸¡Î ¸Ç¢ý ¿¦Ç í¸û Ó¨È§Â p, q ±ýÀÉÅ¡ Ì õ. «î ÍÆÄ¢¨ ½ôÒ ¾¢Èý¸û «ÇÅ¢ü ºÁÉ¡¨ ¸Â¡ø Pp = Qq ¬ Ì õ.

O Å¢ø ¦ºÂüÀÎ õ $\underline{P}, \underline{Q}$ ±ýÀÉÅüÈ¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢¨º¨Â ±É ì¦¸¡ñ¼¡ø «Ð×õ O Å¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎ õ.



À¼õ 2-30

À¼õ 2.30 ø O' ÀüÈ¢ $\underline{P},\underline{Q}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¾¢Õôò¾¢Èý ¸û Ó¨È§Â

$\underline{O'M}\wedge\underline{P},\underline{O'N}\wedge\underline{Q}$ ¬ Ìõ.

$\underline{O'M}\wedge\underline{P}$ ±ýÀÐ þ¼ï ÍÆ¢Â¡×õ $\underline{O'N}\wedge\underline{Q}$ ±ýÀÐ ÅÄï ÍÆ¢Â¡¸×õ ¦ºÂøÀ¡¢¸¢ýÈÉ. ±É§Å «ÅüÈ¢ý þÂü¸½¢¾ì Ü Î¾ø.

$$\begin{aligned}&\underline{O'M}\wedge\underline{P}+\underline{O'N}\wedge\underline{Q}\\&=Pp\underline{n_+}-Qp\underline{n_+}\\&=0\end{aligned}$$

¬ Ìõ. ¬ É¡ø Å¡¡¢ì É É¢ý §¾¡üÈôÀÊ (Varignon's theorem) O' ±ý Ûõ ÒûÇ¢ ÀüÈ¢

$\underline{O'O}\wedge\underline{P}+\underline{O'O}\wedge\underline{Q}=\underline{O'O}\wedge\underline{R}$ ¬ Ìõ.

«¾¡ÅÐ

$$\begin{aligned}&\underline{O'O}\wedge\underline{R}=\left(\underline{O'M}+\underline{MO}\wedge\underline{P}\right)+\left(\underline{O'N}+\underline{NO}\right)\wedge\underline{Q}\\&\left(\underline{O'M}\wedge\underline{P}\right)+\left(\underline{O'N}\wedge\underline{Q}\right)+\left(\underline{MO}\wedge\underline{P}\right)+\left(\underline{NO}\wedge\underline{Q}\right)\\&=\underline{P}p\underline{n_+}-Qq\underline{n_+}+0+0\\&=0\end{aligned}$$

±ýÀ¾¡ø O' ±ýÀÐ $\underline{R}$ ¦ºÂøÀÎõ §¸¡ðÊÖûÇ ´Õ ÒûÇ¢Â¡ Ìõ. «¾¡ÅÐ OO' ±ýÀÐ ¦¾¡ ÌÀÂý $\underline{R}$ ý ¦ºÂøÀÎõ ¾¢¨º¢Â¡ Ìõ. O' Å¢ø ¯ûÇ $-\underline{P},-\underline{Q}$ ±ýÀÉÅüÈ¢ý ¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨º $-\underline{R}$ ¬ Ìõ. «Ð×õ $O'O$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢ø þÕì Ìõ. ¬¾Ä¡ø þò¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨º¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ «Æ¢ì Ìõ. ¬¸§Å þùÅ¢Õ ÍÆÄ¢¨ ½¸¨Ç ¬ì Ìõ ¿¡ý Ì Å¢¨º¸ Ùõ ºÁ¿¢¨ ÄÂ¢ø þÕì Ìõ.

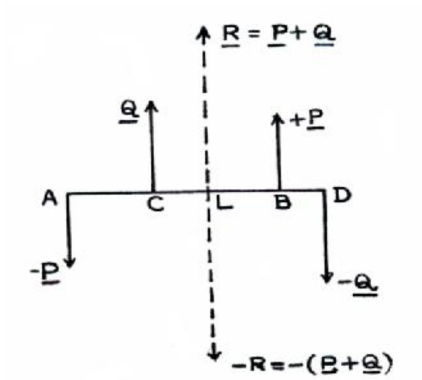
Å¨¸ 2

«î ÍÆÄ¢¨ ½¸¨Ç Å¨ÃÂÚì Ìõ Å¢¨º¸û þ¨ ½Â¡¸ þÕì¸ðÎõ «ÅüÈ¢Û ¨¼Â ¾¢¨º¸ Ùì Ìî ¦ºí Ìò¾¡¸ Å¨ÃÔõ Â¡§¾Û¦Á¡Õ §¿÷ì§¸¡Î «Åü¨Èô À¼õ 2.31ø ¸¡ðÊÂÀÊ ±ýÈ òûÇ¢¸Ç¢ø ¦Åð¼ðÎõ. ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý¸û «ÇÅ¢ü ºÁÉ¡¨ ¸Â¡ø $\underline{P}.AB = Q.CD$ C Â¢Öûû $\frac{Q}{}$B . B Â¢ÖûÇ $\underline{P}$ M ¬¸¢Â þ¨ ½ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ ÌÀÂý ¦ºÂøÀÎõ òûÇ¢¨Â L ±Éì ¦¸¡û¸. ¬¾Ä¡ø $\underline{P}.LB = Q.CL$

±É§Å $P(AB - LB) = Q.(CD - CL)$

$\therefore P.AL = Q.LD$

«¾¡ÅÐ L ±ýÀÐ A Â¢ÖûÇ $(-\underline{P})$ ±ýÈ Å¢¨ºì Ìõ Â¢ÖûÇ $(-\underline{Q})$ ±ýÈ þ¨ ½ Å¢¨ºì Ìõ ¯ûÇ ¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨ºÂ¢ý ¦ºÂøÀÎõ òûÇ¢Â¡ Ìõ.



À¼õ 2-31

¬É¡ø þò¦¾¡ ÌÀÂý ¦¾¡ ÌÀÂý Å¢¨º¸û Ó¨È§Â $(\underline{P} + \underline{Q}), -(\underline{P} + \underline{Q})$ ±ýÈ¡Å¾¡ø «¨Å¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ «Æ¢ì Ìõ. ¬¸§Å þùÅ¢Õ ÍÆÄ¢¨ ½¸¨Ç ¬ì Ìõ ¿¡ý Ì Å¢¨º¸ Ùõ ºÁ¿¢¨ ÄÂ¢Ä¢Õì Ìõ.

§ÁÖõ ´§Ã ¾Çò¾¢ø ºÁÁ¡Ôõ ±¾¢÷Á¡¸×ÓûÇ ¾¢Õô¨Àò ¾¢Èý¸¨Çô ¦ÀüÈ þÕ ÍÆÄ¢¨ ½¸û ºÁýÀÎòÐÅ¾¡ø «î ÍÆÄ¢¨ ½¸Ùû ´ýÈ¢ý Å¢¨ºò ¾¢¨º¸¨Ç §¿÷Á¡È¡¸ «¨Áì Ìõ§À¡Ð.

"´§Ã¾Çò¾¢ø ºÁ¾¢Õôò¾¢È í¸¨Çô ¦ÀüÈ ±¨Å§Â Ûõ þÕ ÍÆÄ¢¨ ½¸û ºÁõ" ±ýÀÐ ¦ÀÈôÀÎõ.

« ýÈ¢Ôõ, ºÁ¾¢Õôò¾¢È ý¸¨Çô ¦ÀüÚûÇ þÃñ Î ´ò¾ ÍÆÄ¢¨ ½¸û þÕÁ¼í Ì ¾¢Õôò¾¢È ¨Éô ¦ÀüÚûÇ ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ìÌ î ºÁõ ±ýÀÐõ ¦ÀÈôÀÎõ.

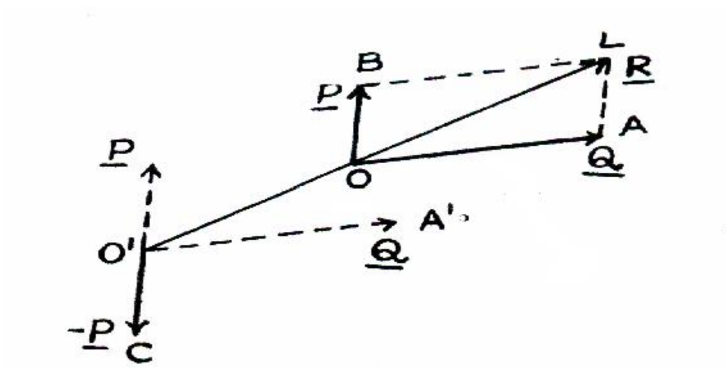
2.12.4 ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ýÁ¢Ð ´§Ã¾Çò¾¢§Ä ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈ ´Õ ¾É¢Å¢¨ ºÔõ ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½Ôõ §º÷óÐ ºÁ¿¢¨Ä¨Â ²üÀÎò¾ ÓÊÂ¡Ð. ¬É¡ø « ¨Å Óó¾¢Â ¾¢¨ºìÌ þ¨ ½Â¡É ¾¢¨ºÂ¢§Ä ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈ ´Õ ¾É¢Å¢¨ ºìÌ ºÁÁ¡Ì õ.

´Õ ¾Çò¾¢ø ¦ºÂüÀÎõ ¾É¢Å¢¨ º, ÍÆÄ¢¨ ½ ¬¸¢ÂÅü¨È Ó¨È§Â $\underline{Q},(\underline{P},-\underline{P})$ ±É ì ¦¸¡û¸. ÍÆÄ¢¨ ½ ¨Â Å¨ÃÂÚìÌõ Å¢¨º¸û $OB,O'C$ ±ýÈ §¸¡Î¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

Å¨¸ 1:

$\underline{Q}$ ±ýÀÐ ÍÆÄ¢¨ ½ Å¢¨º¸Ù ìÌ þ¨½Â¢øÄ¡Å¢Êý «Ð «ÅüÚû ´ ý ¨È À¼õ 2.32 ø ¸¡ðÊÀÊ O Å¢ø º󾢌ìÌÁ¡Ú ¿¢ð Î ¸. «ô¦À¡ØÐ O Å¢ø ¦ºÂüÀÎ ¸¢ýÈ $\underline{P},\underline{Q}$ ±ý Ûõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì ÀÂý Å¢¨º ±ýÈ¡ø «¾ý ¦ºÂøÀÎõ §¸¡Î OA, OB ìÌ þ¨¼§Â « ¨ÁÂ§Å ñ Îõ. « ¨¾ ±É ì ¦¸¡û¸.

Å¨¸1:



À¼õ 2-32

OL ±ýÀÐ ÍÆÄ¢¨ ½Â¢ý Áü¨ÈÂ Å¢¨º¨Â O' ±ý Ûõ òûÇ¢Â¢ø ºó¾¢ìÌÁ¡Ú ¿¢ð Î ¸. $\underline{R}$ ±ýÈ ¦¾¡Ì ÀÂý O' ìÌ ¦¸¡ ñ Î ¦ºø¸.

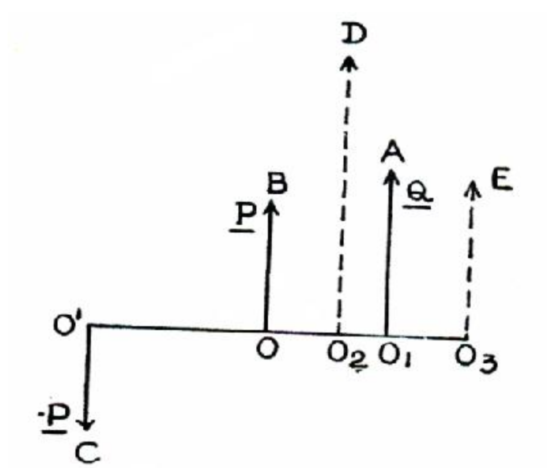
$O'A'$ ±ýÈ §¿÷§¸¡ð¨¼ OA ìÌ þ¨½Â¡¸ Å¨Ã¸. þô¦À¡ØÐ $\underline{R}$ ±ýÈ Å¢¨º¨Â. OA ìÌ þ¨½Â¡É $O'A'$ ±ýÈ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎõ $\underline{Q}$ ±ý Ûõ Å¢¨ºÂ¡¸×õ. $O'C$ ìÌ ±¾¢¡¢ò ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎõ $\underline{P}$ ±ý Ûõ Å¢¨ºÂ¡¸×õ À¢¡¢ì¸Ä¡õ.

$\underline{P}$ ±ý Ûõ À¢ýÉ¾¡¸¢Â (latter), þùÅ¢¨º, $O'C$ ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ ÍÆÄ¢¨½Â¢ý þÃñ¼¡õ Å¢¨º $(-\underline{P})$ Â¢É¡§Ä ºÁÁ¡ì¸ôÀÎ¸¢ýÈÐ.

±É§Å þÚ¾¢Â¡¸ OA Å¢üÌ þ¨½Â¡ÔûÇ $O'A'$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢§Ä ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ $\underline{Q}$ ±ý Ûõ Å¢¨º§Â «ò¦¾¡Ì¾¢Â¢ý Å¢¨ÇÅ¡¸ «¨Á¸¢ÈÐ.

Å¨¸ 2:

Å¢¨º$\underline{Q}$ ¬ÉÐ «îÍÆ¢Ä¢¨½Â¢ý Å¢¨º¸Ùì Ì þ¨½Â¡¸ «¨ÁÂð Îõ.



À¼õ 2-33

$O'O$ ±ýÀÐ $\underline{Q}$ ±ý Ûõ Å¢¨º¨Â O_1 þø ºó¾¢ì¸ðÎõ.O Å¢ÖûÇ $\underline{P}$ O_1 ÖûÇ $\underline{Q}$ ±ý Ûõ ´ò¾ þ¨½Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ÌÀÂý $(\underline{P}+\underline{Q})$ ±ýÈ ´Õ Å¢¨ºìÌî ºÁý.

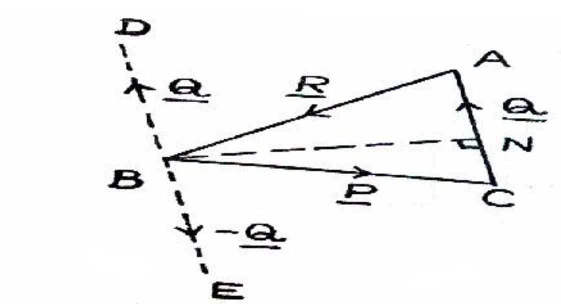
þÐ ±ýÈ §¸¡ðÊüÌ þ¨¼§Â, $\frac{OO_2}{O_2O_1}=\frac{Q}{P}$ ±ýÈ Å¢¸¢¾¾ò¾¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ O_2 ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ø OB ±ý Ûõ ¾¢¨ºìÌ þ¨½Â¡¸î ¦ºÂøÀÎõ.

±É§Å O_2 ÖûÇ $(\underline{P}+\underline{Q})O'$ ÖûÇ $(-\underline{P})$ ±ýÈ þ¨½ Å¨º¸Çý ¦¾¡ÌÀÂý Å¨º $(\underline{P}+\underline{Q})-\underline{P}=\underline{Q}$ ÅüÌî ºÁÉ¡ö, O_1O_2 ±ýÛõ §¸¡ð¨¼ ¦ÅÇ§Â $\frac{O_1O_3}{O_1O_2}=\frac{P+Q}{P}$ ±ýÈ Å¸¾ò¾ø À¡ìÌõ O_3 ±ýÛõ ÒûÇÂø O_2D ¾¨ºìÌ þ¨½Â¡¸ À¼õ 2.33ø ¸¡ðÊÂÀÊ O_3E ±ýÛõ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎõ.

¬¸§Å, «ò¦¾¡Ì¾Âý ¦¾¡ÌÀÂý, Óó¾Â¾¡¸ò ¾ÃôÀð¼ Å¨ºìÌ þ¨½Â¡É ¾¨ºÂ§Ä ¦ºÂüÀÎ¸ýÈ $\underline{Q}$ ±ýÛõ ¾ÉÅ¨ºìÌî ºÁÉ¡Ìõ.

2.12.5 ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇýÁÐ ¾¡ìÌ ¸ýÈ ãýÚ Å¨º¸û ±ñ ÁÐ¾ôÒ, ¾¨º, ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î - ¬¸Â¨Å µ¦Ã¡Øí¸§Ä ±Îò¾ ´Õ Óì§¸¡½ò¾ý Àì¸í¸Ç¡ø ÌÈì¸ôÀð¼¡ø, «¨Å «õÓì§¸¡½ô ÀÃôÀý þÕ Á¼í¸¡ø ÌÈì¸ôÀÎõ ¾ÕôÒò ¾ÈÛ¨¼Â ´Õ ÍÆÄ¨½ìÌî ºÁÁ¡Ìõ.

BC, CA, AB ±ýÈ µ¦Ã¡Øí¸§Ä ±Îò¾ ABC ±ýÈ Óì§¸¡½ò¾ý Àì¸í¸û $\underline{P},\underline{Q},\underline{R}$ ±ýÈ Å¨º¸¨Çì ÌÈì¸ðÎõ.



À¼õ 2-34

B Âý ÅÆÂ¡¸, AC ìÌ þ¨½Â¡¸ DBE ±ýÈ §¸¡ð¨¼ Å¨Ã¸. B Âø Qì Ìî ºÁÉ¡É þÕ ºÁ§Å¾÷ Å¨º¸¨Ç BD, BE ±ýÛõ ¾¨º¸Çø ¦ºÂüÀÎÁ¡Ú «¨Áì¸.

Å¨º Óì§¸¡½ò¾ýÀÊ BD Âý ¿¦ÇÅ¡ðÊø ¦ºÂüÀÎõ Å¨º $\underline{Q^B}$ Âø ¦ºÂüÀÎõ Å¨º¸û $\underline{P},\underline{R}$ ¬¸Â¨Å ºÁ¿¨ÄÂø þÕìÌõ. ¬¸§Å ´ù¦Å¡ýÚõ $\underline{Q}$ ìÌ ºÁÉ¡ö Ó¨È§Â CA, BE ±ýÈ ¾¨º¸Çø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸×õ ¯ûÇ þÕ Å¨º¸§Ç þÚ¾Â¡¸ þÕìÌõ.

À¼õ 2.34ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú BÂ¢Ä¢ÕóÐ ACì Ì BN ±ýÈ ¦ºí ÌòÐì §¸¡ð¨¼ Å¨Ã¸. þù Å¢¨º¸û Q.BN ±ýÀ¨¾ò ¾ÉÐ ¾¢ÕôÒò ¾¢ÈÉ¡¸×ûÇ ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ ¨Â ¯ ñ ¼¡ì Ì õ.

§ÁÖõ Q.BN = AC.BN

$$= 2 \times \frac{1}{2} AC.BN$$

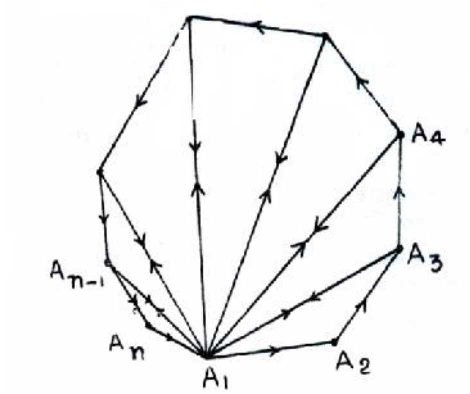
= Óì§¸¡½õ ABC Â¢ý ÀÃôÀ¢ý þÕÁ¼í Ì.

þùÅ¢¾ ÓÊ× ±ò¦¾¡¨¸ Å¢¨º¸Ùì Ìõ ²üÈ¾¡ Ìõ.

2.12.6 ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ýÁ£Ð ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈ ´Õ¾ÇòÐ Å¢¨ºì¸½ ¦Á¡ýÚ ±ñ Á¾¢ôÒ, ¾¢¨º, ¦ºÂüÀÎõ§¸¡Î ¬¸¢Â¨Å µ¦Ã¡Ø í¸¢§Ä ±Îò¾ ´Õ Àø§¸¡½ò¾¢ý Àì¸ í¸Ç¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀð¼¡ø «¨Åì¸ôÀ¡ø §¸¡½ô ÀÃôÀ¢ý þÕÁ¼í¸¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ ¾¢ÕôÒ¾¢È¨É ¦ÀüÈ ´Õ ÍÆÄ¢¨½ì Ì ºÁÁ¡Ìõ.

À¼õ 2.35ø ¸¡ðÊÔûÇ $A_1, A_{2....}A_n$ ±ýÛõ Àø§¸¡½ò¾¢ý Àì¸í¸Ç¡¸¢Â $A_1A_2, A_2A_{3....}A_{n-1}A_n$ ±ýÀ¨Å ¾ÇÅ¢¨ºì ¸½ò¾¢Ä¼í¸¢Â $F_1, F_2......F_n$ ±ýÛõ Å¢¨º¸¨Ç ±ñ Á¾¢ôÒ, ¾¢¨º, ¦ºÂüÀÎõ§¸¡Î ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø ÌÈ¢ì¸ðÎõ $A_1A_{3,}A_1A_{4,......}A_1A_{n-1}$ ±ýÀÉÅüÈ¢ ë ¼¡¸ «ÅüÈ¡ø ÓüÈ¢Öõ ÌÈ¢ì¸ôÀð¼ ºÁÛõ ±¾¢ÕÁ¡É Å¢¨º¸¨Ç ¯ûÇ¢Î¸.

«ô¦À¡ØÐ A_1, A_2, A_3 ±ýÈ Óì§¸¡½ò¾¢ý Àì¸í¸Ç¡¸¢Â $A_1A_2, A_2A_{3,}A_3A_1$ ±ýÀÉÅüÈ¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀðÎõ. «ôÀì¸í¸¨Ç§Â ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î¸Ç¡¸×õ ¦¸¡ñ¼ Å¢¨º¸û $2\Delta A_1A_2A_3$ ±ýÈ ÀÃôÀÇ¨Å ±ñ Á¾¢ôÀ¡¸ì ¦¸¡ñ¼ ¾¢ÕôÒ¾¢È¨É ¯¨¼Â ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½ì Ìî ºÁÁ¡Ìõ.



À¼õ 2-35

« ùÅ¡§È $\Delta A_1A_3A_2, \Delta A_1A_4A_5, ...\Delta A_1A_{n-1}A_n$ ±ýÈ Óì§¸¡½í¸Ç¢ý Àì¸í¸Ç¡ø ±ñ Á¾¢ôÒ, ¾¢¨º, ¦ºÂüÀÎõ §¸¡Î ¬¸¢ÂÅü¨È ÀüÈ¢ì ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ Å¢¨º¸û Ó¨È§Â $2\Delta A_1A_3A_4, 2\Delta A_1A_4A_5 ....2\Delta A_1A_{n-1}A_n$ ±ýÚ ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ ¾¢ÕôÒ ¾¢Èý¸¨ÇÔ¨¼Â ÍÆÄ¢¨½¸ÙìÌî ºÁÁ¡¸ ¯ûÇ¾¡¸×õ ¸Õ¾Ä¡õ. «ò¾É¢î ÍÆÄ¢¨½ôÒò ¾¢Èý «ó¾ ÍÆÄ¢¨½ôÒò ¾¢Èý¸Ç¢ý þÂü¸½¢¾ì ÜÎ¾ÖìÌî ºÁÁ¡Ìõ.

¬¸§Å «ò¾É¢î ÍÆÄ¢¨½ôÒò ¾¢Èý, §Áü¦¸¡ñ¼ Àø§¸¡½õ $A_1A_2,....A_n$ þý ÀÃôÀ¢ý þÕÁ¼í¸¡¸¢üÌî ºÁÁ¡õ.

Á¡¾¢¡¢ì ¸ ½ ì Ì ¸ û:

Á¡¾¢¡¢ 2.1 10 ¸¢¸¢. « Ç× û Ç Å¢ ¨ º ´ ý Ú ÐÅ ì ¸ôÒû Ç¢ O ÅÆ¢§Â y « î º¢ ý Á¢ ¨ ¸ò¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ. « ùÅ¢ ¨ º ¨ Â Ó ¨ È§Â (a) A (0, 0, 2) $\left[10^{-2}\right]$Á¦., (b) B (0, 2, 0) $\left[10^{-2}\right]$Á¦., (c) C (2, 0, 0) $\left[10^{-2}\right]$Á¦., (d) ,D (2, 2, 2) $\left[10^{-2}\right]$Á¦., ± ý Û õ ÒûÇ¢¸Ç¢ø ¦ ºÂøÀ Î Á¡Ú ¿¸÷òÐÅ¾¡¸¢ø ± Î ò¾Å¢ ¨ ºì Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡ É "Å¢ ¨ º ÍÆÄ¢ ¨ ½ ò¦¾¡ Ì ¾¢¸ ¨ Çì " ¸¡ ñ ¸.

þ í ì $\underline{F} = 10\underline{j}$ ¸¢.¸¢

(a) $\left\{o\right.$ Å¢ø $\underline{F} = 10\underline{j}$ ¸¢.¸¢. ± ý Û õ Å¢ ¨ º$\left.\right\}$

$\left\{A\left(0,0,2\right)\right\}$ ø $\underline{F} = 10\underline{j}$ + ¾¢ÕôÒò¾¢È ý

$(\underline{AO} - \underline{F})$ ± ý Û õ µ÷ ÍÆÄ¢ ¨ ½ $\underline{C_1}$

$\left\{A\right.$Â¢ø $\underline{F} = 10\underline{j} + \underline{C_1} = -2k \wedge 10\underline{j}\left.\right\}$

$= 20i\left[10^{-2}\right]$ Á¦.¸¢.¸¢.

(b) $\left\{o\right.$ Å¢ø $\underline{F} = 10\underline{j}$ ¸¢.¸¢. ± ý Û õ Å¢ ¨ º$\left.\right\}$

$\equiv \left\{B\left(0,2,0\right)\right.$Å¢ø $\underline{F} = 10\underline{j}\left.\right\} + \underline{C_1} = \underline{BO} \wedge \underline{F}$

$= (B$Â¢ø $\underline{F} = 10\underline{j} + \underline{C_2} = -2\underline{j} \wedge 10\underline{j} = 0)$

(c) $\left\{o\right.$ Å¢ø $\underline{F} = 10\underline{j}$ ¸¢.¸¢. ± ý Û õ Å¢ ¨ º$\left.\right\}$

$\equiv C\left(2,0,0\right)$Å¢ø $\underline{F} = 10\underline{j} + \underline{C_3} = \underline{CO} \wedge \underline{F} = (C$Â¢ø $\underline{F} = 10\underline{j}) + C_3 = -2\underline{i} \wedge 10\underline{j}$

$= -20\underline{k}\left[10^{-2}\right]$Á¦.¸¢.¸¢.

(d) $\left\{o\right.$ Å¢ø $\underline{F} = 10\underline{j}$ ¸¢.¸¢. ± ý Û õ Å¢ ¨ º$\left.\right\}$

$\equiv D\left(2,2,2\right)$Å¢ø $\underline{F} = 10\underline{j} + C_3 = \underline{DO} \wedge \underline{F}$

$\equiv \left\{D\right.$ Â¢ø $\underline{F} = 10\underline{j}\left.\right\} + \underline{C_3} = (-2\underline{i} - 2\underline{j} - 2\underline{k} \wedge 10\underline{j})$

$\equiv \left\{ D \right.$ Â¢ø $\underline{F} = 10\underline{j}$ ¸¢.¸¢.$\left.\right\} + \underline{C_8} = -20\underline{i} - 20\underline{k}\left[10^{-2}\right]$Á¢.¸¢.¸¢

Á¡¾¢¡¢ 2.2 ã ýÚ Å¢¨º¸Ù õ, þÃ ñ Î ÍÆÄ¢¨ ½ ¸Ù õ À¢ýÅÕÁ¡Ú « ¨Á¸¢ýÈÉ:

$\underline{F_1} = 6\underline{i} + 0\underline{j} + 8\underline{k}$ ±ý Û õ Å¢¨º A (0, 2, 2) ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢Öõ,

$\underline{F_2} = 4\underline{i} + 8\underline{j} + 0\underline{k}$ ±ý Û õ Å¢¨º B(2, 2, 2) ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢Öõ,

$\underline{F_3} = 12\underline{i} + 12\underline{j} + 12\underline{k}$ ±ý Û õ Å¢¨º C (2, 4, 0) ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢Öõ,

$\underline{C_1} = 0\underline{i} - 6\underline{j} + 6\underline{k}$

$\underline{C_2} = 0\underline{i} - 6\underline{j} + 6\underline{k}$ ±ý Úõ « ¨Á¸¢ýÈÉ.

þÅüÈ¢ü Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡É "Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½ " « ¨Áô¨Àò ÐÅ ì ¸ôÒûÇ¢ ÀüÈ¢ Å ¨ÃÂÚ ì ¸.

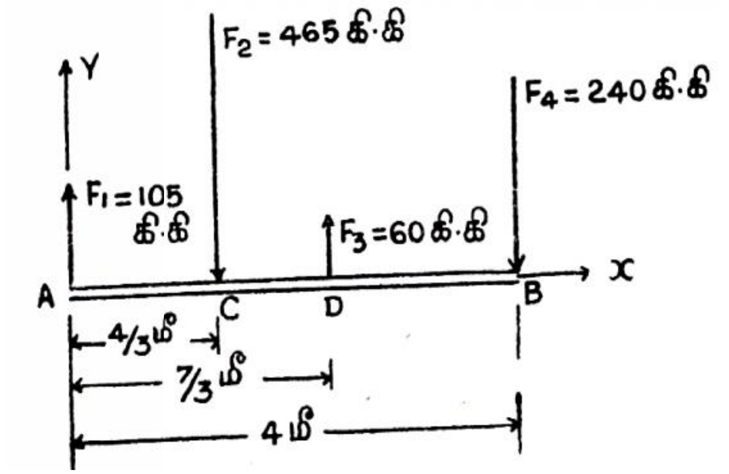
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{± Î ò¾ Å¢¨ º ò ¦ ¾¡ Ì ¾¢+} \\ \text{ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾È ý} \\ \text{¦ ¾¡ Ì ¾¢} \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{0 Â¢ø} \\ \underline{R} = \sum_{i=1}^{3n} F_i \text{ ± ý Û õ} \\ \text{¦ ¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢¨º} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underline{M_0}^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i} \text{ ± ý Û õ ¾¢ÕôÒò} \\ \text{¾¢È ¨ Éô ¦ ÀüÈ µ ÷ ÍÆÄ¢¨ ½ +} \\ \sum_{i=1}^{n} \underline{C_i} \end{array} \right\}$$

$$\equiv \left\{ \underline{R} = 20\underline{i} + 18\underline{j} + 18\underline{k} \right\} + \begin{vmatrix} i & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 12\underline{i} + 6\underline{j} + 18\underline{k} + 28\underline{i} + 18\underline{j}\, 6\underline{k}$$

$+ \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 12\underline{i} + 6\underline{j} + 18\underline{k} + 28\underline{i} + 18\underline{j}\ 6\underline{k}$ v ± ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢È Û ¨¼Â µ ÷ ÍÆÄ¢¨ ½ .

Á¡¾¢¡¢ 2.3 4 Á¢ð¼÷ ¿¦ÇÓûÇ ¯ò¾¢Ãõ (beam) ´ýÈ¢ø À¼õ 2.36ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¢¨º¸û ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈÉ.« ¨Å¸Ù ìÌî º¡¢¿¢¸Ã¡É “Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½“ « ¨Áô¨À (a) A ±ýÛõ ÒûÇ¢ (b) B ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢Öõ Å¨ÃÂÚì¸. (c) «ùÅ¢¨ºò ¦¾¡Ì¾¢ìÌî ºÁÁ¡¸ ´Î í Ìõ ´Õ ¾É¢Å¢¨º¨Âì ¸¡ ñ ¸.



À¼õ 2-36

A ³ò ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¡¸×õ, AB ±ýÛõ ¯ò¾¢Ãò¨¾ x «îº¡¸×õ ¦¸¡û¸. A Â¢ø Å¨ÃÂôÀÎõ ¦ºíÌòÐì§¸¡ð¨¼ y «îº¡¸×õ ¦¸¡û¸.

«ô¦À¡ØÐ, $\underline{F_1} = 105\underline{j}$ ±ýÛõ Å¢¨º A (0, 0) ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ.

$\underline{F_2} = -465\,j$ ±ýÛõ Å¢¨º C $\left(\frac{4}{3},0\right)$ ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. $\underline{F_3} = 60\underline{j}$ ±ýÛõ Å¢¨º D $\left(\frac{7}{3},0\right)$ ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ.

$\underline{F_4} = -240\underline{j}$ ±ýÛõ Å¢¨º B(4,0) ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ.

(a)A ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø “Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½“ « ¨Áô¨Àô ¦ÀÚ¾ø:

¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢ìÌî ºÁÁ¡¸ A ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø « ¨ÁÔõ ´Õ ¾É¢Å¢¨º, ´Õ ¾É¢î ÍÆÄ¢¨ ½ ¬¸¢ÂÅü¨È $R, \underline{M_A^R}$ ±Éì ¦¸¡û¸.

«ô¦À¡ØÐ $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} F\underline{i} = 105\underline{j} - 465\underline{j} + 60\underline{j} - 240\underline{j} = -540\underline{j}$.¸¢.¸¢

$$\underline{M_A^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F_i}$$

$$= \left\{ \left(0.\underline{i} + 0.\underline{j}\right) \wedge 105\underline{i} \right\} + \left\{ \frac{4}{3}\underline{i} \wedge 465\underline{j} \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{7}{3}\underline{i} \wedge 60\underline{j} + 4\underline{i} \wedge -240\underline{j} \right\}$$

$$= 0 - 620\underline{k} + 140\underline{k} - 960\underline{k}$$

$$= -1440\underline{k}$$ Á¦. ¸¦. ¸¦.

(b) B ± ý Û õ ÒûÇ¦Â¦ø "Å¦ ¨ º Í ÆÄ¦ ¨ ½ " « ¨ Áô ¨ À ¦ À¡ Úò¾ø:

A ± ý Û õ ÒûÇ¦Â¦ø $\underline{R} = -540\underline{j}$ ± ý Û õ Å¦ ¨ ºÔõ, $\underline{M}_A^R = -1440\underline{k}$ ± ý Û õ ¾¦ÕôÒò¾¦ÈÛ ¨ ¼Â µ÷ Í ÆÄ¦ ¨ ½Ôõ ± Î ò¾ Å¦ ¨ ºò ¦ ¾¡ Ì ¾¦ ì Ì î ºÁÁ¡ Ì õ. B ± ý Û õ ÒûÇ¦Â¦ø ºÁ Û ¦ Á¾¦ÕÁ¡ É Å¦ ¨ º ¸ ¨ Ç ²üÀ Î òÐ ¸ .

± É §Å $\{A$ Â¦ø $\underline{R}, \underline{M}_A^R\} \equiv \{A\ \underline{R}, \underline{M}_A^R\} + \{B(\underline{R}, \underline{R})\}$

$\equiv \{B$ Â¦ø $\underline{R}\} + \underline{M}_A^R + \underline{BA} \wedge \underline{R}$

$= \{B$ Â¦ø $= -540\underline{j}\} + \underline{M}_B^R = -1440\underline{k} + (-4\underline{i} \wedge -540\underline{j}) = \{B$ Â¦ø

$\underline{R} = -540\underline{j}\} + \underline{M}_B^R = -1440\underline{k} + 2160\underline{k}$

$= \{B$ Â¦ø $= -540\underline{j}\} + \underline{M}_B^R = 720\underline{k}\}$.

(c)Å¦ ¨ ºò ¦ ¾¡ Ì ¾¦ ¨ Â ´ Õ ¾É¦Å¦ ¨ ºÂ¡ ¸ ´ Î ì Ì ¾ø:

þ í Ì $\underline{R} = -540\underline{j}$ $\underline{M}_A^R = -1440\underline{k}$ ± ýÀ ¨ Å ´ ýÚ ì ¦ ¸ ¡ ýÚ ¦ º í Ì ò¾¡ ¸ « ¨ Á ¸ ¦ ýÈÉ. ± É §Å þÅü ¨ È ´ Õ ¾É¦Å¦ ¨ º ì Ì î ºÁÁ¡ ¸ Á¡üÈÓÊÔõ. « ùÅ¾ Å¦ ¨ º ÓÓ¾Â Å¦ ¨ º $\underline{R} = -540\underline{j}$ ì Ì î ºÁÁ¡ ¸ ×õ, «Ð ¦ ºÂøÀ Î õ ÒûÇ¦ E ¬ ÉÐ, A ± ý Û õ ÒûÇ¦ ÀüÈ¦ ± Î ì Ì õ $\underline{R}$ ± ý Û õ Å¦ ¨ ºÂ¦ý ¾¦ÕôÒò¾¦È ý , $\underline{M}_A^R = -1440\underline{k}$ ì Ì î ºÁÁ¡ ¸ þÕ ì Ì Á¡Úõ « ¨ ÁÂ§Å ñ Î õ.

¬ ¸ §Å,

$$\underline{AC} \wedge \underline{R} = \underline{M}_A^R$$

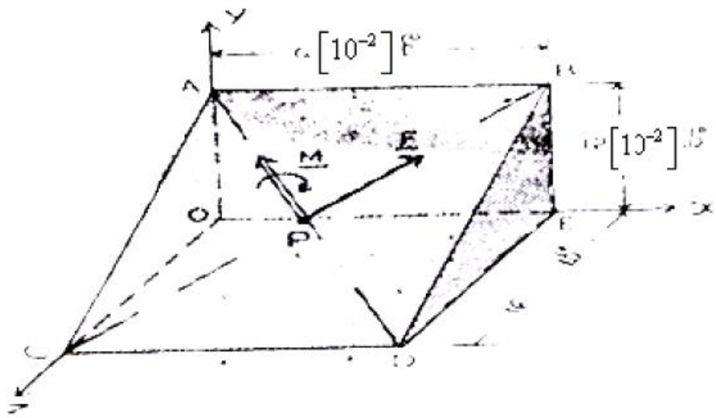
$$X\underline{i} \wedge -540\underline{j} = -1440k$$

$$-540X\underline{K} = -1440\underline{k}$$

$$X = \frac{8}{3}$$ Á¦ð¼÷

«¾¡ÅÐ $\underline{R} = -540\underline{j}$ ¸¢.¸¢. ±ý Û õ ¾É¢Å¢¨ºÂ¡ÉÐ, ¯ò¾¢Ãò¾¢ø A -Â¢Ä¢ÕóÐ $\frac{8}{3}$Á£ ¦¾¡¨ÄÅ¢Ö ûÇ E ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ.

Á¡¾¢¡¢ 2.4 À¼õ 2.37ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú « ¨ÁÔõ "Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½ "ì Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡É µ÷ ´ü¨È Å¢¨º¨Â ²üÀ Î ò¾ ÓÊÔ¦ÁÉ ì ¦¸¡ ñ Î a"Â¢ý Á¾¢ô¨Àì ¸¡ ñ ¸.



À¼õ 2-37

Å¢¨º, ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý ¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ¸û 100¸¢.¸¢., 1000 ¸¢.¸¢. ¦º.Á£. ±ýÈ¡ø ´ü¨È Å¢¨º ¦ºÂøÀ Î õ §¸¡ Î, yz ¾Çò¨¾î ºó¾¢ì Ì õ ÒûÇ¢ ¬¸¢ÂÅü¨È Å¨ÃÂÚì ¸.

O ¨Åò ÐÅì ¸ôÒûÇ¢Â¡¸ ±Î ì Ì õ§À¡Ð A (0, 12, 0) $\left[10^{-2}\right]$Á£.,

B (a, 12, 0) $\left[10^{-2}\right]$Á£., C (0, 0, 16) $\left[10^{-2}\right]$Á£., D (a, 0,16) $\left[10^{-2}\right]$Á£., $P\left(\frac{a}{2}, 6, 8\right)$

$\left[10^{-2}\right]$Á£. ¬ Ì õ. $(\underline{F}, \underline{M})$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ü Ì î ºÁÁ¡É ´ü¨È Å¢¨º yz ¾Çò¨¾

$G(0, \bar{y}, \bar{z})$ ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø ¦Åð¼ð Î õ.

$$\underline{CB} = \underline{OB} - \underline{OC}$$
$$= (ai + 12\underline{j}) - 16\underline{k}$$
$$= ai + 12\underline{j} - 16\underline{k}$$

$$\sqrt{a^2 + 144 + 256}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2 - 400}}\underline{i} + \frac{12}{\sqrt{a^2 - 400}}\underline{j} - \frac{16}{\sqrt{a^2 - 400}}\underline{k}\right\}$$

$$\therefore \underline{F} = 100\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2 - 400}}\underline{i} + \frac{12}{\sqrt{a^2 - 400}}\underline{j} - \frac{16}{\sqrt{a^2 - 400}}\underline{k}\right\}$$

$$=\frac{100}{\sqrt{a^2-400}}\left\{a\underline{i}+12\underline{j}-16k\right\}$$.¸¢.¸¢.

$$\underline{DA}=\underline{OA}-\underline{OD}$$
$$=12\underline{j}-(a\underline{i}+16\underline{k)}$$
$$=-a\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}$$
$$=\sqrt{a^2-400}\left\{-\frac{a}{\sqrt{a^2-400}}\underline{i}+\frac{12}{\sqrt{a^2-400}}\underline{j}-\frac{16}{\sqrt{a^2-400}}\underline{k}\right\}$$

$$\therefore \underline{M}=1000\left\{-\frac{a}{\sqrt{a^2-400}}\underline{i}+\frac{12}{\sqrt{a^2-400}}\underline{j}-\frac{16}{\sqrt{a^2-400}}\underline{k}\right\}$$
$$=\frac{1000}{\sqrt{a^2-400}}\left\{-a\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}\right\}$$

$(\underline{F},\underline{M})$ ±ýÀ¨Å ´ ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ì ò¾¡¸ «¨ÁÅ¾¡ø,

$$\underline{F}\cdot\underline{M}=0$$

«¾¡ÅÐ $(a\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k})\cdot(-a\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}=0$

$$-a^2+144+256=0$$
$$a^2=400.$$

«¾¡ÅÐ $a=20$ $\left[10^{-2}\right]$Á¦.

$$\therefore \underline{F}=\frac{100}{\sqrt{800}}\left\{20\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}\right\}$$
$$=\frac{100}{20\sqrt{2}}\left\{20\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}\right\}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}\left(20\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}\right)$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}\left(10\underline{i}+6\underline{j}-8\underline{k}\right)$$ ¸¢.¸¢.

$$\underline{M}=\frac{1000}{\sqrt{800}}\left\{-20\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}\right\}$$
$$=\frac{1000}{20\sqrt{2}}\left\{-20\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}\right\}$$

$$= \frac{50\sqrt{2}}{2}\left(20\underline{i}+12\underline{j}-16\underline{k}\right)$$

$$= 50\sqrt{2}\left(10\underline{i}+6\underline{j}-8\underline{k}\right)$$

$$= -500\sqrt{2\underline{i}}+300\sqrt{2}\,\underline{j}-400\sqrt{2}\,\underline{k} \quad \left[10^{-2}\right]$ Á¦. ¸¢. ¸¢.

G (O,y,z) ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø ºÁ Û ¦Á¾¢ÕÁ¡ É $\underline{F}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ º¸ ¨ Ç ²üÀ Î ò¾×õ.

« ô ¦À¡ØÐ, G Â¢ø $-\underline{F}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ ºÔõ, P Â¢ø $\underline{F}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ ºÔõ $\underline{GP}\wedge\underline{F}$ ±ý Û õ ¾¢ÕôÒò¾¢È ¨ Éò §¾¡üÚÅ¢òÐ $\underline{M}$ I ³ Í Æ¢òÐÅ¢ Î õ.

±ý Û õ Å¢ ¨ ºÔõ G Â¢ø $\underline{M}=\underline{GP}\wedge\underline{F}$ ±ý Û õ ´ü ¨ È Å¢ ¨ º Á¾Á¡ ¸ þÕ ì Ì õ.
« ô ¦À¡ØÐ,

$$(-500\sqrt{2}\,\underline{i}+300\sqrt{2}\,\underline{j}-400\sqrt{2}\,\underline{k} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 6-\overline{y} & 8-\overline{z} \\ 10 & 6 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 5\sqrt{2}\left\{(8\overline{y}+6\overline{z}-96)\underline{i}-\underline{j}(-160+10z)+\underline{k}(10y)\right\}$$

$$5\sqrt{2}(10y) = 400\sqrt{2}(iii)$$

þÕÒÈ í ¸Ç¢Öõ $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ ¸Ø ì ¸ ¨ Çî ºÁôÀ Î ò¾

$$=5\sqrt{2}\,(5\overline{y}+6\overline{z}-96)\underline{i}-\underline{j}=-500\sqrt{2}\,..........(i)$$

$$=5\sqrt{2}\,(-160+10z)=300\sqrt{2}\,..........(ii)$$

$$=5\sqrt{2}\,(10y)=400\sqrt{2}\,..........(iii)$$

(ii) ÅÐ ºÁ ý À¡ ðÊÄ¢ÕóÐ $\underline{z}=10$ $\left[10^{-2}\right]$ Á¦ ±É ×õ

(iii)ÅÐ ºÁ ý À¡ ðÊÄ¢ÕóÐ $y=-8$ $\left[10^{-2}\right]$ Á¦. ±É ×õ ¸¢ ¨ ¼ì Ì õ

Ì È¢ôÒ : $\overline{y},\overline{z}$ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý Á¾¢ôÒ ¸ û (i) ÅÐ ºÁ ý À¡ ð ¨ ¼ ¿¢ ¨ È§ÅüÚÅ ¨ ¾Ôõ ¸ ¡ ½ Ä¡õ. Å¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ « ¨ ÁôÀ¢ý ´ Î ì ¸ õ

Á¡¾¢¡¢ 2-5 O ¨ Å Î Í ð¼ ¨ ÁôÀ¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼ ¬ Âò ¦¾¡ ¨ Ä (coordinate system)

$\underline{F}=\left(10\underline{i}+6\underline{j}-6\underline{k}\right)$ ¸¢. ¸¢ ¯ ûÇ Å¢ ¨ º ´ ýÚ (10,3,4)Á¦. ±ý Û Á¢¼ò¾¢Ä ¨ ÁÔõ

ÒûÇ¢ÅÆ¢§Â ¦ºÂøÀÎ ¸¢ÈÐ. O ÀüÈ¢ $\underline{F}$ ±ý Ûõ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢È¨ É ì ¸¡ ñ ¸.

$\underline{F} = \left(10\underline{i} + 6\underline{j} - 6\underline{k}\right)$ (10,3,4) ±ý ÀÐ P ±ý Ûõ ÒûÇ¢¨Âì Ì È¢ò¾¡ø

$\underline{r} = \underline{OP} = 10\underline{i} + 3\underline{i} + 4\underline{k}$ ¬ Ìõ.

$$;\therefore \underline{M_0} = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 3 & 4 \\ 10 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \left(-42\underline{i} + 100\underline{j} + 30\underline{k}\right)$$ Á¢. ¸¢. ¸¢

Á¡¾¢¡¢ 2-6 Óó¾¢Â Á¡¾¢¡¢ì ¸½ì¸¢ø («¾¡ÅÐ Á¡¾¢¡¢ 2.5ø) ±Îò¾ $\underline{F}$ ±ý Ûõ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢È¨É Q(6,-4,-3)Á¢ ±ý Ûõ ÒûÇ¢ ÀüÈ¢ì ¸¡ ñ ¸.

$\underline{QP} = \underline{OP} - \underline{OQ}$

$= \underline{r_1} - \underline{r_2}$

$= \left(10\underline{i} + 3\underline{j} + 4\underline{k}\right) - \left(6\underline{i} - 4\underline{j} - 3\underline{k}\right)$

$= 4\underline{i} + 7\underline{i} + 7\underline{k}$

$\therefore \underline{M_Q} = \underline{QP} \wedge \underline{F}$

$$= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & 7 & 7 \\ 10 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \left(-84\underline{i} + 94\underline{j} - 46\underline{k}\right)$$ Á¢. ¸¢. ¸¢.

Á¡¾¢¡¢ 2-7 $\underline{F} = \left(200\underline{i} + 100\underline{j} + 500\underline{k}\right)$ ¸¢. ¸¢ ±ý Ûõ Å¢¨º ´ ý Ú P(8,9,4)Á¢ ±ý Ûõ ÒûÇ¢ÅÆ¢§Â ¦ºÂøÀÎ ¸¢ÈÐ. $\left(\frac{6}{19}, -\frac{6}{19}, -\frac{17}{19}\right)$ ±ýÀÉÅü¨Èò ¾¢¨ºì ¸¢¼ì ¨¸ ¸Ç¡¸ ×õ, Q(-5,3,2)Á¢ ±ý Ûõ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ §¿÷§¸¡Î ÀüÈ¢ $\underline{F}$ ý ¾¢ÕôÒò ¾¢È¨ É ì ¸¡ ñ ¸.

$\underline{r}$ ±ýÀÐ Q(-5,3,2)Á¢ ±ý Ûõ ÒûÇ¢¨Â P (8,9,4)Á¢. ±ý Ûõ ÒûÇ¢Ô¼ý þ¨½ì Ìõ ¾¢¨ºÂ¢¨Âì ÌÈ¢ì Ì ¦ÁÉ¢ø,

$\underline{r} = \underline{QP} = \underline{OP} - \underline{OQ}$

$$=\left(8\underline{i}+9\underline{j}+4\underline{k}\right)-\left(-5\underline{i}+3\underline{j}+2\underline{k}\right)$$

$$=\left(13\underline{i}+6\underline{j}+2\underline{k}\right)$$ Á¦.

$$\underline{F}=\left(200\underline{i}+100\underline{j}+500\underline{k}\right)$$ ¸¢.¸¢

$\therefore \underline{M_Q}$ = Q ÀüÈ¢ $\underline{F}$ ý ¾¢Õô Ò¾¢È ý $\underline{a_1}, \underline{a_2}$

$$=\underline{QP}\wedge\underline{F}$$

$$=\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 13 & 6 & 2 \\ 200 & 100 & 500 \end{pmatrix}$$

Q ÅÆ¢§Â $\left(\frac{6}{19},-\frac{6}{19},-\frac{17}{19}\right)$ ± ý Û õ ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸ ¨ ÇÔ ¨ ¼Â §¿÷§¸¡ð ¨ ¼ QL ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø QL ¾¢ ¨ ºÂ¢ø µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â

$\underline{n}=\frac{6}{19}\underline{i}-\frac{6}{19}\underline{j}+\frac{17}{19}\underline{k}$ ± ý ÀÐ Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ. ±É§Å ± ý Úõ §¿÷§¸¡ Î ÀüÈ¢ $\underline{F}$ ý ¾¢Õô Ò ¾¢È ý

$$= \underline{n}.\left(\underline{M_Q}\right)$$

$$=\underline{n}.(\underline{r}\wedge\underline{F})$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{6}{19} & \frac{-6}{19} & \frac{17}{19} \\ 13 & 6 & 2 \\ 200 & 100 & 500 \end{vmatrix}$$

= 2900 Á¦.¸¢.¸¢.

Á¡¾¢¡¢ 2-8 $\underline{F}=20\underline{i}+5\underline{j}+10\underline{k}$ ¸¢.¸¢ ± ý Û õ Å¢ ¨ º P(0,-4,3)Á¦. ± ý Û õ ÒûÇ¢ÅÆ¢§Â ¦ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ. « ùÅ¢ ¨ ºÂ¢ý ¾¢Õô Ò ¾¢È ¨ É Q (-7,-2,-4) Á¦, L(1,-2,2) Á¦ ± ý Û õ ÒûÇ¢¸ ¨ Ç î §º÷òÐ ¯ ñ ¼¡ Ì õ §¿÷§¸¡ Î ÀüÈ¢ ¸¡ ñ ¸.

$\underline{r}$ ± ý ÀÐ $\underline{QP}$ Â¢ý ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â ì Ì È¢ôÀ¾¡ ¸¢ø

$$\underline{r}=\underline{QP}=\underline{OP}-\underline{OQ}$$

$$=\left(0\underline{i}-4\underline{j}+3\underline{k}\right)-\left(-7\underline{i}-2\underline{j}-4\underline{k}\right)$$

$= \left(7\underline{i} - 2\underline{j} + 7\underline{k}\right)$ Á¦.

$\underline{F} = \left(20\underline{i} + 5\underline{j} + 10\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢.

$\therefore \underline{M_Q} = \underline{QP} \wedge \underline{F}$

$$= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 7 & -2 & 7 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$\underline{QL} = \underline{OL} - \underline{OQ}$

$= \left(\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}\right) - \left(-7\underline{i} - 2\underline{j} - 4\underline{k}\right)$

$= 8\underline{i} + 0\underline{j} + 6\underline{k}$

$= 10\left\{\frac{8}{10}\underline{i} + 0\underline{j} + \frac{6}{10}\underline{k}\right\}$

$= 10\left(\frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{k}\right)$

$= 10\underline{n}, \underline{n} = \frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{k}$ ±ýÀÐ QL ±ýÛõ §¿÷§¸¡ðÊø «¨ÁÔõ µÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ.

±É§Å

$M_{QL} = \underline{n}.\left(\underline{M_Q}\right) = \underline{n}.(\underline{QP} \wedge \underline{F})$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 7 & -2 & 7 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 1$$ Á¦.¸¢.¸¢.

Á¡¾¢¡¢ 2-9 $\underline{F_1}, \underline{F_2}$ ±ýÛõ Å¢¨º¸Ç¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ¸û 20, 40¸¢.¸¢ ±É×õ «¨Å¸û ¦ºÂøÀÎõ §¸¡Î¸Ç¢ý ¾¢¨ºì ¸¢¼ì¨¸¸û Ó¨È $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ ±É×õ ¦¸¡Îì¸ôÀð¼ûÇÉ. «ùÅ¢¨º¸û P(2,2,3)Á¦, Q(0,-3,1)Á¦ ±ýÛõ

Òû Ç¢¸Ç¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºøÅ¾¡É¡ø, ÐÅì¸ôÒû Ç¢ ÀüÈ¢, Å¢¨º¸Ç¢ý ¾¢Õôò ¾¢Èý¸Ç¢ý Ü Î¾¨Äì ¸¡ñ¸.

$\underline{F_1}, \underline{F_2}$ ±ýÀ¨Å ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¸Ç¢ý µÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çì ÌÈ¢ìÌ ¦ÀýÈø.

$$\underline{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j} + \frac{1}{2}\underline{k}$$

$$\underline{a_2} = \frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j} + 0\underline{k}$$

±É§Å $\underline{F_1} = F_1 \underline{a_1}$

$$= 20\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j} + \frac{1}{2}\underline{k}\right)$$

$$= 10\sqrt{2}\underline{i} - 10\underline{j} + 10\underline{k}$$ ¸¢.¸¢.

$$\underline{F_2} = F_2 \underline{a_2}$$

$$= 40\left(\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j} + 0\underline{k}\right)$$

$$= \left(24\underline{i} + 32\underline{j}\right)$$ ¸¢.¸¢.

P (2,2,3) Q(0,-3,1) ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ç¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç

$$\underline{r_1} = \underline{OP} = 2\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$$

$\underline{r_2} = 0\underline{i} - 3\underline{j} + \underline{k}$ ±É ì¦¸¡û¸

±É§Å O ÀüÈ¢ $\underline{F_1}, \underline{F_2}$ ±ý Ûõ Å¢¨º¸Ù¨¼Â ¾¢Õôò ¾¢Èý¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Ü Î¾ø.

$$= \underline{r_1} \wedge \underline{F_1} + \underline{r_2} \wedge \underline{F_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 10\sqrt{2} & -10 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -3 & 1 \\ 24 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{50\underline{i} - \left(20 - 30\sqrt{2}\right)\underline{j} + \left(20 + 20\sqrt{2}\right)\underline{k}\right\} + \left\{-32\underline{i} + 24\underline{j} + 72\underline{k}\right\}$$

$= (18\underline{i} + 46.42\underline{j} + 23.72\underline{k})$ Á¢.¸¢.¸¢.

Á¡¾¢¡¢ 2-10 $\underline{F} = 6\underline{i} + 3\underline{j} + 10\underline{k}$ ±ý Ûõ Å¢¨º, A(0,2,3) ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ ¸¢ÈÐ.B(2,-3,0) ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø ºÁÛõ ±¾¢ÕÁ¡É $-\underline{F}$ ±ý Ûõ Å¢¨º ¦ºÂøÀÎ ¸¢ÈÐ. «ùÅ¢¨º¸Ç¢ý ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò ¾¢Èý Â¡Ð? «Ð ¦ºÂüÀÎõ §¸¡ðÊý ¾¢¨ºÌ ¸¢¼Ì ¨ ¸ ¸ ¨ ÇÔõ ¸¡ ñ ¸.

A(0,2,3) B(2,-3,0)±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ç¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Ç $\underline{r_1}, \underline{r_2}$ ±É Ì ¦ ¸¡û ¸ «ô¦À¡ØÐ.

$\underline{¤} = \underline{BA} = \underline{OA} - \underline{OB}$

$$= (0\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}) - (2\underline{i} - 3\underline{j} + 0\underline{k})$$

$= -2\underline{i} + 5\underline{j} + 3\underline{k}$

±É§Å $\underline{C} = \underline{BA} - \underline{F}$

$= \underline{¤} \wedge \underline{F}$

$$= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$= 41\underline{i} + 38\underline{j} - 36\underline{k}$

Á¡¾¢¡¢ 2-11. Óó¾¢Â ¸ ½ì ¸¢ø («¾¡ÅÐ Á¡¾¢¡¢ 2-10ø,

(i) x «î ÍÀüÈ¢ ÍÆÄ¢¨ ½Â¢ý ¾¢ÕôÒ¾¢Èý Â¡Ð?

(ii) Å¢¨º¸ Ù ì Ì þ ¨¼Â¢ÖûÇ ¦ºí Ì òÐò ¦¾¡ ¨Ä× Â¡Ð?

(iii) «ò¦¾¡ ¨Ä ¨Å 10 «Ä Ì ¸û Á¢Ì¾¢Â¡¸ þÕì ÌÁ¡Ú ±Î ò¾¡ø «§¾ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò ¾¢È¨ Éô ¦ÀÚÅ¾üÌ ¡¢Â Å¢¨º ´ ù¦Å¡ ýÈ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ Â¡Ð?

(i) $C_{OX} = \underline{C}.\underline{i} = (41\underline{i} + 38\underline{j} - 36\underline{k}).\underline{i} = 41$

(ii) $(\underline{F}, -\underline{F})$ ±ý Ûõ ÍÆÄ¢¨ ½ ì Ì þ ¨¼ÂÄ¡Éõ ¦ºí Ì òÐ ¦¾¡ ¨Ä× d ±É Ì ¦ ¸¡û ¸ «ô¦À¡ØÐ.

$|\underline{C}| = |\underline{F}| d$ ¬ Ìõ.

$$\left\{(41)^2+(38)^2+(-36)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{(6)^2(3)^2(10)^2\right\}^{\frac{1}{2}}d$$

d= 5.54 «Ä Ì¸û.

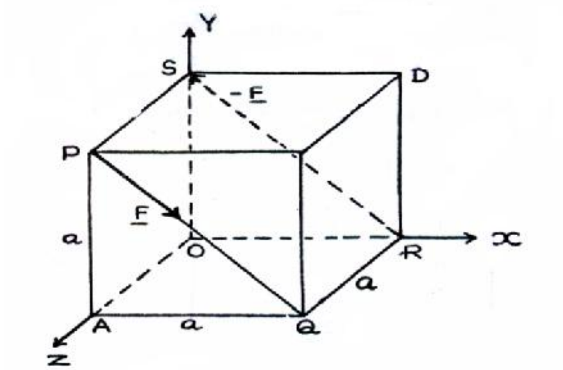
(iii) þò¦¾¡¨Ä¨Å 5.54 + 10 = 15.54 ±É ÁÌ¾ôÀÎò¾,

$$|\underline{F_1}|\times 15.54=|\underline{C}|$$

$$F_1=\frac{66.49}{15.54}=4.28$$

Á¡¾¡ 2-12. ´Õ¸É ºÐÃò¾ý þÕÓ¸í¸Çø ºÁÛõ ±¾ÕÁ¡É Å¨º¸û À¼õ 2-38ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂøÀÎ¸ýÈÉ.

a=6 $\left[10^{-2}\right]$ Û ±ýÚõ, = $\underline{F}$ 5 ¸.¸ ±ýÚõ ±Î ì Ìõ§À¡Ð.



À¼õ 2-38

ÍÆÄ¨ ½ôÒò ¾Èý Â¡Ð? AD ±ýÛõ ã¨ÄÅð¼õ ÀüÈ «îÍÆÄ¨ ½Âý ¾ÕôÒò¾Èý Â¡Ð?

¸ÉºÐÃò¾ý ÅÇõÒ¸Ç¡É OR,OS,OA ±ýÀ¨Å Ox,Oy,Oz ±ýÛõ «îÍ¸¨ளக் குறிக்¸ðÎõ «ô¦À¡ØÐ A,P,Q,S,D ¬¸Â ÒûÇ¸Çý «îÍ ¦¾¡¨Äவுகள் முறை§Â (0,0,a), (0,a,a), (a,0,a), (0,a,0), (a,a,0) ¬Ìõ.

¬¸§Å, $\underline{PQ}=\underline{OQ}-\underline{OP}$ =(a$\underline{i}$ +a$\underline{k}$)-(a$\underline{j}$ +a$\underline{k}$)=a$\underline{i}$ -a$\underline{j}$

$$=a\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}\right)$$

$$=a\sqrt{2}\,a_2,\ a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}i-\frac{1}{\sqrt{2}}j$$

$\underline{FQ}$ Åø «¨ÁÔõ µÃÄÌ ¾¨ºÂ¡Ìõ.

$\therefore \underline{F} = F\,\underline{a_1} = 5\left(\frac{\underline{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\underline{j}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{5}{\sqrt{2}}\underline{j}\right)$ ¸¢. ¸¢.

$\underline{SP} = \underline{OP} - \underline{OS} = \left(a\underline{j} + a\underline{k}\right) - a\underline{j} = a\underline{k}$

$(\underline{F}, -\underline{F})$ ± ý Û õ Í ÆÄ¢ ¨ ½ ì Ì ¯ ¡¢Â ¾¢Õôò ¾¢È ý

$\underline{C} = \underline{SP} \wedge \underline{F}$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & a \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{5a}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{5a}{\sqrt{2}}\underline{j}$$

$$= \frac{5 \times 6}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{5 \times 6}{\sqrt{2}}\underline{j}$$

$$\therefore \underline{C} = 15\sqrt{2}\left(\underline{i} + \underline{j}\right)$$

$\underline{AD} = \underline{OD} - \underline{OA}$

$= \left(a\underline{i} + a\underline{j}\right) - (a\underline{k})$

$= a\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}\right)$

$= 6\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}\right) = 6\sqrt{3}\,\underline{a_2}$ $\quad \underline{a_2}$ ± ý ÀÐ $\underline{AD}$ Â¢ø « ¨ ÁÔõ µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ Ì õ.

AD ± ý Û õ §¿÷§¸ ¡ Î ÀüÈ¢ Í ÆÄ¢ ¨ ½ Â¢ ý ¾¢Õôò¾¢È ý

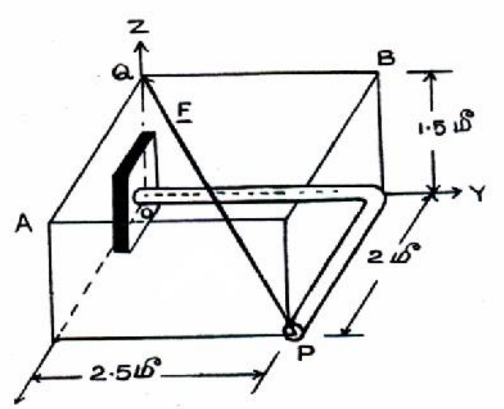
$= \underline{C} \cdot \underline{a_2}$

$$=15\sqrt{2}\left(\underline{i}+\underline{j}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}\right)$$

$$=10\sqrt{6}$$

= 24.5 $\left[10^{-2}\right]$ wg . ¸¢. ¸¢.

Á¡¾¢¡¢ 2-13. ´Õ Å¨Ç× Ì Æ¡ö ÑÉ¢ ´ ýÈ¢ø À¼õ 2-39ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú $50\sqrt{2}$ ¸¢.¸¢ Å¢¨ºÂ¡ ÉÐ ¦ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ.



À¼õ 2-39

(a) x,y,z

(b) A ±ý Ûõ Ò û Ç¢

(c) B ±ý Ûõ Ò û Ç¢

¬ ¸¢Â ¨ Å ÀüÈ¢, Å¢ ¨ ºÂ¢ ý ¾¢ÕôÒ¾¢È ¨ É ì ¸ ¡ ñ ¸ .

O ±ý Ûõ Òû Ç¢ì Ì ¯¡¢Â Í ð¼ ¨ ÁôÀ¢ø P,Q,A,B ¬ ¸¢Â Òû Ç¢ ¸ Ç¢ ý ¬ Âò ¦¾¡ ¨ Ä ¸ û Ó ¨ È§Â P (2,2.5,0) Q(0,0,1.5) A(2,0,1.5)B(0,2.5,1.5) ¬ Ì õ.

PQ ±ý È §¿÷§¸¡ðÊÄ ¨ ÁÔõ µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â $\underline{a}$ ±É ì Ì È¢ì ¸ ×õ.

$$\underline{PQ}=\underline{OQ}-\underline{OP} \quad =-2\underline{i}-2.5\underline{j}+1.5\underline{k}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{2}}\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5}\underline{i}-\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}\underline{j}+\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}\underline{k}\right]$$

$$=\frac{5}{\sqrt{2}}\underline{a}$$

$$\therefore \underline{a}=\frac{1}{5\sqrt{2}}\left[-4\underline{i}-5\underline{j}+3\underline{k}\right]$$

$\underline{F}$ ±ý È Å¢ ¨ º PQÅ¢ø ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ ø

$\underline{F} = F\,\underline{a}$

$$= 50\sqrt{2} \times \frac{1}{5\sqrt{2}} \left[-4\underline{i} - 5\underline{j} + 3\underline{k}\right]$$

$$= -40\underline{i} - 50\underline{j} + 30\underline{k}$$

(a) $\underline{F}$ ±ýÈ Å¢¨º QÅ¢ø ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î , O ±ýÈ ÒûÇ¢ ÀüÈ¢ «¾ý ¾¢ÕôÒ¾¢Èý .

$\underline{M_0} = \underline{OQ} \wedge \underline{F}$

$$= \frac{3}{2}\underline{k} \wedge \left(-40\underline{i} - 50\underline{j} + 30\underline{k}\right)$$

$$= -60\underline{j} - 75\underline{i}$$

$= \left(75\underline{i} - 60\underline{j} + 0\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢ Á¦ð¼÷ ¬ Ì õ.

$\therefore M_x = 75$ ¸¢.¸¢. Á¦ð¼÷ $M_y = -60$ ¸¢.¸¢. Á¦ð¼÷ $M_z = 0$ ¸¢.¸¢. Á¦ð¼÷

(b) $\underline{M_A} = \underline{AQ} \wedge \underline{F}$

$$= -2\underline{i} \wedge \left(-40\underline{i} - 50\underline{j} + 30\underline{k}\right)$$

$$= 100\underline{k} + 60\underline{j}$$

$= \left(60\underline{j} + 100\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢. Á¦ð¼÷

(c) $\underline{M_B} = \underline{BQ} \wedge \underline{F}$

$$= \left(-2.5\underline{j}\right) \wedge \left(-40\underline{i} - 50\underline{j} + 30\underline{k}\right)$$

$$= -100\underline{k} - 75\underline{i}$$

$$= -25\left(3\underline{i} + 4\underline{k}\right)$$

Á¡¾¢¡¢ 2-14. XOY ¾Çò¾¢ø (2,1)Á¦ ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢ø $\left(5\underline{i} + 5\underline{j}\right)$ ¸¢.¸¢ Å¢¨º ¦ºÂüÀ Î ¸¢ÈÐ. O ±ý Û õ ÐÅ ì ¸ôÒûÇ¢ ÀüÈ¢ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒ¾¢È¨ É ¸ ¡ ñ ¸.
Ó¾ø ÅÆ¢:
P ±ý Û õ ÒûÇ¢ (2,1) ¨Â ì Ì È¢ôÀ¾¡ ¸¢ø

$\underline{r} = \underline{OP} = 2\underline{i} + \underline{j}$ ¬ Ì õ.

$\underline{F} = 5\underline{i} + 5\underline{j}$

$\therefore \underline{M_0} = \underline{r} \wedge \underline{F}$

$$= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$= 5\underline{k}$ ¬ Ì õ.

þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÅÆ¢:

Å¢ ¨ º $\underline{F}$ ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø $\underline{ª}$ ± ý ÀÐ µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â ì Ì È¢ì ¸ ð Î õ.

$\therefore \underline{F} = 5\underline{i} + 5\underline{j} = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}\right)$

$= 5\sqrt{2}\,\underline{ª}$

$\underline{F}$ ¦ºÂüÀ Î õ §¸ ¡ Î x « îº¼ý ¯ ± ý Û õ §¸ ¡ ½ ò ¨ ¾ « ¨ ÁôÀ¾¡ ¸¢ø

$\cos\text{¯} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\text{¯} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \tan\text{¯} = 1 = \tan\frac{\text{®}}{4}$

« øÄÐ $\text{¯} = \frac{\text{®}}{4}$

±É§Å $\underline{F}$ ¦ºÂüÀ Î õ §¸ ¡ðÊø º¡¢× 1 ¬ Ì õ. « ì§¸ ¡ðÊ ý ºÁ ýÀ¡ Î

y-1 =1(x-2)

« ¾¡ÅÐ x-y-1=0.

P ± ýÀÐ O Å¢Ä¢ÕóÐ x-y-1=0 ± ý Û õ §¿÷§¸ ¡ðÊü Ì Å ¨ ÃÂôÀ Î õ ¦º í Ì òÐ ì §¸ ¡ðÊ ý ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å ì Ì È¢ì Ì Á¡ É ¡ø.

$p = -\left(\frac{-1}{\sqrt{1+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ó ì ¸¢Âò ¾¢ ¨ ºÂ¢ ì ¸ ½¢Â í ¸ û

$\therefore \left|\underline{M_0}\right| = \left|\underline{F}\right| p$

$$= 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

= 5 ¸¢.¸¢.Á¦.

ÅÄôÒÈ Ó¨ÈôÀÊ (right handed system) $\underline{M_0}$ ±ýÀÐ $\underline{k}$ ±ýÛõ µÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢ý §À¡ì¸¢ø ¦ºÂüÀÎ¸¢È

ã ýÈ¡ÅÐ ÅÆ¢

Å¡¡¢ìÉÉ¢ý §¾üÈò¨¾ (varignon's theorem)ô À¢ýÀüÈ¢ 5$\underline{i}$ ¸¢.¸¢, 5$\underline{j}$ ¸¢.¸¢, ±ýÈ Å¢¨º¸û (2,1) Á¦. ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡ø O ±ýÛõ ÐÅì¸ôÒûÇ¢ ÀüÈ¢ Å¢¨º¸Ù¨¼Â ¾¢ÕôÒ ¾¢Èý¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ

$$\left|\underline{M_0}\right| = (-)1\times 5 + (+)2\times 5$$

=5 ¸¢.¸¢.Á¦.

þíÌ (+),(-) ±ýÈ ÌÈ¢¸û þ¼ôÒÈ ÅÄôÒÈî ÍÆü º¢¸¨Ç Ó¨È§Â «È¢Å¢ì¸¢ýÈÉ. §ÁÖõ þ¨Å¸û $\underline{k} = \underline{i} \wedge \underline{j}$ ±ýÛõ ¸ÕòÐìÌ þ½ì¸Á¡¸ ¯ûÇÉ.

¬¸§Å ;$\underline{M_0} = 5\underline{k}$ ¸¢.¸¢. Á¦.

¿¡ý¸¡ÅÐ ÅÆ¢

Å¨ÃÀ¼ò¾¡Ç¢ø ¾Ìó¾ «ÄÌ§¸¡Ä¢ø ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢, Å¢¨º ¬¸¢ÂÅü¨È Å¨ÃÂÚòÐ, «¨Å¸Ç¡ø ¾¢÷Á¡É¢ì¸ôÀÎõ þ¨½¸Ãò¾¢ý ÀÃôÀÇ¨Å «¾¢Ä¼í¸¢Â ºÐÃì ¸ð¼í¸Ç¢ý ± ñ ½¢ì¨¸Â¡ø «È¢ÂÄ¡õ «Ð§Å ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÉ¢ý ± ñ Á¾¢ôÀ¡Ìõ.

Á¡¾¢¡¢ 2-15

$\left(12\underline{i} + 4\underline{j} + 3\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢ Å¢¨º ´ýÚ(3,4,0) Á¦. «îÍò ¦¾¡¨Ä×¸¨Çô ¦ÀüÈ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢È¨É (a) ÐÅì¸ôÒûÇ¢ ÀüÈ¢ (b) ¬Âò¦¾¡¨Ä «îº¸û ÀüÈ¢ (c) (0,0,0) (1,1,1) ±ýÛõ þ¼ò¾¢¨ÄÔõ ÒûÇ¢¸¨Çî §º÷òÐ ¯ñ¼¡Ìõ §¿÷§¸¡Î ÀüÈ¢ (d) (0,0,5) (5,0,0) ±ýÛõ þ¼ò¾¢¨ÄÔõ ÒûÇ¢¸¨Çî §º÷ì Ìõ §¿÷§¸¡Î ÀüÈ¢ì ¸¡ ñ ¸.

P ±ýÛõ ÒûÇ¢ (3,4,0) ±ýÈ þ¼ò¾¢¨ÄÔ¦ÁýÈ¡ø «¾ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢

$$\underline{r} = \underline{OP} = 3\underline{i} + 4\underline{j} + 0\underline{k}$$

$\underline{F} = 12\underline{i} + 4\underline{j} + 3\underline{k}$

(a) $\therefore \underline{M_0} = \underline{r} \wedge \underline{F}$

$$= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 12 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$= \left(12\underline{i} - 9\underline{j} - 36\underline{k}\right)$ Á¦. ¸ ¢. ¸ ¢.

(b) $M_x = \underline{M_0}.\underline{i} = \left(12\underline{i} - 9\underline{j} - 36\underline{k}\right).\underline{i} = 12$ Á¦. ¸ ¢. ¸ ¢.

$M_y = \underline{M_0}.\underline{j} = \left(12\underline{i} - 9\underline{j} - 36\underline{k}\right).\underline{j} = -9$ Á¦. ¸ ¢. ¸ ¢.

$M_z = \underline{M_0}.\underline{k} = \left(12\underline{i} - 9\underline{j} - 36\underline{k}\right).\underline{k} = -36$ Á¦. ¸ ¢. ¸ ¢.

(c) (1,1,1) ± ý È þ¼ò¾¢Ä ¨ ÁÔõ Òû Ç¢ A ± ý Èø,

$\underline{OA} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$

$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}\right)$

$= \sqrt{3}\underline{¤_1}, \underline{¤_1}$ ± ÉÀÐ $\underline{OA}$ Â¢ø « ¨ ÁÔõ µÃÄ Ì ò¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ Ì õ.

$\therefore M_{OA} = \underline{M_0}.\underline{¤_1}$

$= \left(12\underline{i} - 9\underline{j} - 36\underline{k}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}\right)$

$= \frac{12 - 9 - 36}{\sqrt{3}} = -11\sqrt{3}$ Á¦. ¸ ¢. ¸ ¢.

(d) B,C ± ý È Òû Ç¢ ¸ û (0,0,5)(5,0,0) ± ý Û Á¢¼ í ¸ ¨ Ç ì Ì È¢ôÀ¾¡Â¢ ý ,

$\underline{OB} = 5\underline{k}$

$\underline{OP} = 3\underline{i} + 4\underline{j} + 0\underline{k}$

$\underline{BP} = \underline{OP} - \underline{OB}$

$= 3\underline{i} + 4\underline{j} - 5\underline{k}$

$\underline{BC} = \underline{OC} - \underline{OB}$

$= 5\underline{i} - 5\underline{k}$

$= 5\sqrt{2}\left(\frac{\underline{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\underline{j}}{\sqrt{2}}\right)$

$= 5\sqrt{2}\,\underline{¤_2}$, $\underline{¤_2}$ ± ý ÀÐ $\underline{BC}$ Â¢ø « ¨ ÁÔõ µÃÄ Ì ò ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ Ì õ.

$\therefore M_{BC} = \underline{M_B} . \underline{¤_2}$

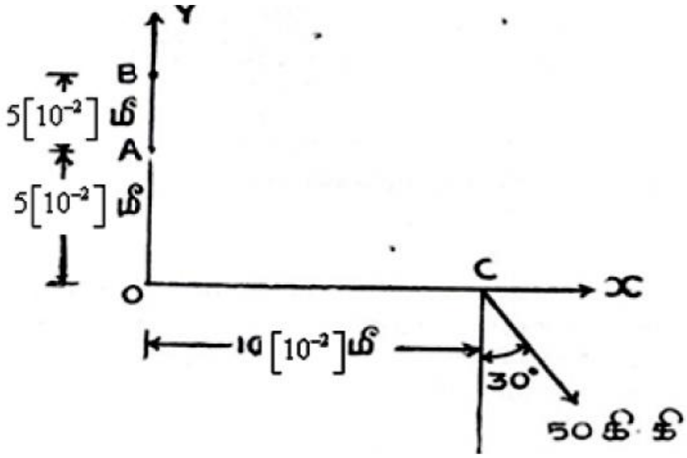
$= \underline{BP} \wedge \underline{F} . \underline{¤_2}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 12 & 4 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$= 34\sqrt{2}$ Á¢. ¸¢. ¸¢.

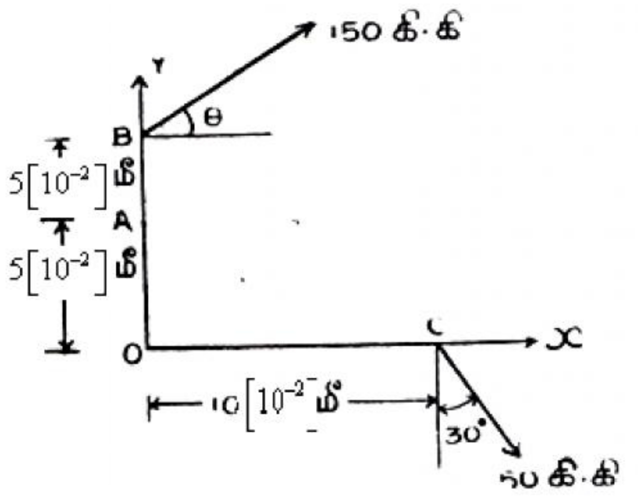
ÀÂ¢üº¢

2.1 50¸¢.¸¢ Å¢¨º, ¾ð Î ´ýÈ¢ý ã¨ÄÂ¢ø À¼õ 2-40ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂüÀ Î ¸¢ÈÐ.
«ùÅ¢¨ºì Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡É Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½ «¨Áô¨À A ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢ø Å¨ÃÂÚ ì ¸.
(Å¢¨¼ AÂ¢ø $25\underline{i}-25\sqrt{3}\underline{j}$ ¸¢.¸¢ «Ç×ûÇ Å¢¨ºÔõ $M_A=-308\underline{k}$,¦º.Á¢.¸¢.¸¢ ±ý Û õ¾¢ÕôÒò ¾¢È¨ ÉÔ ¦ÀüÈ ´Õ ÍÆÄ¢¨ ½Ôõ ¦ºÂüÀ Î õ.



À¼õ 2-40

2.2 «ùÅ¡§È 150 ¸¢.¸¢ Å¢¨º ´ýÚ À¼õ 2-17ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú B ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢Öõ Áü¦È¡Õ Å¢¨º AÂ¢Öõ ¦ºÂüÀ Î ¸¢È¦¾ý È¡ø Å¢¨ºì Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡É «¨Áô¨ÀÔõ Å¨ÃÂÚ ì ¸



À¼õ 2-41

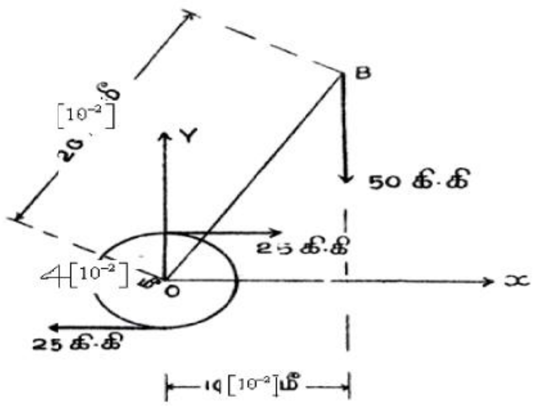
(Å¢¨¼ $(i)^{-}=46.8^{\circ}$ ±ýÚ þÕì Ì õ§À¡Ð
AÂ¢ø ¦¾¡Ì ÀÂý Å¢¨º $\left(-176\underline{i}-132.65\underline{j}\right)$ ¸¢.¸¢

(ii) $^{-} = 46.8^{\circ}$ ± ý Ú þÕì Ì õ§À¡Ð

AÂ¢ø ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢¨ º , $\left(-76.6\underline{i} - 66.05\underline{j}\right)$ ¸¢.¸¢

2.3 À¼õ 2-42ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦¿õÒ§¸¡ø ´ ýÈ¢ø ¦ºÂøÀÎ õ ÍÆÄ¢¨ ½ , Å¢¨ º ¬¸¢Â ¨ Å ¸ Ùì Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡É ´ü¨ÈÅ¢¨ º ¨ Âì ¸¡ ñ ¸. «ùÅ¢¨ º ¦¿õÒ§¸¡Ä¢ø ¾¡ì Ì õ ÒûÇ¢ì Ì õ þÕ Íì Ì õ(shaft)¯ûÇ þ ¨ ¼ò ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å ì ¸¡ ñ ¸.

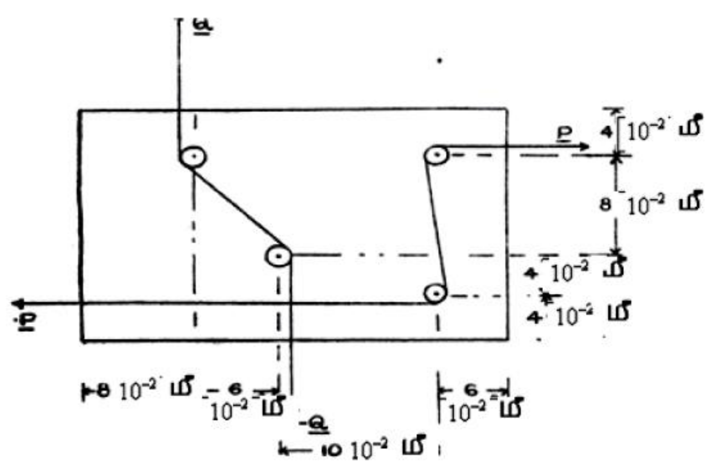
(Å¢ ¨ ¼ , $-50\underline{j}$ ¸¢.¸¢, 28 $\left[10^{-2}\right]$Á¢



À¼õ 2-42

2.4 ¿¡ý Ì ÁÆÁÆôÀ¡É Ó ¨ É ¸û ´ Õ ÀÄ ¨ ¸Â¢ø À¼õ 2.43ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦À¡Õò¾ôÀð Î ûÇÉ. þÃ ñ Î ¸Â¢Ú¸û Ó ¨ É ¸ ¨ Çî ÍüÈ¢ÂÅ¡Ú « ¨ ÁóÐ P=8 ¸¢.¸¢, Q=20 ¸¢.¸¢, ± ý Û õ Å¢ ¨ º¸Ç¡ø þØì¸ôÀÎ ¸¢ýÈÉ. ÀÄ ¨ ¸Â¢ø «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò ¾¢Èý 150 ¸¢.¸¢ $\left[10^{-2}\right]$ Á¢ ± ýÈ¢Õì Ì ¦Á ýÈ¡ø Ó ¨ É ¸Ç¢ý Å¢ð¼ò¾¢ý ¿¢Çò ¨ ¾ì ¸¡ ñ ¸.

(Å¢ ¨ ¼3$\left[10^{-2}\right]$Á¢)



À¼õ 2-43

2.5 10¸ï.¸ï Åï¨º ´ýÚ Å¨Çó¾ ¾Çò¾ïø À¼õ 2.44ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂøÀÎ ¸ïÈÐ. «¨¾î ºÁôÀÎ òÐõ, Åï¨º ÍÆÄï¨ ½ «¨Áô¨À (a) A ±ý Ûõ ÒûÇïÂïÖõ

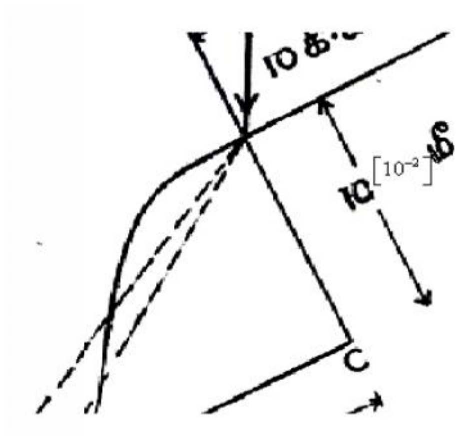
(b)B ±ý Ûõ ÒûÇïÂïÖõ Å¨ÃÂÚì¸.

(Åï¨¼ A Âïø $\underline{F} = -5\underline{i} - 5\sqrt{3}\,\underline{j}$ ¸ï.¸ï Åï¨º

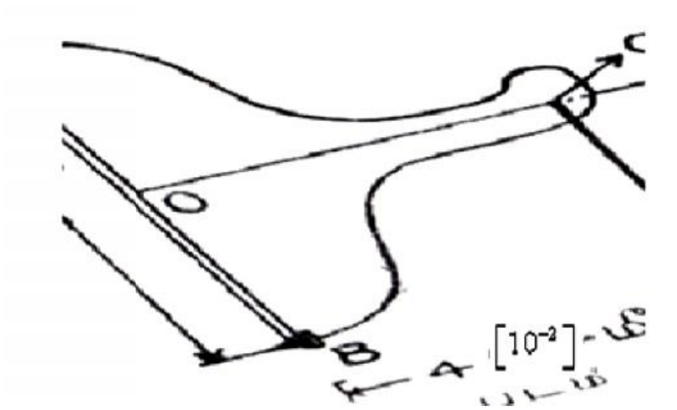
$\underline{C_A} = -123.2\underline{k}$ $\left[10^{-2}\right]$Áï,¸ï.¸ï

(b)B Âïø $\underline{F} = -5\underline{i} - 5\sqrt{3}\,\underline{j}$

$$\underline{C_B} = -79.9\underline{k}$$



À¼õ 2-44



À¼õ 2-45

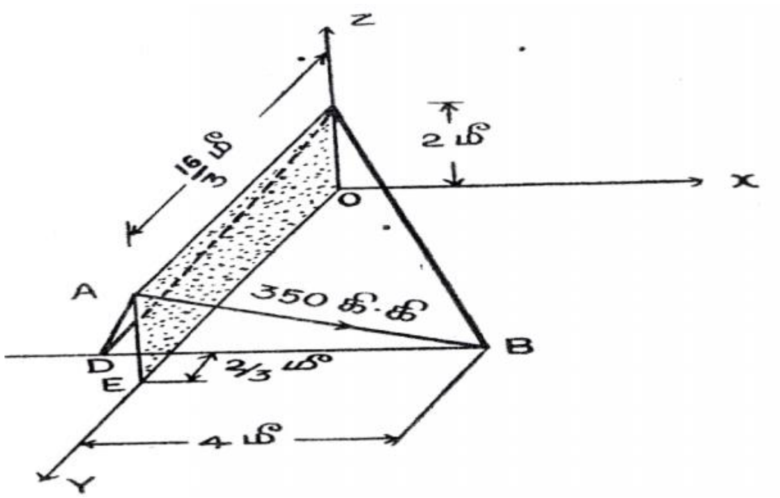
2.6 À¼õ 2.45ø ¦¸¡ì¸ï (hook) ´ýÚ A,B ±ý Ûõ ÒûÇï¸Çïø ¦À¡Õò¾ôÀð Î ¯ûÇÐ. (a) CÂïø ¦ºÂøÀÎõ 25 ¸ï.¸ï ÀÙ×ì Ìî º¡ï¿ï¸Ã¡É "Åï¨º ÍÆÄï¨ ½" «¨Áô¨À B ±ý Ûõ ÒûÇïÂïø Å¨ÃÂÚì¸. (b)ÀÌ¾ï (a) Âïø «¨ÁÔõ

ÍÆÄ¢¨½ôÒò ¾¢ÈÛìÌî º¡¢¿¢¸Ã¡É ÍÆÄ¢¨½¨Â A,B ±ýÛõ ÒûÇ¢¸Ç¢ø ¸¢¨¼Â¡¸î ¦ºÂüÀÎõ þÕ ºÁÛ¦Á¾¢ÕÁ¡É Å¢¨º¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸.

(விடை, $(a)\underline{F} = -25\underline{j}$ கி.கி, $C_B = -100\underline{k}$ கி.கி$[10^{-2}]$மீ

$(b)\underline{F_1} = -16.67\underline{i}$ கி.கி

2.7 þÕõÒì ¸õÀ¢¸û, º¢¦Á ñ Îì ¸Ä¨Å ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý Å¡÷ôÒ ¦ºöÂôÀð¼ ÍÅ÷ôÀÌ¾¢ À¼õ 2.46ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ÅÖÅ¡É ¸õÀ¢¸Ç¡ø ¸ð¼ôÀð Î º¡¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅìÌôÀð Î ûÇÐ. A,B ±ýÛõ ¸õÀ¢Â¢ø 350 ¸¢.¸¢ ¯ûÇ þØÅ¢¨º ´ýÚ ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ ±ýÈ¡ø «¾üÌî º¡¢¿¢¸Ã¡É Å¢¨º ÍÆÄ¢¨½ «¨Áô¨À (a) 0 ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢Öõ (b)E ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢Öõ ¸¡ñ¸.



À¼õ 2-46

(Å¢¨¼ (a) o Å¢ø $\underline{F} = \left(300\underline{i} - 100\underline{j} - 150\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢

$\underline{M_0} = \left(-600\underline{i} - 1600\underline{j} + 600\underline{k}\right)$.Á¡, ¸¢.¸¢

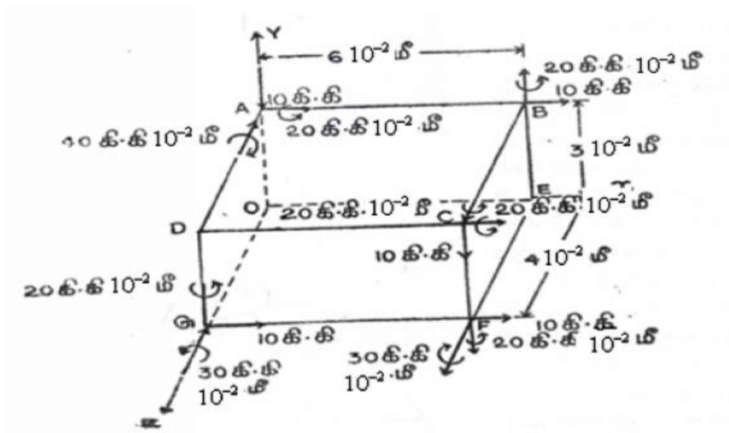
(b) EÂ¢ø $\underline{F} = \left(300\underline{i} - 100\underline{j} - 150\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢

$\underline{M_E} = \left(200\underline{i} + 600\underline{j}\right)$.Á¡, ¸¢.¸¢

2.8 ´Õ ¦ºùÅ¸ô ¦ÀðÊÂ¢ø ³óÐ ¾É¢ò¾ Å¢¨º ÍÆÄ¢¨½ ¦¾¡Ì¾¢¸û À¼õ 2.47ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈÉ. (a) «¨Å¸Ç¢ø ±ùÅ¢Õ ¦¾¡Ì¾¢¸û º¡¢¿¢¸Ã¡¸ ¯ûÇÉ ±Éì ¸¡ñ¸ (b) «¨Å¸Ç¢ø ±ò¦¾¡Ì¾¢ 0Å¢ø $\underline{F} = 5\underline{j}, \underline{M_0} = 60\underline{i} - 60\underline{k}$ ±ýÛõ Å¢¨º ÍÆÄ¢¨½ ¦¾¡Ì¾¢ìÌî º¡¢¿¢¸Ã¡¸ «¨ÁÔõ?

(Å¢¨¼ (a)B,G ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ç¢ø «¨ÁÔõ Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½ò ¦¾¡Ì¾¢¸û º¡¢¿¢¸Ã¡É ¨Å.

(a) C ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø «¨ÁÔõ Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½)



À¼õ 2-47

2.9 À¼õ 2.48ø A ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½ ¦¾¡Ì¾¢Â¢ø Å¢¨º, ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò ¾¢Èý ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ¸û Ó¨È§Â $|\underline{F}| = 12.5$ ¸¢.¸¢ ,

$|\underline{M_A}| = 250$ ¸¢.¸¢ 10^{-2}.Á¢ ±É¢ø «¾ü Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡É Å¢¨º ÍÆÄ¢¨ ½ò ¦¾¡Ì¾¢¨Â

(i)D ±ý Ûõ ÒûÇ¢

(ii) E ±ý Ûõ ÒûÇ¢

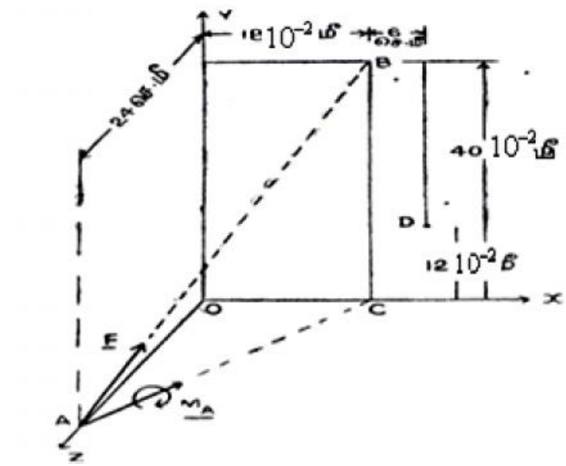
¬¸¢ÂÅüÈ¢ø ¸¡ ñ ¸

(Å¢¨¼ (i) $\underline{F} = \left(4.5\underline{i} + 10\underline{j} - 6\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢

$\underline{M_D} = \left(-18\underline{i} - 36\underline{j} - 386\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢. 10^{-2}Á¢)

(ii) $\underline{F} = \left(4.5\underline{i} + 10\underline{j} - 6\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢

$\underline{M_E} = \left(150\underline{i} + 108\underline{j} - 20\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢. 10^{-2}Á¢

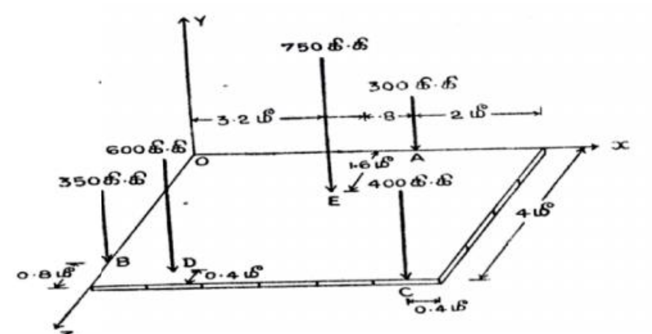


À¼õ 2-48

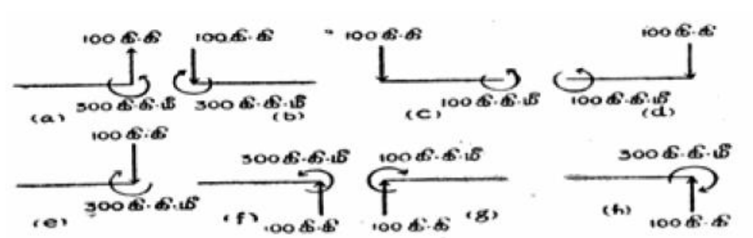
2.10 4Á¦ X6Á¦ «Ç×ûÇ ¸¡ý¸¦¡¦ð ¾Çõ ´ýÚ(concrete slab) À¼õ 2-49ø («Îò¾ Àì¸õ ¸¡ñ¸)¸¡ðÊÂÅ¡Ú 5 àñ¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸¨Çò ¾¡í Ì¸¢ÈÐ. þ¨Å¸Ùì ÌÎ º¡¢¿¢¸Ã¡¸ «¨ÁÔõ ´ü¨È Å¢¨ºÂ¢ý ¦ºÂøÀÎõ ÒûÇ¢ ±ñ Á¾¢ôÒ ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ R = 2400 ¸¢.¸¢ ↓±ýÛõ ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º (2.732, 0,2.532) Á¦ ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ.

2.11 4Á¦ð¼÷ ¿¦ÇÓûÇ ¯ò¾Ãõ (beam)´ýÈ¢ø À¼õ 2.50ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦Åù§ÅÈ¡É ÅÆ¢¸Ç¢ø Å¢¨º ´ýÚõ ¾¢Õôô¾¢Èý ´ýÚõ ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈÉ. «ÅüÈ¢ø ±ùÅ¢Õ «¨ÁôÒ¸û º¡¢¿¢¸Ã¡É¨Å ±Éì ¸¡ñ¸.



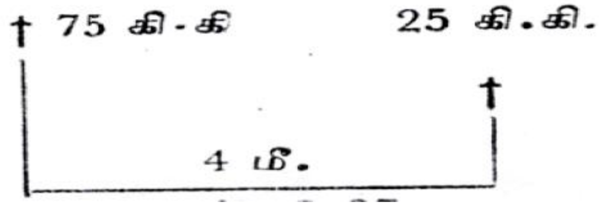
À¼õ 2-49



À¼õ 2-50

(Å¢¨¼ (b) (d) « ¨ÁôÒ¸û º¡¢¿¢¸Ã¡É ¨Å)

2-12 4Á¦ð¼÷ ¿¦ÇÓûÇ ¯ò¾¢Ãõ ´ýÈ¢ø À¼õ 2.51ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¢¨º¸û ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈÉ. 2.11¬ ÅÐ ¸½ì¸¢ø ¦¸¡Îì¸ôÀð Îû Ç « ¨ÁôÒ¸Ç¢ø



À¼õ 2-51

±Ð þ í Ì ¦¸¡Îì¸ôÀð Îû Ç Å¢¨º¸ Ù ì Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡¸ ¯ûÇÐ ±É ì ¸¡ ñ ¸.

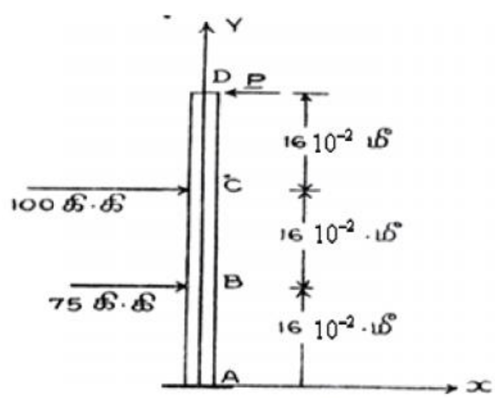
(Å¢¨¼ (h) « ¨ÁôÒ)

2.13 þÂó¾¢Ãõ ´ýÈ¢ý ¨¸ôÀ¢ÊÂ¢ø À¼õ 2.52ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈÉ. «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂ¨ ÉÔõ ,«Ð ¦ºÂüÀÎõ ÒûÇ¢¨ÂÔõ p ±ý Ûõ Å¢¨ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ (a) P=25 ¸¢.¸¢ (b) P=250 ¸¢.¸¢ (C)P=175¸¢.¸¢ ±ýÚ ¯ûÇ§À¡Ð ¸¡ ñ ¸

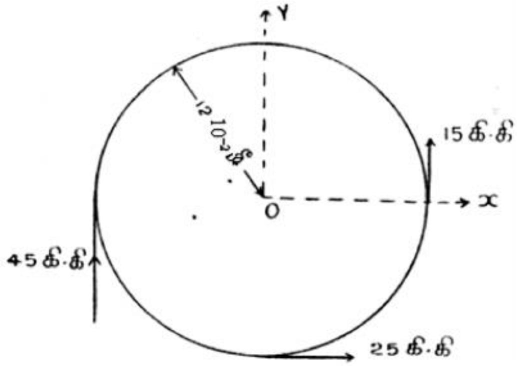
Å¢¨¼ (a) 37.32 $\left[10^{-2}\right]$Á¦

(b) -285.32 $\left[10^{-2}\right]$Á¦

(c) ∞



À¼õ 2-52



À¼õ 2-53

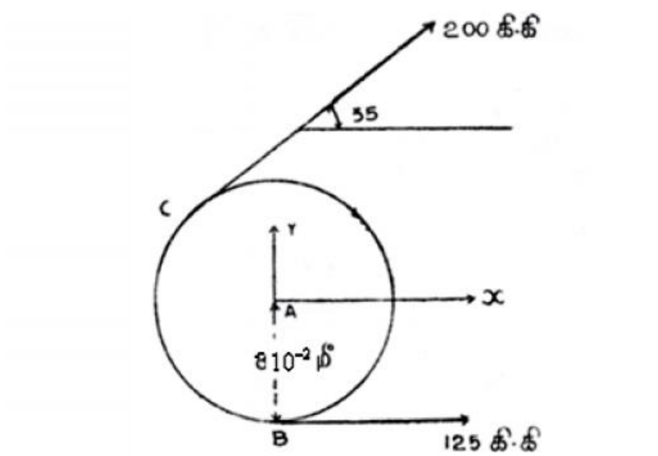
´Õ Ð¨½ô¦À¡È¢ (gear) «¨ÁôÀ¢ø À¼õ 2-53ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎ¸¢ýÈÉ. «ÅüÈ¢ü Ì î º¡¢¿¢¸Ã¡É Å¢¨º ÍÆÄ¢¨½ «¨Áô¨À 0 ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢ø Å¨ÃÂÚ ì¸

(Å¢¨¼ $\underline{R} = \left(25\underline{i} + 60\underline{j}\right)$ ¸¢.¸¢

$\overset{R}{\underline{M_0}} = -60\underline{k}, \left|\overset{R}{M_0}\right| 60 \left[10^{-2}\right]$ Á¦.¸¢.¸¢

¯ =67.4°

2.14 À¼õ 2.54ø ¸¡ðÊÔûÇ §¾¡ø Àð¨¼ (belt) ´ýÈ¢ý þÕÒÈí¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ þØôÒ Å¢¨º¸Ù ì Ì î º¡¢ ¿¢¸Ã¡É Å¢¨º ÍÆÄ¢¨½ «¨Áô¨À A ±ý Û õ ÒûÇ¢Â¢ø Å¨ÃÂÚ ì¸



À¼õ 2-54

(Å¢¨¼: $\begin{bmatrix} \underline{R} = 309.32\underline{i} + 129.06\underline{j} \\ \overset{R}{\underline{M}_A} = -600\underline{k} \end{bmatrix}$

2.15. XY ¾Çò¾¦ø ã ý Ú Å¦¨º¸û À¦ý ÅÕÁ¡Ú « ¨Á¸¦ýÈÉ $10\angle 30^\circ$.,(1,0) ± ý Û õ ÒûÇ¦Â¦ø $10\angle -60^\circ, (0, -2)$ ± ý Û õ ÒûÇ¦Â¦ø $10\angle 120^\circ, (0, -4)$ ± ý Û õ ÒûÇ¦Â¦ø. (þ í Ì ô ÀÂ ý À Î ò¾ôÀð¼ « Ä Ì ¸ û Ó ¨È§Â ¿¦ ä ð¼ ý Á¦ð¼÷ ¸ û ¬ Ì õ)

(i) ÐÅ ì ¸ ô ÒûÇ¦ ÀüÈ¦ Å¦¨º¸Ç¦ý ¾¦ÕôÒò¾¦È ý ¸ ¨ Ç ì ¸ ¡ ñ ¸ .

(ii) (3,0)Á¦ ± ý Û Á¦¼ò¾¦Ä ¨ ÁÔõ ÒûÇ¦ ÀüÈ¦Ôõ ¾¦ÕôÒò ¾¦È ý ¸ ¨ Ç ì ¸ ¡ ñ ¸ .

Å¦ ¨ ¼ (i) $-5\underline{k}$ Á¦ð¼÷ -¿¦ ä ð¼ ý

(ii) $-20\underline{k}$ Á¦ð¼÷ -¿¦ ä ð¼ ý .)

2.16. 30¸¦.¸¦. Å¦ ¨ º ´ ý Ú (4,4,-2,5) Á¦ð¼÷ « î Í ò ¦¾¡ ¨ Ä× ¸ ¨ ÇÔ ¨ ¼Â ÒûÇ¦Â¦ý ÅÆ¦§Â ¦ºÂüÀ Î ¸¦ÈÐ. Å¦ ¨ º ¦ºÂüÀ Î õ §¸¡ðÊ(5,4.5-1.5) Á¦ð¼÷ ± ý Û õ Áü¦È¡Õ ÒûÇ¦Ôõ ¯ûÇÐ. (0.5,1,1.5) Á¦ð¼÷ « î Í ò ¦¾¡ ¨ Ä× ¸ ¨ ÇÔ ¨ ¼Â ÒûÇ¦ ÀüÈ¦ Å¦ ¨ ºò ¾¦ÕôÒò¾¦È ý ± ñ Á¾¦ô ¨ À ì ¸ ¡ ñ ¸ .

(Å¦ ¨ ¼ 182 Á¦ ¸¦.¸¦)

2.17. $\underline{F} = \left(12\underline{i} - 7\underline{j} + 8\underline{k}\right)$ ± ý Û õ Å¦ ¨ º(7,2,2) ± ý Û õ ÒûÇ¦ ÅÆ¦§Â ¦ºÂøÀ Î ¸¦ÈÐ ÐÅ ì ¸ ô ÒûÇ¦ O ÀüÈ¦ Å¦ ¨ ºÂ¦ý ¾¦ÕôÒò ¾¦È ¨ É ì ¸ ¡ ñ ¸ .

(Å¦ ¨ ¼: $30\underline{i} - 32\underline{j} - 73\underline{k}$)

2.18. (2.17) ø ¦ ¸ ¡ Î òÐ û Ç Å¦ ¨ ºÂ¦ý ¾¦ÕôÒò¾¦È ¨ É (4,-3,6) ± ý Û õ ÒûÇ¦ ÀüÈ¦ ì ¸ ¡ ñ ¸ .

(Å¦ ¨ ¼: $12\underline{i} - 72\underline{j} - 81\underline{k}$)

2.19. (2.17) ø ¦ ¸ ¡ Î òÐ û Ç Å¦ ¨ ºÂ¦ý ¾¦ÕôÒò¾¦È ¨ É

(i) ¬ Âò¦¾¡ ¨ Ä « î Í ì ¸ û.

(ii) ÐÅ ì ¸ ô ÒûÇ¦ O ÅÆ¦§Â ¦ºøÅÐõ (0.5,0.5.-0.707) ± ý À É Åü ¨ Èò ¾¦ ¨ º ì ¸¦¼ì ¨ ¸ Ç¡ ¸ ×õ ¦ ¸ ¡ ñ ¼ §¿÷§¸ ¡ Î . ¬ ¸¦Â ¨ Å ÀüÈ¦ ¸ ¡ ñ ¸ .

(Å¦ ¨ ¼ (i) $M_x = 30; M_y = -32, M_z = -73$

(ii) 50.611

(iii) -36.239

2.20. $\underline{F} = 6\underline{i} - 6\underline{j} + 10\underline{k}$ ±ý Ûõ Å¢¨º A(3,4,10) ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ ¸¢ÈÐ. Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢Õôòò¾¢È¨ É.

(i) ÐÅì ¸õ ÒûÇ¢

(ii) B(-4,-3,6) ±ý Ûõ ÒûÇ¢

(iii) ¬Âò ¦¾¡¨Ä «îÍì ¸û

(iv)(0.5,-0.707,0.5) ±ýÀÉÅü¨Èò ¾¢¨ºì ¸¢¼ì ¨¸Ç¡¸×õ ÐÅì ¸ô ÒûÇ¢ ÅÆ¢Â¡¸×õ ¦ºøÖõ §¿÷§¸¡Î,

(v) C (2,5,3) ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â (d) Â¢ø Å¨ÃÂÚì ¸ôÀð¼ §¿÷§¸¡ðÊü Ìþ¨½Â¡¸ «¨ÁÔõ §¿÷§¸¡Î-¬¸¢Â¨Å ÀüÈ¢ ¸¡ ñ ¸.

(Å¢¨¼(i) $100\underline{i} + 30\underline{j} - 42\underline{k}$

(ii) $94\underline{i} - 46\underline{j} - 84\underline{k}$

(iiii) $;M_x = 100; M_y = 30, M_z = -42$

(iv) 7.79

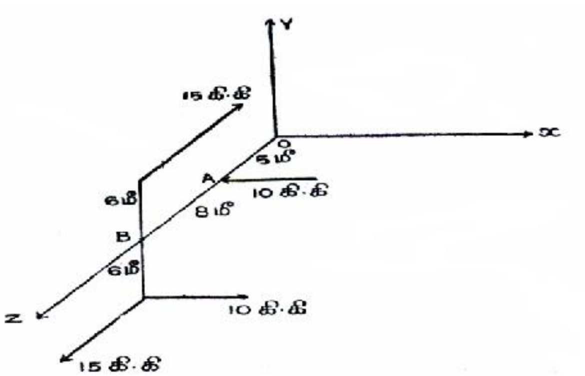
(v) -6.624)

2.21 $\underline{F}, F_1$ ±ý Ûõ Å¢¨º¸Ç¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ¸û ¦ºÂøÀÎõ ÒûÇ¢¸û, ¦ºÂøÀÎõ §¸¡Î¸Ç¢ý ¾¢¨ºì ¸¢¼ì ¨¸¸û ¬¸¢Â¨Å Ó¨È§Â 100,150, (4,5,6,)(3,1,-1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ ±ýÈø ÐÅì ¸ôÒûÇ¢ O ÀüÈ¢ Å¢¨º¸ Ù ¨¼Â ±ñ Á¾¢ôÒ¸û

(Å¢¨¼ $-554.2\underline{i} + 50\underline{j} - 57.2\underline{k}$)

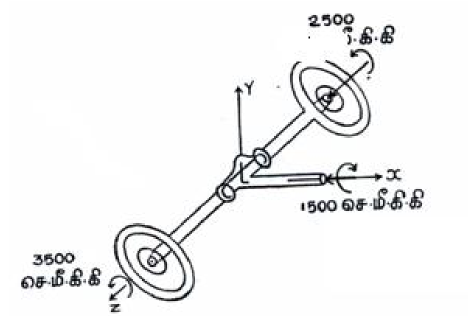
2.22. À¼õ 2.55ø «¨ÁóÐûÇ ÍÆÄ¢¨½¸Ç¢ý ¦¾¡ÌÀÂý ÍÆÄ¢¨½¨Â Å¨ÃÂÚòÐ «¾ý x,y,z À¸÷× ¸¨Çò ¾¢÷Á¡É¢ì¸ Å¢¨º¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢ý ¾¢Õôòò ¾¢È¨É Í ð¼¨Áôòô ÀûÇ¢ O ÀüÈ¢ ¸½¢òÐÎ º¡¢À¡÷ì¸×õ.

(Å¢¨¼ $-180\underline{i} + 80\underline{j} + 60\underline{k}$)



À¼õ 2.55

2.23. µ÷ ¯óÐÅ ñ ÊÂ¢ý « î Í ì ¸Ç¢ø (drive shafts) À¼õ 2.56ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ã ýÚ ÍÆÄ¢¨ ½ ¸û ¦ºÂüÀ Î ¸¢ýÈÉ. « ÅüÈ¢ü Ì î º¡¢¿¢ ¸Ã¡É ¦¾¡ Ì ÀÂ ý ÍÆÄ¢¨ ½ ò¾¢Õôò¾¢È¨ É Å ¨ ÃÂÚ ì ¸. « ¾ ý ± ñ Á¾¢ô¨ ÀÔõ « Ð x,y,z « î Í ¸Ç¢ø « ¨ Á ì Ì õ §¸¡ ½ í ¸ ¨ ÇÔõ ¸¡ ñ ¸.



À¼õ 2.56

(Å¢¨¼: $\underline{C}_R = -1500\underline{i} + 6000\underline{k}; \left|\underline{C}_R\right| = 6180;$ ¯$_x = 104°,$ ¯$_y = 90°,$ ¯$_z = 14°$)

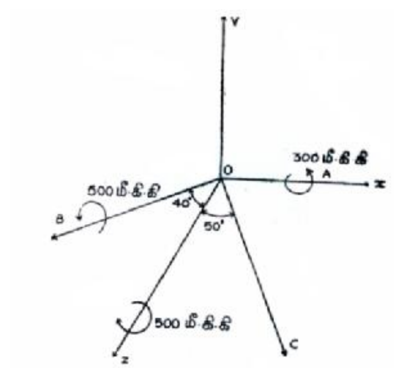
2.24. ´Õ ¸¢Â÷ ¦À¡ðÊÔ¼ý (gear box) ã ýÚ ¨ ¸ôÀ¢Ê¸û (shafts) À¼õ 2.57ø (À¼ò¨ ¾ « Î ò¾ Àì ¸ò¾¢ø ¸¡ ñ ¸) ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦À¡Õò¾ôÀð Î ûÇÉ. ¨ ¸ôÀ¢Ê A ¸¢¨¼Â¡¸×õ ¨ ¸ôÀ¢Ê¸û B,C ± ýÀ ¨ Å yoz ± ý Û õ ¦º í Ì òÐò ¾Çò¾¢Öõ « ¨ ÁóÐ ûÇ É. ¸¢Â÷ ¦ÀðÊÂ¢ø þÅüÈ¢ü Ì î º¡¢¿¢ ¸Ã¡É µ÷ ÍÆÄ¢¨ ½ ôÒò ¾¢È¨ É ì ¸¡ ñ ¸.

(Å¢¨¼: $300\underline{i} + 643\underline{k}$)

2.24.100 ¸¢.¸¢ Å¢¨ º ´ ýÚ (1,0,0) Á¦, (1,0,1)Á¦ ± ý Û õ ÒûÇ¢¸ ¨ Çî §º÷ì Ì õ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ. Å¢¨ ºÂ¢ý ¾¢Õôò ¾¢È¨ Éò ÐÅì ¸ôÒûÇ¢ ÀüÈ¢Ôõ ¬ Âò¦¾¡ ¨ Ä « î Í ¸û ÀüÈ¢Ôõ

¸¡ ñ ¸.

(Å¢¨¼ $-100\underline{j}$ $M_x = 0; M_y = -100, M_z = 0$)



À¼õ 2.57

2.26. 1000 ¸¢.¸¢ Å¢¨º ´ýÚ (3,9,-6) ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢Â¡¸×õ (-0.667,0.667,-0.333) ±ýÀÉÅü¨Èò ¾¢¨ºì¸¢¼ì¨¸¸Ç¡¸ì ¦¸¡ñ¼ §¸¡ðÊÖõ ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. ÐÅì¸ôÒûÇ¢ O ¨Å (6,0.-8) ±ýÛõ ÒûÇ¢Ô¼ý §º÷ì Ìõ §¿÷§¸¡Î ÀüÈ¢ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒ ¾¢È¨É ì ¸¡ñ ¸.

(Å¢¨¼ -133.8 Á£.¸¢.¸¢)

2.27. 25 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡Óû Ç Å¢¨º ´ýÚ (0.8,0,0.6) ±ýÛõ ¾¢¨ºì¸¢¼ì¨¸¸¨Çô ¦ÀüÈ §¸¡ðÊø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. «ì§¸¡ðÊø (-4,8,6) ¦º.Á£. ±ýÛõ ÒûÇ¢Ôõ ¯ûÇÐ ±É¢ý Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒ ¾¢È¨ÉôÀ¢ýÅÕõ ÒûÇ¢¸û ÀüÈ¢ ¸¡ñ ¸.

(a) (i) (0,0,0) (ii) (0,0,6) (iii) (-4,0,0) (iv) (0,8,0) (v) (2,2,2) ¦º.Á£.

(b) ¬Âò¦¾¡¨Ä «îÍì¸û ÀüÈ¢Ôõ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢Èý ¸¨Çì ¸¡ñ ¸.

(Å¢¨¼ :(a) (i) $\left(12\underline{i}+18\underline{j}-16\underline{k}\right)$ ¦º.Á£.¸¢.¸¢

(ii) $\left(12\underline{i}+6\underline{j}-16\underline{k}\right)$ ¦º.Á£.¸¢.¸¢

(iii) $\left(12\underline{i}-12\underline{j}-16\underline{k}\right)$ ¦º.Á£.¸¢.¸¢

(iv) $18\underline{j}$ ¦º.Á£.¸¢.¸¢

(v) $\left(9\underline{i}+17\underline{j}-12\underline{k}\right)$ ¦º.Á£.¸¢.¸¢

(b) $M_x = 12$ ¦º.Á£.¸¢.¸¢ $M_y = 18$ ¦º.Á£.¸¢.¸¢ $M_z = -16$ ¦º.Á£.¸¢.¸¢.)

2.28.15 ¸¢.¸¢ ¯ûÇ Å¢¨º ´ýÚ y «îº¢ý Á¢¨¸ò¾¢¨ºì Ì þ¨½Â¡¸ (2,0,0)Á£. ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. ÐÅì¸ôÒûÇ¢ O-ý ÅÆ¢Â¡¸ $\left(-6\underline{i}-3\underline{j}+6\underline{k}\right)$ ±ýÛõ ¾¢¨ºÂ¢ì Ì ´Õ §ÀÄ¡¸ «¨ÁÔõ §¿÷§¸¡Î ÀüÈ¢ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒ ¾¢È¨É ì ¸¡ñ ¸.

(Å¢¨¼ 20 Á£.¸¢.¸¢)

2.29. 100 ¸¢.¸¢ Å¢¨º ´ýÚ ÐÅì¸ô ÒûÇ¢ O-ý ÅÆ¢Â¡¸×õ y,z «îÍ¸Ù¼ý 60°,75° §¸¡½í¸¨Ç «¨Áì Ìõ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. (2,0,0) Á£ ±ýÛõ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â y «îÍì Ì þ¨½Â¡¸ Å¨ÃÔõ §¿÷§¸¡Î ÀüÈ¢ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢È¨É ì ¸¡ñ ¸.

(Å¢¨¼: 51.76 ¸¢.¸¢)

2.30. $\underline{F} = \left(20\underline{i} - 15\underline{j}\right)$ ¸¢.¸¢ Å¢¨º(4,-8)Á¡. ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø « ¨ÁÔõ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â x,y ¾Çò¾¢ø ¦ºÂüÀð Î (x,4)Á¡. ±ý Û õ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ÀüÈ¢ 190$\underline{k}$ Á¡.¸¢.¸¢ ¦¸¡ ñ ¼¾¢Õôò¾¢È ¨ Éô ¦ÀüÈ¢Õì Ì ¦Á ýÈ¡ø x ý Á¾¢ô ¨Àì ¸¡ ñ ¸

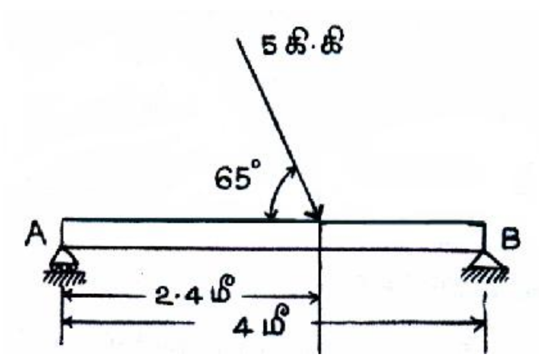
(Å¢ ¨ ¼ 6 Á¡ð¼÷)

2.31. (2,-6,4) «î Íò ¦¾¡ ¨Ä×¸ ¨Çô ¦ÀüÈ ÒûÇ¢Â¢ ý ÅÆ¢Â¡¸×õ (-0.5,0.707,0.5) ±ý ÀÉ Åü ¨Èò ¾¢ ¨ºì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸Ç¡¸×õ ¦¸¡ ñ ¼ «îº¢ø ´Õ ¸ðÊÚì ¸ô ¦À¡Õû ¾ ¨¼Â¢ ýÈ¢î ÍÆÖ¸¢ÈÐ x,y,z ¾¢ ¨ º¸Ç¢ø Ó ¨È§Â 0,-15,10 ±ý Û õ À¸¢÷×¸ ¨Çì ¦¸¡ ñ ¼ µ÷ Å¢ ¨º (2,4,10) ±ý Û õ ÒûÇ¢ÅÆ¢§Â ¦ºÂüÀÎ ¸¢ÈÐ. Å¢ ¨ºÂ¢ ý ¾¢Õôò¾¢È ¨ É ì ¦¸¡ Î ì ¸ôÀð¼ «î Í ÀüÈ¢ì ¸¡ ñ ¸.

(Å¢ ¨ ¼ -95)

2.32. 5¸¢.¸¢ Å¢ ¨ º ´ ý Ú À¼õ 2.58ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂüÀÎ ¸¢ÈÐ. A ±ý Û õ ¾¡ í ¸ø ÀüÈ¢ Å¢ ¨ºÂ¢ Û ¨¼Â ¾¢Õôò¾¢ÈÉ¢ ý ± ñ Á¾¢ô ¨Àì ¸¡ ñ ¸.

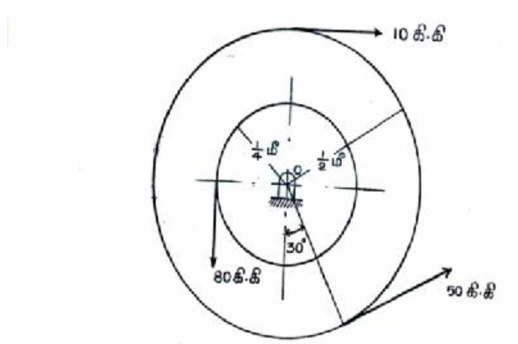
(Å¢ ¨ ¼ 10.8756 Á¡.¸¢.¸¢)



À¼õ 2.58

2.33. À¼õ 2.59ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ´Õ ¸ôÀ¢Â¢ø Å¢ ¨ º¸û ¦ºÂüÀÎ ¸¢ýÈÉ. Å¢ ¨ º¸Ç¢ý ¾¢Õôô ¾¢È ý ¸Ç¢ý þÂü¸½¢¾ì Ü Î ¾ ¨Ä ¨ÁÂôÒûÇ¢ O ÀüÈ¢ì ¸¡ ñ ¸.

(Å¢ ¨ ¼ 40 Á¡.¸¢.¸¢)



À¼õ 2.59

2.34. $\underline{F} = 6\underline{i} + 3\underline{j} + 10\underline{k}$ ±ý Ûõ Å¢¨º A(0,2,3) ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎ ¸¢ÈÐ. B(2,-3,0) ±ý Ûõ $-\underline{F}$ ÒûÇ¢Â¢ø

(i) ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò¾¢Èý ¾¢¨ºÂ¢

(ii) ÍÆÄ¢¨ ½ ¦ºÂüÀÎõ ¾Çò¾¢üÌ î ¦ºíÌò¾¡¸ «¨ÁÔõ §¸¡ðÊý ¾¢¨ºì ¸¢¼ì¨ ¸¸û.

(iii) z «î Í ÀüÈ¢ ÍÆÄ¢¨ ½Â¢ý ¾¢ÕôÒò ¾Èý

(iv) ÍÆÄ¢¨ ½ìÌ þ¨¼Â¢ÖûÇ ¦ºíÌòÐ ¦¾¡¨Ä× ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ñ ¸.

(Å¢¨¼ (i) $\underline{C} = 41\underline{i} + 38\underline{j} - 36\underline{k}$

(ii) l = 0.616, m = 0.572, n = -0.541

(iii) $M_z = -36$

(iv) 5.522 «Äì ¸û)

2.35. z x ¾Çò¾¢ø ¦ºÂüÀÎõ ÍÆÄ¢¨ ½ À¼õ 2.60ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ûÇÐ.

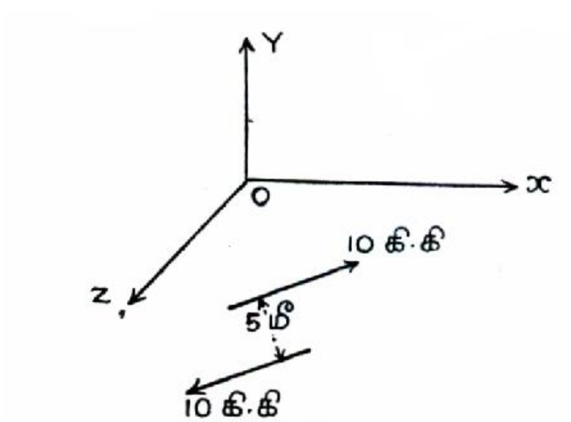
(i) ÐÅì¸ô ÒûÇ¢ O ÀüÈ¢ ÍÆÄ¢¨ ½ôÒò ¾¢È¨ É Å¨ÃÂÚì¸.

(ii) A(3,4,6) Á¡. ±ý Ûõ ÒûÇ¢ ÀüÈ¢Ôõ ¾¢ÕôÒò¾¢È¨ É ¸¡ñ ¸.

(iii) (1=0.8,m=-0.6,n=0) ±ýÀÉÅü¨Èò ¾¢¨ºì¸¢¼ì¨ ¸¸Ç¡¸×õ ÐÅì¸ô ÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢Â¡¸×õ ¦ºøÖõ §¿÷§¸¡Î ÀüÈ¢Ôõ ÍÆÄ¢¨ ½Â¢ý ¾¢ÕôÒ ¾¢È¨ Éì ¸¡ñ ¸.

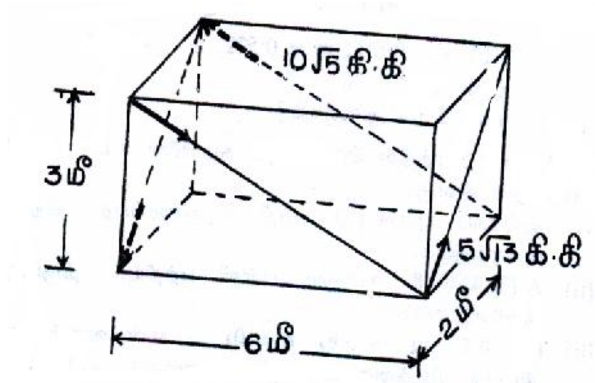
(iv) ÀÌ¾¢ (iii)ø Å¨ÃÂÚò¾ §¸¡ð¨¼ þ¨ ½Â¡¸ þ¼õ ¦ÀÂ÷òÐ, A(3,4,6)Á¡ ±ý Ûõ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ §¿÷§¸¡Î ÀüÈ¢Ôõ ÍÆÄ¢¨ ½Â¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢È¨ Éì ¸¡ñ ¸.

Å¢¨¼ (i) $-50\underline{j}$ Á¡.¸¢.¸¢. (ii) Á¡.¸¢.¸¢.(iii) 0. (iv) 0)



À¼õ 2.60

2.36. ´Õ ¦ºùÅ¸ þ¨½¸Ãò ¾¢ñ Áò¾¢ý (rectangular Parallelopiped) ã¨ÄÅ¢ð¼í¸Ç¢ø «¨ÁÔõ ÍÆÄ¢¨½¸Ç¢ý ¦¾¡Ì ÀÂ¨É ì¸¡ ñ¸.
À¼õ 2.61ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú



À¼õ 2.61

(Å¢¨¼ $\underline{C_R} = (90\underline{i} + 20\underline{j} + 100\underline{k})$ Á¢.¸¢.¸¢)

<u>º¢È¢Â Å¢É¡ì¸Ù ì¸¡É §¸ûÅ¢¸û</u>

1. ÍÆÄ¢¨½ ±ýÈ¡ø ±ýÉ?
2. ÍÆÄ¢¨½ ´ýÈ¢ý ¾¢ÕôÒ¾¢È¨É ±ùÅ¡Ú ¸ñ Î¦¸¡ûÇôÀÎ¸¢ÈÐ?
3. ÍÆÄ¢¨½¸Ç¢ý ºÁòÐÅõ ±ýÈ¡ø ±ýÉ?
4. ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø Å¢¨º ´ýÈ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÉ¢ý ÌòÐôÀ¡¢×¸Ç¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ ¦ÅÇ¢ôÀÎòÐ¸.
5. ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ÓôÀ¡¢Á¡½í¸Ç¢ø «¨ÁÔõ ¦¸¡Îì¸ôÀð¼ §¸¡Î ´ýÚ ÌÈ¢òÐ ´ÕÅ¢¨ºÂ¢ý ¾¢ÕôÒò¾È¨É ±ùÅ¡Ú ¸ñ Î¦¸¡ûÇôÀÎõ?
6. ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ÍÆÄ¢¨½¸Ç¢ý ¾òÐÅò¨¾ ÍÕì¸Á¡¸ Å¢Çì¸×õ.
7. ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢¨ÂÌ ÌÈ¢òÐ Å¢¨º ´ýÈ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÛì Ìõ ÍÆÄ¢¨É ´ýÈ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÛì Ìõ ¯ûÇ §ÅÚÀ¡ð¨¼ Å¢Çì Ì¸.

«ÄÌ 3

3.1 ¾¦½¦× ¨ÁÂõ ÁüÚõ ÒÅ¦Â÷ôÒ ¨ÁÂõ

3.1.1 Å¨ÃÂ¨È

¨ÁÂôÒûÇ¦(Central point)

þÂøÀ¦Âø º¡÷ó¾ «¨ÉòÐ «ÇÅ¦ÉòÐ¸Ùõ ´Õ ÒûÇ¦Â¦ø ¦ºÈ¦Å¡ì¸ôÀð Î ¦À¡ÕÇ¦ý «¨ÉòÐò ¾É¦Á º¦ÚÜÚ¸Ç¦ø ¸ÅÉõ ¦ºÖò¾ôÀ Î Å¾¡¸ §Áü¦¸¡û Ùõ §¿Ãò¾¦ø Ó¾Ä¡ÅÐ ¾¦ÕôÒ¾¦È¨É (first moment)®Î¦ºöÅ¾ü¸¡É ÒûÇ¦Â¨Áô¨À ¨ÁÂôÒûÇ¦ ±Éì¸Õ¾ôÀÎ¸¦ÈÐ.

½ì¸¦ÂÄ¡¸ ¨ÁÂôÒûÇ¦ ±ýÀÐ «ôÒûÇ¦¨Âì ÌÈ¦òÐ ±Îì¸ôÀÎõ Ó¾üÀÊ Å¦Âì¸ô ¦ÀÕì¸ò¦¾¡¨ «¾¡ÅÐ ¦À¡Õû ´ýÈ¦ý º¦ÚÜÚ¸Ç¦ý Ó¾Ä¡ÅÐ ¾¦ÕôÒ¾¦ÈÉ¦ý ÜÎ¾øÅ¾ôÒ âîº¦ÂÁ¡Å¨¾ «È¦Å¦ì Ìõ ÒûÇ¦Â¡¸ì¸Õ¾ôÀÎ¸¦ÈÐ.

¾¦½¦× ¨ÁÂõ (Centroid)

ÅÊÅ¸½¦¾ ¯ÕÅ¨ÁôÒ º¡÷ó¾ ¸½¦¾ò¾¦ø Áð Î§Á ¾¦½¦× ¨ÁÂõ ±ýÈ ¦º¡ø ÀÂýÀÎ ò¾ôÀÎ¸¦ÈÐ.

ÒÅ¦Â÷ôÒ ¨ÁÂõ (Centre of Gravity)

¦À¡Õ¦Ç¡ýÈ¦ý ÓØ¨ÁÂ¡É ¾¦½¦× («øÄÐ ÓØ±¨¼) µ¡¦¼ò¾¦ø ¦ºÈ¦Å¡ì¸ôÀÎõ ÒûÇ¦Â¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎ¸¦ÈÐ.

3.1.2 ÀÃôÒ ´ýÈ¦ý ¾¦½¦× ¨ÁÂõ

Å¨ÃÂ¨È

$$\underline{r_e} = \frac{1}{A}\int \underline{r}dA$$

²§¾Ûõ ÒûÇ¦ 0³ì ÌÈ¦òÐ x,y,z «îÍ¸û ±Îô À¾¡¸ì ¦¸¡û¸ «ô§À¡Ð

$$x_e = \frac{1}{A}\int xdA; y_e = \frac{1}{A}\int ydA; Z_e = \frac{1}{A}\int zdA$$

À¦ýÅÕõ «ð¼Å¨½Â¦ø ÅÊÅ¸½¦¾ ¯ÕÅ¨ÁôÒ¸Ùì Ì ¯¡¦Â ¾¦½¦× ¨ÁÂôÒûÇ¦Â¦ý ¦¾¡¨Ä× Å¨ÃÂÚì¸ôÀð Î ûÇÐ,

	À¦Çì¸õ	ÅÊÅò¾¦ü Ì¡¦À «Ç¨Å¸û	ÀÃôÒ	x_c	y_c
1.	¦ºùÅ¸õ	¿¦Çõ=b ¯ÂÃõ=a=h	bh	[illegible] $\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$
2.	ºÐÃõ	h=b=a	a^2	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$
3.	þ¨½¸Ãõ	a,b,∝	absin ∝	[illegible]	$\frac{a\sin\propto}{2}$
	À¦Çì¸õ	ÅÊÅò¾¦ü Ì¡¦À «Ç¨Å¸û	ÀÃôÒ	x_c	y_c
4.	¦ºùÅ¸õ	a,b,$\frac{\pi}{2}$	ab	$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{2}$
5.	Òì§¸¡½õ	¸¦¨¼¿¦Çõ=b ¯îº¦ ÒûÇ¦À¦ÄÓóÐ Å¨ÃÂõ ¿¦¨Äì§¸¡ðÊý ¿¦Çõ h.................. 0- À¦ÕóÐ ¿¦¨Äì§¸¡Î ¸¦¨¼ì§¸¡Î b-ஐ ¦ÅðÎõÒûÇ¦Â¦ý ¦¾¡¨Ä×=a	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{3}(\frac{b}{2}+ ...)$ [illegible]	$\frac{h}{3}$

6.	« ¨ÅÅð¼ô À Ì ¾¢	0-மையப்புள்ளி ¬ Ãõ= R	$\frac{® R^2}{2}$	0	$\frac{4R}{3®}$
7.	¸¡øÅð¼ôÀ Ì ¾¢		$\frac{® R^2}{4}$	$\frac{4R}{3®}$	$\frac{4R}{3®}$
8.	Åð¼ì§¸¡½ô À Ì ¾¢	2∝, $\frac{}{R}$	R^2∝	$\frac{2}{3}\frac{\frac{4R}{3\pi}}{\frac{R\sin\propto}{\propto}}$	0
9.	¸¡ø ¿¦ûÅð¼ô À Ì ¾¢ (Quarter Eclipse)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{® ab}{4}$	$\frac{4a}{3®}$	$\frac{4b}{3®}$
10.	¸¡ø ÀÃÅ ¨ Ç×ôÀ¼õ (QuarterParabola)	$y^2=kx$ ¸¢ ¨ ¼ò¦¾¡ ¨ × = a ¿¢ ¨ Äò¦¾¡ ¨ Ä× = b	$\frac{2ab}{3}$	$\frac{3}{5}a$	$\frac{3b}{4}$
11.	¦À¡Ð Š§Àý ÊÃøGeneralspindril	$y^2=kx$	$\frac{ab}{n+1}$	$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{b}{2}$
12.	¸¡ø ÀÃÅ ¨ Ç× Š§Àý ÊÃø (parabolic spindrill) n=2	$y=kx^2$	$\frac{ab}{3}$	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3b}{4}$

3.1.3 ÀôÒŠ Ì øÊ¿Š (pappus Guldiness)

§¾üÈí ¸û

§¾üÈõ 1

ÍÆüº¢Â¡ø ¿¢¸Øõ §ÁüÀÃôÒ À¢ÈôÀ¢ì Ì õ Å ¨ Ç§¸¡ðÊ ý ¿¦Çõ, ÁüÚõ À¢ÈôÀ¢ì Ì õ Å ¨ Ç§¸¡ðÊ ý ¾¢ ñ ¨ ÁÂõ ÀÂ½ õ ¦ºöÔõ ¦¾¡ ¨ Ä× ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ ý ¦ÀÕì Ì ò¦¾¡ ¨ ¸ ì Ì î ºÁÁ¡ Ì õ.

¿¢ÚÅø

$y=f(x)$ ±ýÈ Å ¨ Ç×§¸¡ðÊ ý ¦¾¡ ¨ Ä× l ±É ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼¡ø l ý º¢ÈÂ À Ì ¾¢ ¨ Â dl ±É ±Î ì Ì õ ¾Õ½ò¾¢ø ÍÆüº¢Â¡ø ¿¢¸Øõ §ÁüÀÃôÒ (surface area)

$$dA=2® y.dl$$

±É§Å ¦Á¡ò¾ §ÁüÀÃôÒ

$$A=\int dA=\int 2® ydl$$

$$=2®\int ydl$$

$$=(2® y_c)l\left[\because y_c l=\int ydl\right]$$

(¾¢ ñ ¨ ÁÂõ ÀÂ½ õ ¦ºöÔõ ¦¾¡ ¨ Ä×)X (À¢ÈôÀ¢ì Ì õ Å ¨ Ç§¸¡ðÊ ý ¿¦Çõ)

§¾üÈõ 2

ÍÆüº¢Â¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ ¦À¡Õ¦Ç¡ýÈ¢ý ÀÕÁõ, À¢ÈôÀ¢ì Ì õ ÀÃôÒ ÁüÚõ À¢ÈôÀ¢ì Ì õ ÀÃôÒ ÀÂ ½õ ¦ºöÔõ ¦¾¡¨Ä× ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕì Ì ò ¦¾¡¨¸ì Ì î ºÁÁ¡ Ì õ.

¾¢ÚÅø

$$dv = 2\pi\, ydA \therefore v = \int dv = \int 2\pi\, ydA = 2\pi\, y_c A = (2\pi\, y_c) A$$

§ÁÖõ ÀÕÁò¾¢ü Ì ¡¢Â ¾¢ ½¢× ¨ÁÂõ

(Å ¨ÃÂ ¨ÈÂ¢ýÀÊ ÀÕÁò¾¢ý ¾¢ ½¢× ¨ÁÂõ)

$$\underline{r_c} = \frac{1}{v}\int \underline{r}dv, \text{ ¬ Ì õ.}$$

$$\text{±É§Å } x_c = \frac{1}{v}\int xdv; y_e = \frac{1}{v}\int ydv; z_c = \frac{1}{v}\int zdv$$

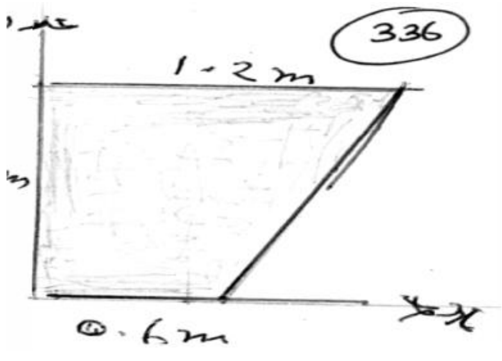
3.1.4 ÍÆüº¢Â¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ô ¦ÀÈôÀ Î õ ÀÕÁò¾¢ý ¾¢ ½¢× ¨ÁÂ í ¸ Ù ì Ì ¡¢Â « ð¼Å ¨ ½ (ÀôÒŠ Ì ÄÊ¿Š §¾üÈ í ¸ û ã Äõ)

Å¢Ç ì ¸õ	ÅÊÅò¾¢ü Ì ¡¢Â « Ç ¨ Å ¸ û	xc	ÀÕÁõ
1. « ¨Ã ì §¸¡ ளõ		$\frac{3}{8}R$	$\frac{2}{3}\pi R^3$
2. Åð¼ §¿÷ÜõÒ		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi R^2 h$
3. ÍüÈø « ¨Ã ¿¦ûÅ ¨ Ç×Õ (semiellipsoidofrevolution)		$\frac{3}{8}h$	$\frac{2}{3}\pi R^2 h$
4. ÍüÈü ÀÃÅ ¨ Ç×Õ (Paraboloid of resolution)		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{3}\pi R^2 h$
5. Åð¼ §¿÷ÜõÒ		$\frac{3}{4}h$	$\frac{1}{3}\pi R^2 h$

3.1.4. ÀÂ¢üº¢

1. À¼ò¾¢ø ¸¡ðÊÔûÇ º¡¢Å¸õ ´ýÈ¢ý ÀÃôÀ¢ü Ì ¡¢Â ¾¢ ñ Á ¨ ÁÂò ¨¾ ¾¢÷Á¡ É¢ì ¸×õ

(Å¢ ¨¼ : $\left[\bar{x} = 0.433m, \bar{y} = 0.66m\right]$



2. Ó¾ø ¸¡øÁ¡É À Ì ¾¢Â¢ø $y^2 = x, x^2 = y$ ±ýÈ þÕ ÀÃÅ¨ Ç×¸Ù ì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ ÁÔõ ÀÃôÀÇ¨ ÅÂ¢ý ¾¢ ñ Á ¨ÁÂò¨¾ì ¸¡ ñ ¸

Å¢¨¼ $\left[\bar{x} = \frac{9}{20}, \bar{y} = \frac{9}{20}\right]$

3. Ó¾ø ¸¡øÁ¡É À Ì ¾¢Â¢ø $x = y^2, y = \frac{b}{a}x$ ±ýÈ Å¨ ÇÅ¨ Ã×¸Ù ì Ì þ¨¼§ÂÔûÇ ÀÃôÀÇ¨ ÅÂ¢ý ¾¢ ñ Á ¨ÁÂò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.

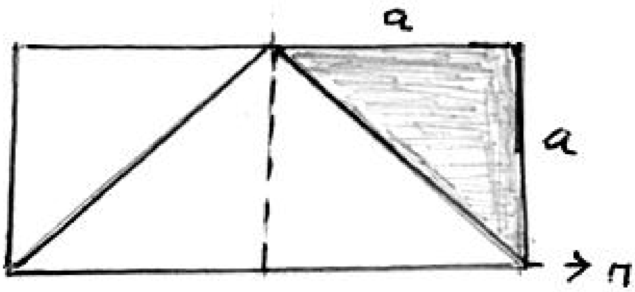
Å¢¨¼ : $\bar{x} = \frac{2}{5}\frac{\left(6a^{\frac{1}{2}} - b\right)a}{\left(4a^{\frac{1}{2}} - b\right)}, \bar{y} = \frac{1}{2}\frac{\left(3a - 2b^2\right)}{\left(4a^{\frac{1}{2}} - b\right)}$

4. Ó¾ø ¸¡øÁ¡É À Ì ¾¢Â¢ø $y = \frac{x^3}{4}, x = \frac{y^2}{b}$ ±ýÈ Å¨ ÇÅ¨ Ã×¸Ù ì Ì þ¨¼Â¢Ä¨ ÁÔõ ÀÃôÀÇ¨ ÅÂ¢ý ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒûÇ¢¨Âò ¾¡÷Á¡É¢ì ¸×õ.

Å¢¨¼

$$\bar{x} = \frac{24}{25}, \bar{y} = \frac{6}{7}$$

5. z-« î Í ì Ì È¢òÐ Å ¨ÃÀ¼ò¾¢ø ¸¡ðÊÔûÇ ¿¢Æø Ó ì§¸¡½õ ÀÃôÀÇ× 360° «ÇÅ¢ü Ì ÍÆüº¢ §Áü¦ ¸¡û Ù õ§À¡Ð À¢ÈôÀ¢ì ¸ôÀð¼ ÀÕÁò¾¢ý ¾¢ ñ Á ¨ÁÂò¾¢ý z-« î Íò¦¾¡ ¨Ä ¨Å ì ¸¡ ñ ¸



(Å¢¨¼ : $\left[\bar{z} = \frac{5}{8}a\right]$

6. Ó¾ø ¸¡øÁ¡Éô À Ì ¾¢Â¢ø $y = x$, $y = x^2$ ±ýÈ Å¨ ÇÅ¨ Ã×¸û (0,0) (a,a) ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¢ø ¦ÅðÊì¦ ¸¡û¸¢ýÈÉ. þùÅ¨ ÇÅ¨ Ã×¸Ù ì Ì þ¨¼§ÂÔûÇ ÀÃôÀÇ¨ ÅÂ¢ý ¾¢ ñ Á¨ÁÂò¾¢ý $\bar{x}$ « î Íò¦¾¡ ¨Ä ¨Å ì ¸¡ ñ ¸.
þ í ¸ º¢È¢Â ÜÚ ÀÃôÀÇ× dA ¦º í Ì òÐ « î Í ì Ì þ¨ ½Â¡¸ ±Î òÐõ «ùÅ¢¾§Á dA ¸¢¨¼« î Í ì Ì þ¨ ½Â¡¸×õ þÕÓ ¨È¸Ç¢Öõ ¸ ñ Î º¡¢À¡÷ì ¸×õ.

Å¢¨¼ : $\left[\bar{x} = \frac{a}{2}\right]$

7. Ó¾ø ¸¡øÁ¡Éô À Ì ¾¢Â¢ø $y = x$ ÁüÚõ $y = \frac{1}{4}x^2$ ±ýÈ Å ¨ ÇÅ ¨ Ã× ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼§ÂÔ û Ç ÀÃôÀÇ ¨ ÅÂ¢ ý ¾¢ ñ Á ¨ ÁÂò¾¢ ý, $\bar{y}$ « î Í ò ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å ì ¸ ¡ ñ ¸ . þ í Ì þÕÅ ¨ ÇÅ ¨ Ã× ¸ Ù õ (0,0) (4Á¦,4Á¦) ±ýÈ ÒûÇ¢¸Ç¢ø ¦ÅðÊ ì ¦ ¸ ¡ û ¸¢ýÈÉ. (b)Å ¨ ÇÅ ¨ Ã× ¸ û $y^2 = 4x$ ÁüÚõ $y = \frac{1}{4}x^2$ ±ý Ú û Ç §À¡Ðõ ¾¢ ñ Á ¨ ÁÂò¾¢ ý $\bar{y}$ « î Í ò ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å ì ¸ ¡ ñ ¸ .

3.1.5 ¦À¡Õ¦Ç¡ ýÈ¢ý ¾¢½¢× ¨ ÁÂò ¨ ¾ì ¸ ¡ Ï ¾ø

m ¾¢½¢× û Ç (mass) ¦À¡Õ¦Ç¡ ýÈ¢ü Ì ¡¢Â ¾¢½¢× ¨ ÁÂõ, m « Ç× û Ç ÓØ ¨ Áò¾¢½¢× µ¡¢¼ò¾¢ø ¦ºÈ¢Å¡ì ¸ôÀ Î õ ±ýÚ ° ¸ õ ¦ºöÐ ¦ ¸ ¡ ñ Î « ôÒ û Ç¢ Ì È¢òÐ ¦ÀÈôÀ Î õ. Ó¾üÀÊ Å¢Ä ì ¸ ô ¦ÀÕ ì Ì ò ¦¾¡ ¨ ¸Â¡ÉÐ ¦À¡ÕÇ¢ý ºÈ¢Â À Ì ¾¢ì ÜÈ¢ý ¾¢ ñ Áõ ¦¾¡¼÷î º¢ÔûÇ ÀÃÅ ¨ Äô ¦ÀüÈ¢ÕôÀ¾¡¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î « ì ÜüÈ¢ý Ó¾üÀÊ Å¢Ä ì ¸ ô ¦ÀÕ ì ¸ ò ¦¾¡ ¨ ¸ ì Ì î ºÁ¦Áý Ú ¸ Õ¾¢

$\underline{r_e} = \frac{1}{m}\int \underline{r}dm$ ºÁý À¡ Î ¦ÀÈôÀð Î û ÇÐ. ±É§Å

$x_c = \frac{1}{m}\int xdm; y_c = \frac{1}{m}\int ydm; z_c = \frac{1}{m}\int zdm$

¾¢½¢× ¨ ÁÂõ, þÂì ¸ Å¢ ¨ ºÂ¢ÂÄ¢ø Á¢¸ Ó ì ¸¢Â À í ¨ ¸ §Áü¦ ¸ ¡ û ¸¢ÈÐ. ¦À¡ÕÇ¢ý ÒÈÅ¢ ¨ º ¸ û « ¨ ÉòÐõ ¾¢½¢× ¨ ÁÂôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ ¬ É¡ø ¿ ¨ ¼Ó ¨ ÈÂ¢ø ¦À¡Õ ¨ Ç ÒûÇ¢ì Ì ¡¢Â ¾¢ ñ Áõ, ¾¢ ñ ÁôÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÈ¢Å¡ì ¸ôÀð Î ûÇ¾¡ ¸ ì ¸ Õ¾ôÀ Î ¸¢ÈÐ. ¦À¡ÕÇ¢ý «¼÷ò¾¢ ° ±ýÈ¡ø

$dm = {}^\circ dv, m = {}^\circ v, x_c = \frac{1}{v}\int xdv, y_c = \frac{1}{v}\int ydv, z_c = \frac{1}{v}\int zdv$ ¬ Ì õ. « ô§À¡Ð ¾¢ ñ ÁôÒûÇ¢ ¾¢½¢× ¨ ÁÂòÐ¼ý ÓüÈ¢Öõ ´ ýÚÀ Î ¸¢ÈÐ.

Á¡¾¢¡¢ ÅÆ¢É ¡ ì ¸ û

1. l ¿¦ÇÓ û Ç ¸õÀ¢ ´ ýÚ ¸¢ ¨ ¼Â¡¸ OA = l ±ýÚ ± Î òÐ « ¾ý «¼÷ò¾¢ ° $= kx$, (x ±ýÀÐ 0 ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ « ÇÅ¢¼ôÀ Î ¸¢ÈÐ). ±ýÈ¡ø ¸õÀ¢Â¢ý ¾¢½¢× ¨ ÁÂõ 0Å¢Ä¢ÕóÐ $\frac{2}{3}l$ ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢ø ¯ûÇÐ ±É ì ¸ ¡ ñ ¸

$$dm = pdx = kxdx$$

$$x_c = \frac{\int_0^l x.kxdx}{\int_0^l kxdx} = \frac{\int x^2 dx}{\int xdx} = \frac{2}{3}l$$

2. ´Õ ÀÊò¾¡É (homogeneous) ã Äô¦À¡Õû ¦ÀüÈ ¸õÀ¢ ´ ýÚ þÕ ºÁÀì ¸ Óì§ ¸ ¡½ ÅÊÅ¢ø ¸¢ ¨ ¼¿¦Çõ 2l ¬ ¸ ×õ ÁüÈ þÕÀì ¸ í ¸ û ~ §¸ ¡½ò ¨ ¾ì ¦ ¸ ¡ ñ ÊÕì Ì Á¡Ú Å ¨ Çì ¸ôÀð Î ûÇÐ, ¸õÀ¢Â¢ý ¾¢½¢×

¨ ÁÂôÒûÇ¦, ¸õÀ¦ ¯ÕÅ¡ì¸¦Â Óì§¸¡½ô ÀÃôÀÇÅ¦ý ¾¦½¦× ¨ ÁÂò¾¦ø « ¨ÅÔ¦ÁÉì ¸¡ðÎ¸.

¾÷× 0 ±ýÈ ÒûÇ¦ ¸¦¨ ¼Â¦Ä¨ ÁÔõ 2l, ¿¦ÇÓûÇ ¸õÀ¦Â¦ý ¨ ÁÂôÒûÇ¦Â¡¸ ¸Õ¾×õ. ox,oy ±ýÀÉ ¸¦¨ ¼¿¦¨ Ä «îÍ¸Ç¡Ì õ. Óì§¸¡½ô ÀÃôÀ¦ü Ì ¡¦Â ¾¦½¦× ¨ ÁÂõ, x_c =0, $y_c = \frac{h}{3}$, h= Óì§¸¡½ò¾¦ý ¦ºíÌ òÐ ¯ÂÃõ ¾÷×ì Ì ¡¦Â «ð¼Å¨ ½

ÜÚ	¦¾¡¨ Ä×	¾¦½¦×	y_C	y_C ¾¦½¦×
«ÉôÀì¸õ	$2l$	$2\sigma l$	0	0
´ù¦Å¡Õ º¡ö× Àì¸õ	$\sqrt{l^2+h^2}$	$\sigma\sqrt{l^2+h^2}$	$\frac{h}{2}$	$\sigma h\sqrt{l^2+h^2}$
Óì§¸¡½ò ¾¦üÌ ¡¦Â ¦Á¡ò¾õ	---	$2\sigma\left(l+\sqrt{l^2+h^2}\right)$	y_c	$\sigma h\sqrt{l^2+h^2}$

$$y_c = \frac{\sigma h\sqrt{l^2+h^2}}{2\sigma\left(l+\sqrt{l^2+h^2}\right)}$$

¬É¡ø,

$$dm = \sigma dv, m = \sigma v, x_c = \frac{1}{n}\int xdv, y_c = \frac{1}{n}\int ydv, z_c = \frac{1}{n}\int zdv \quad y_c = \frac{h}{3}$$ ±É§Å

$$\frac{h}{3} = y_c = \frac{\sigma h\sqrt{l^2+h^2}}{2\sigma\left(l+\sqrt{l^2+h^2}\right)}$$

$$h\sqrt{l^2+h^2} = 2hl$$

$$l^2+h^2 = 4l^2$$

$$h = \sqrt{3}l$$

$$\sim = \tan^{-1}\frac{h}{l} = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60^\circ$$

±É§Å $$\bar{y} = \frac{v_1y_1 - v_2y_2 - v_3y_3}{v_1 - v_2 - v_3}$$

$$= \frac{19}{25} = 0.76m$$

$y = x, y = x^2$ ±ýÈ Å¨ÇÅ¨Ã×¸Ù ì Ì û «¼í¸¦ÔûÇ ÀÃôÀÇ¨ ÅÂ¦ý ¾¦ñ ÁôÒûÇ¦¨ Âò ¾÷Á¡É¦ì¸×õ.

¾÷×1 º¢È¢Â ÀÃôÀÇ× ¿¢ ¨Ä ì Ì ò¾¡ ¸ ±Î ôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û Ç×õ.

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 x\left(y_2 - y_1\right)dx}{\int_0^1 \left(y_2 - y_1\right)dx} = \frac{\int_0^1 x\left(x - x^2\right)dx}{\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} = 0.5m$$

þ í Ì « î Ï ò ¦¾¡ ¨Ä× ¸ û Á¢ð¼¡¢ø « ÇÅ¢¼ôÀ Î Å¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û Ç×õ.

¾÷× 2

º¢È¢Â ÀÃôÀÇ× dA ¸¢ ¨¼Â¡ ¸ ±Î ôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ¸ ±É§Å $dA = \left(x_1 - x_2\right)dy$

þôÀÃôÀ¢ý ¾¢ ñ Á ¨ÁÂõ $\bar{x} = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 \left[\frac{x_1 + x_2}{2}\right]\left(x_1 - x_2\right)dy}{\int_0^1 \left(x_1 - x_2\right)dx}$$

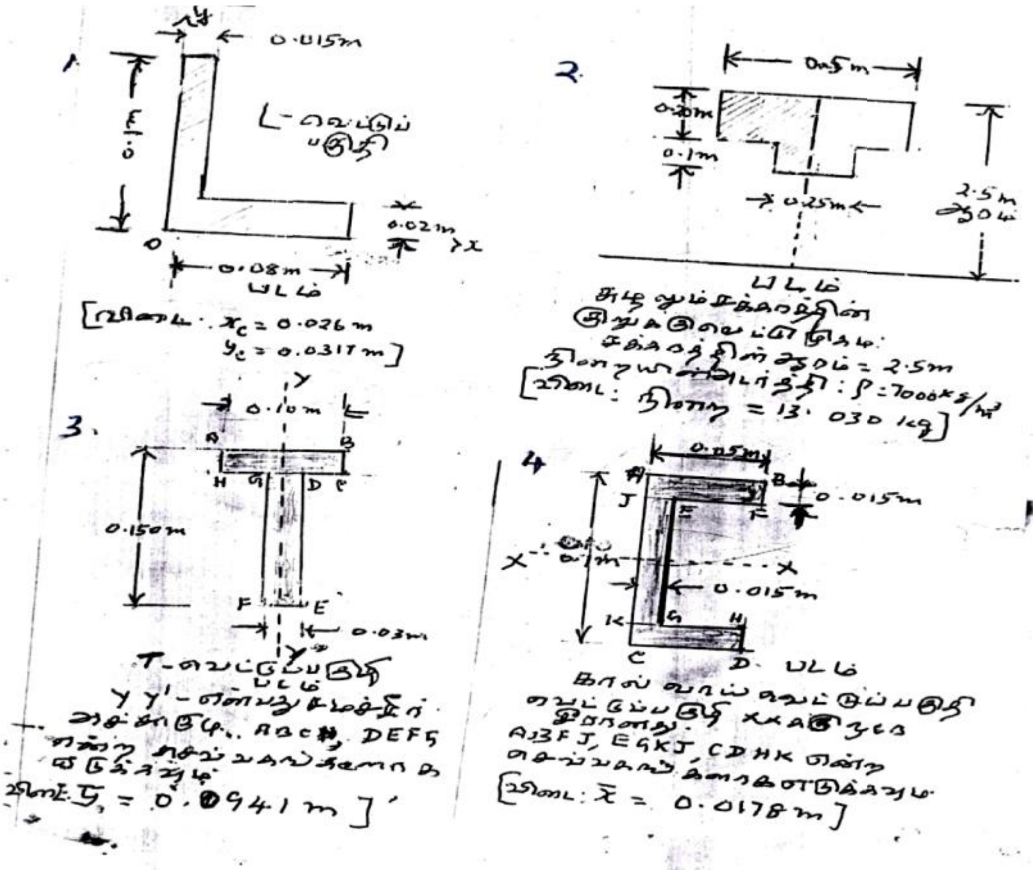
$$= \frac{\int_0^1 \left[\frac{\sqrt{y} + y}{2}\right]\left(\sqrt{y} - y\right)dy}{\int_0^1 \left(\sqrt{y} - y\right)dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[y - y^2\right]dy}{\int_0^1 \left(\sqrt{y} - y\right)dy} = \frac{1}{2}\text{ m}$$

ÀÂ¢üº¢ 3.3

¦¾¡ Ì ôÒ ÀÃôÀ¢ü Ì ¡¢Â ¾¢½¢× ¨ÁÂò ¨¾ì ¸ ¡ Ï ¾ø.

¸¢úì ¸ ¡ Ï õ ÅÊÅ « ¨ÁôÒ ¸ Ù ì Ì ¡¢Â ÀÃôÀÇ× ¸ Ç¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò ¨¾ì ¸ ¡ ñ ¸ .



À¼õ-1

(Å¢ ¨ ¼: $x_c = 0.026m$

$y_c = 0.0317m$

À¼õ - 2

Í ÆÖõ º ì ¸ Ãò¾¢ ý Ì Ú ì Ì ¦ Å ð Î Ó ¸ õ.

º ì ¸ Ãò¾¢ ý ¬ Ãõ = 2.5 m

¿¢ ¨ ÈÂ¢ ý « ¼÷ò¾¢; ° $= 7000 kg/m^3$

(Å¢ ¨ ¼: ¿¢ ¨ È = 13.030 kg.

À¼õ - 3

YY' ± ý ÀÐ ºÁî º¢÷ « î º ¡ Ì õ. ABC,DEFG ± ý È ¦ º ùÅ ¸ í ¸ Ç ¡ ¸ ± Î ì ¸ ×õ.

(Å¢ ¨ ¼: $\bar{y} = 0.0941m$

À¼õ - 4

¸ ¡ øÅ ¡ ö ¦ Å ð Î ôÀ Ì ¾¢ ¦ Å ð Î ôÀ Ì ¾¢. X,X ì Ì ´ §Ã º¢Ã ¡ É Ð ABFJ, EGKJ, CDFK ± ý È ¦ º ùÅ ¸ í ¸ Ç ¡ ¸ ± Î ì ¸ ×õ

(Å¢ ¨ ¼: $\bar{x} = 0.0178m$)

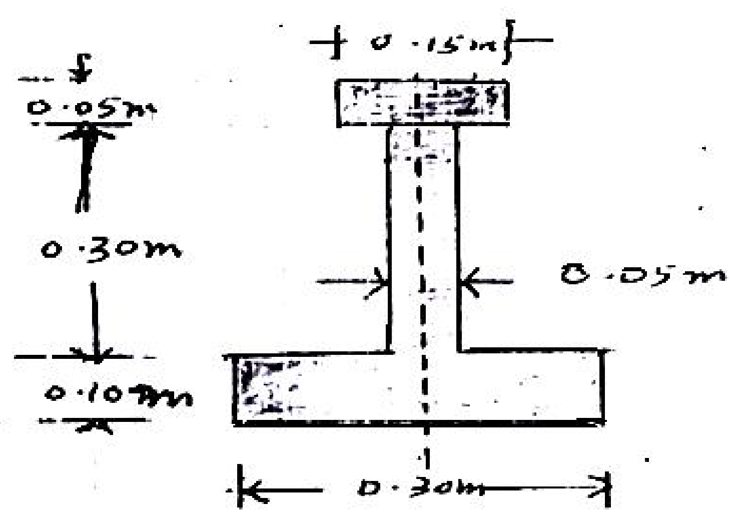
À¼õ - 5

¸ ¦ú Àð ¨ ¼(flangs)

§ÁøÀð ¨ ¼ (flangs) þ ¨ ¼Â¢Ä ¨ ÁÔõ À¢ ý É ø (web)

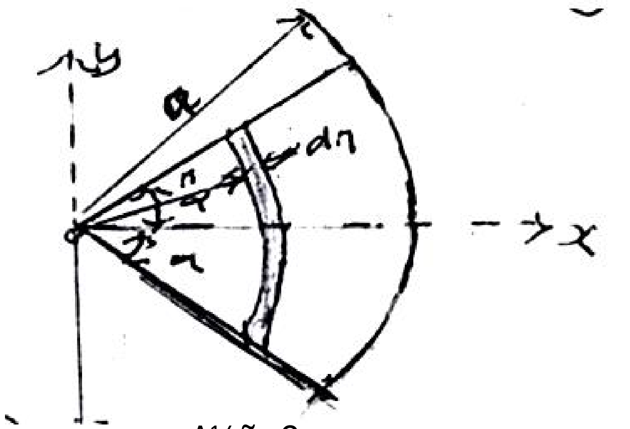
¸ ¦úÀð ¨ ¼Â¢ ý ¸ ¦ú À ¡ ¸ õ-º ¡ ý È¡¾¡÷ « º º ¡ ¸ ± Î ì ¸ ôÀð Î ÇÇÐ.

(Å¢ ¨ ¼ : $\bar{y} = 0.1607m$)



A¼õ 5

6. Åð¼ §¸¡ ½ôÀ Ì ¾¢Â¢Ä ¨ ÁÔõ ÀÃôÀ¢ ý ¾¢ ½¢× ¨ ÁÂõ ¸¡ ñ ¸



A¼õ 6

(1) Ó¾øÅ¢ ¨ ¼

$$\left[A\bar{x} = \int xdA \right]$$

$$\frac{2\sim}{2®}(® a^2)\bar{x} = \int_0^a \frac{r\sin\sim}{\sim}(2r\sim dr)$$

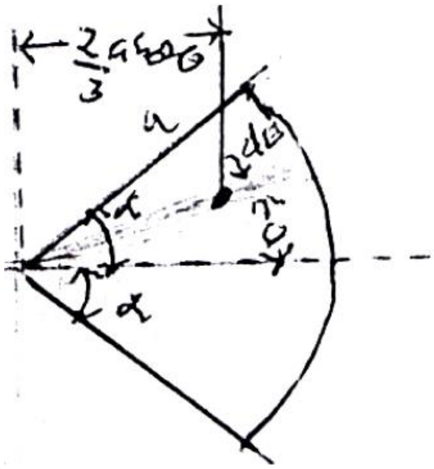
$$a^2\sim \bar{x} = \frac{2}{3}a^3\sin\sim$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}a\frac{\sin\sim}{\sim}$$

« ¨ ÃÅð¼ô À Ì ¾¢Â¢ ý ÀÃôÀÇÅ¢ü Ì ¡¢Â ¾¢ ñ Á ¨ ÁÂõ

$$2\sim = ®, \bar{x} = \frac{45}{35}$$

(2) þÃ ñ ¼¡õ Å¢¨¼



$$\left[A\bar{x} = \int xdA\right]$$

$$\left|a^2\sim\right|^{\bar{x}} = \int_{-a}^{+a}\left[\frac{2}{3}a\cos{}^-\right]\left[\frac{1}{2}a^2 d{}^-\right]$$

$$a^2 a\bar{x} = \frac{2}{3}a^3 \sin\sim$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{a\sin\sim}{\sim}$$

(Ì È¢ôÒ: þÃ ñ ¼¡õ Å¡¢ ¨ º ì Ì ¡¢Â º¢È¢Â ã Ä ¸ ì Ü ¨ È $rd®d^-$ ± É ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼¡ ø ¯ ì Ì ¡¢Â ¦ ¾¡ ¨ ¸ Â¢¼ø Å ¨ ÇÂò ¨ ¾($ring$)º ¡÷óÐ, Ó¾øÅ¢ ¨ ¼ ¨ Â « Ç¢ì ¸¢ÈÐ. Á¡È¡ ¸ , ®ì Ì ¡¢Â ¦ ¾¡ ¨ ¸ Â¢¼ø Óì§ ¸ ¡ ½ ò ¨ ¾î º ¡÷óÐ, þÃ ñ ¼¡õ Å¢ ¨ ¼ ¨ Â « Ç¢ì ¸¢ÈÐ.)

3.2 ¦ ¾¡ ¨ ¸ Â¢¼ø Å¡Â¢Ä¡ ¸ ò ¾¢ ½¢× ¨ ÁÂò ¨ ¾ì ¸ ¡ Ï ¾ø:

þ í Ì « ¨ É òÐ ¾¢ ñ Áõ, ÁüÚõ §Á§Ä¡ Î (outer shell) ¬ ¸¢Â ¨ Å ¸ Ù ì Ì , ¦À¡Õð ¸ Ç¢ ý ÍÆÄî Í X « îº¢ ø ± Î ì ¸ ôÀð Î û Ç ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û Ç ×õ. O ± ý Û õ ¬ ¾¡Ãô Ò û Ç¢Â¡ Ì õ. a ± ý ÀÐ ¬ Ãõ ¨ ¾Ôõ, h ± ý ÀÐ ¯ÂÃò ¨ ¾Ôõ Ì È¢ì ¸¢ ý È É. Åð¼ò¾ð Î , ÁüÚõ Å ¨ ÇÂõ O-Â¢Ä¢ÕóÐ x ¦ ¾¡ ¨ Ä Å¢ø « ¨ Á ¸¢ ý È É ± É ì ¦ ¸ ¡ û Ç ×õ.

1. ¾¢ ñ Á « ¨ Ãì§ ¸ ¡Çò¾¢ ý ¾¢ ½¢× ¨ ÁÂò ¨ ¾ì ¸ ¡ Ï ¾ø.

¬ Ãõ $\sqrt{a^2 - x^2}$

ÀÕÁ ý ® $\left(a^2 - x^2\right)\Delta x$

¿¢ ¨ È $dm = ®\left(a^2 - x^2\right)\Delta x°$, ° = « ¼÷ò¾¢ (µ÷ « Ä Ì ÀÕÁ Û ì Ì ¡¢Â ¿¢ ¨ È)

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{M} = \frac{\int_0^a x\left\{®\left(a^2 - x^2\right)°\right\}}{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}®a^3\right)°}$$

$$= \frac{3}{2a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^3\right)dx = \frac{3}{2a^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3a}{8}$$

2. h ¯ÂÃÓ ¨¼Â Åð¼ §¿÷Ü õÒ ´ ýÈ¦ý Ó ¨ ÉôÒûÇ¦ 0-ø « ¨Á¸¦ÈÐ.
¾¦½¦× ¨ÁÂò ¨¾ì ¸¡ Ï ¾ø

¬Ãõ $\frac{ax}{h}$

ÀÕÁý $®\left(\frac{ax}{h}\right)^2 \Delta x$

¿¦¨È

$$dm = ®\left(\frac{ax}{h}\right)^2 \Delta x° = \frac{°®a^2x^2}{h}\Delta x$$

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{M} = \frac{\frac{°®a^2}{h}\int_0^h x.x^2dx}{\frac{1}{3}®a^2hp}$$

$$= \frac{°®a^2}{h}.\frac{1}{3®a^2hp}\int_0^h x^3dx$$

$$= \frac{3}{h^3}.\frac{h^4}{4} = \frac{3h}{4}$$

3. « ¨Ã §¸¡ÇòÐ §Á§Ä¡ðÊý (shell) ¾¦½¦× ¨ÁÂò ¨¾ì ¸¡ Ï ¾ø.

¬Ãõ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Åð¼Å ¨ÇÂò¾¦ý §Á§Ä¡ð Î ÀÃôÀÇ×

$$= \left(2®y\right)\Delta s$$

$$= \left(2®y\right)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\Delta x$$

$$= \left(2®y\right)\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\Delta x$$

$$= \left(2®y\right)\sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\Delta x$$

$$= 2®y.\frac{a}{y}.\Delta x$$

¿¦¨È $dm = (2®a.\Delta x)$± ,± ¿¦¨È/µÃÄ Ì ÀÃôÒ

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int xdm}{M} = \frac{\int_0^a x(2\text{®} a\pm)dx}{\frac{1}{2}\left(\text{®} a^2\pm\right)}$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a xdx = \frac{1}{2}a$$

4. ¯ûÇ¼üÈ h ¯ÂÃÓ¨¼Â Åð¼ §¿÷ ÜõÀý Ó¨ ÉôÒûÇ Oø «¨Á¸ÈÐ.
¾½× ¨ÁÂò¨¾ì¸¡ Ï¾ø

¬Ãõ $y = \frac{ax}{h}$

Åð¼Å¨ ÇÂò¾ý §Á§Ä¡ð Î ô ÀÃôÒ

$$2\text{®} \frac{ax}{h}.\Delta s = \frac{2\text{®} ax}{h}\frac{l}{h}\Delta x,$$

$$\left(\therefore \frac{\Delta s}{l} = \frac{\Delta x}{h}\right)$$

¿¨È

$$dm = \left(\frac{2\text{®} a}{h^2}.px.\Delta x\right)\pm$$

$$\bar{x} = \frac{2\text{®} al}{h^2}\pm \frac{\int_0^h x^2dx}{\text{®} a°\pm} = \frac{2}{3}h$$

3.3 ÒÅÂ÷ôÒ¨ÁÂõ

¦À¡Õû ´ýÈý ¦¸¡Î ì¸ôÀð Î ûÇ ¾¨º§¸¡ð§º÷ì¨¸ì Ì ¯¡Â «¨ÁôÀø (*Orientation*), ÒÅÂ÷ôÒÅ¨º ¿¨Äì Ìò¾¡¸ ¸ú§¿¡ì¸Â ¾¨ºÂø ¦ºÂøÀÎ¸ÈÐ. Å¨Ç× Å¨º ¦ºÂøÀÎõ §¸¡Îõ ¿¨Äì Ìò¾¡¸ ¸ú§¿¡ì¸Â ¾¨ºÂø ¦ºÂøÀ¼§Å ñ Îõ ±ýÈ¡¸ÈÐ. ±É§Å

$$\underline{F} = \int d\underline{F} = -\int gdm\underline{k} = -g\int dm\underline{k} = -mg\underline{k}$$

¦À¡ÕÇý §Áø¦ºÂøÀÎõ ¦Á¡ò¾ ÒÅÂ÷ôÒ þØÅ¨º¡Ìõ.
ÀÃó¾¦ÅÇÂø «¨ÁÔõ O ÒûÇÂø OX,OY,OZ «îÍ¸û ±Î ì¸ôÀÎ Å¾¡¸ø

$$\underline{r_c} \wedge \underline{F} = r \wedge (-gdm\underline{k})$$

«øÄÐ $\underline{r_c} \wedge (-mg\underline{k}) = \int \underline{r} \wedge (-gdm\underline{k})$

«øÄÐ $\underline{r_c} \wedge m\underline{k} = \int \underline{r} \wedge dm\underline{k}$

±É§Å

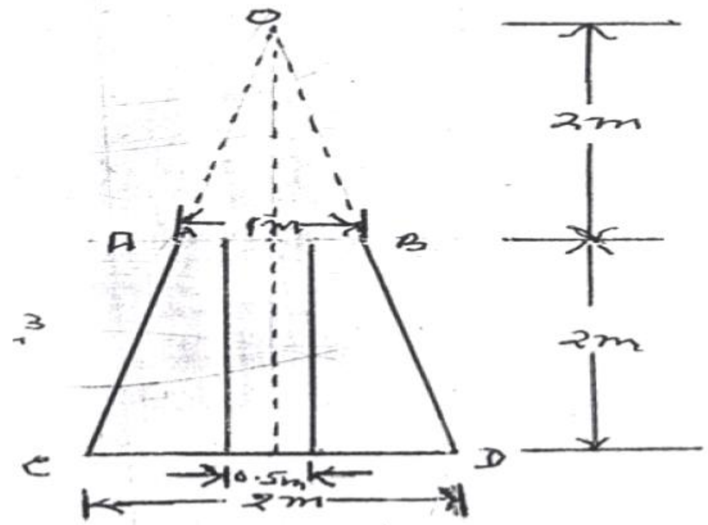
$$x_c = \frac{1}{m}\int xdm = \frac{1}{m}\int x° dv$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int ydm = \frac{1}{m}\int y° dv$$

±É§Å m ¾¢½¢×ûÇ ¦À¡Õû ´ýÈ¢ø ÒÅ¢Â¢÷ôÒÅ¢¨º ¦ºÂøÀÎõ§¸¡Î ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºøÄ §Å ñ ÊÂ¾¡¸¢ÈÐ.

Á¡¾¢¡¢

¾¢ ñ Á Åð¼ §¿÷Ü õÀ¢ý ¦Á¡ò¾ ¯ÂÃõ 4m ¬¸×õ «¾ý «Êò¾ðÊý Å¢ð¼õ 2m ¬¸×õ ¯ûÇÉ. þì Üõ À¢ý «Êò¾Çõ 2m ¯ÂÃÓûÇÐ. «¾¢ø 0.5m Å¢ð¼ÓûÇ Ð¨½ ºÁÎºÃÎº¢ø ¯ûÇÐ. «Êì¸ ñ ¼ò¾¢ý ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ÁÂò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.



படம்

Å¢¨¼

«Êì¸ ñ ¼õ ¿¢¨Ä «îÍÌî ºÁÎºÃ¡¸ ¯ûÇ¾¡ø «¾ý ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ÁÂõ, ¿¢¨Ä «îº¢ø þÕì¸ò¾ì¸Ð.

ÜõÀ¢ý ¿¢¨Ä¦ÅðÎ Ó¸õ À¼ò¾¢ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ.

CD ÜõÀ¢ý «Êì§¸¡Î ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ «îº¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ

(1) OCD Åð¼ §¿÷ÜõÀ¢ý ÀÕÁý

$$v_1 = \frac{\text{®}}{3}.R^2.H$$

$$= \frac{\text{®}}{3}(1)^2.4 = \frac{4\text{®}}{3}m^3$$

$$y_1 = \frac{4}{4} = 1m$$

(2) OAB Åð¼ §¿÷ÜõÀ¢ý ÀÕÁý

$$v_2 = \frac{®}{3}.r^2.h$$

$$= \frac{®}{3}(5)^2.2 = \frac{®}{6} m^3$$

$$y_2 = Z + \frac{2}{4} = 2.5m$$

(3) Åð¼òÐ ¨ ÇÂ¢ý ÀÕÁý

$$v_3 = \frac{®}{4}.d^2.h = \frac{®}{4}(0.5)^2(2) = \frac{®}{8} m^3$$

$$y_3 = \frac{2}{2} = 1m$$

±É§Å

Á¡¾¢¡¢

$$\bar{y} = \frac{v_1y_1 - v_2y_2 - v_3y_3}{v_1 - v_2 - v_3} = \frac{19}{25} = 0.76$$

$y = x, y = x^2$ ±ýÈ Å ¨ ÇÅ ¨ Ã×¸ Ù ì Ì û «¼í ¸¢Â ÀÃôÀÇ ¨ ÅÂ¢ý ¾¢ ñ Áô Òû Ç¢ ¨ Âò ¾¡÷Á¡ É¢ì ¸ ×õ.

¾¡÷× 1:

º¢È¢Â ÀÃôÀÇ× dA ¿¢ ¨ Äì Ì ò¾ ± Î ôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û Ç×õ.

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A x dA} = \frac{\int_0^1 x(y_2 - y_1)dx}{\int_0^1 (y_2 - y_1)dx} = \frac{\int_0^1 x(x - x^2)dy}{\int_0^1 (x - x^2)dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} = 0.5m$$

þ í Ì « î Íò ¦¾¡ ¨ Ä× ¸ û Á¡ð¼¡¢ø « ÇÅ¢¼ôÀ Î Å¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û Ç×õ)

¾¡÷× 2:

º¢È¢Â ÀÃôÀÇ× dA ¸¢ ¨ ¼± Î ôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ¸ . ±É§Å

$dA = \left(x_1 - x_2\right) dy$ þ ôÀÃôÒ

¾¢ ñ Á ¨ ÁÂõ ; $\bar{x} = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$$\bar{x} = \frac{\int_A \bar{x}\,dA}{2} = \frac{\int_0^1 \left[\frac{x_1+x_2}{2}\right]\left(x_1-x_2\right)dy}{\int_0^1 \left(x_1-x_2\right)dx}$$

$$= \int_0^1 \frac{\left[\frac{\sqrt{y}+y_2}{2}\right]\left(\sqrt{y}-y\right)dx}{\int_0^1 \left(\sqrt{y}-y\right)dy}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\int_0^1 \left(y-y^2\right)dy}{\int_0^1 \left(\sqrt{y}-y\right)dy}$$

þôÒûÇ¢¨Âò ¾¢½¢× ¨ÁÂõ ±É×õ ÜÈÄ¡õ.

ÅÊÅ¦Á¡ýÈ¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò¨¾ì ¸ñ Î¦¸¡ûÙõ Ó¨ÈÂ¡ÉÐ, ¦À¡Õ¦Ç¡ýÈ¢ý ÒÅ¢Â£÷ôÒ ¨ÁÂò¨¾ì ¸ñ Î¦¸¡ûÅ¨¾§Â ´òÐûÇÐ.

3.5 ÒÅ¢Â£÷ôÒ ¨ÁÂõ («øÄÐ ¾¢½¢× ¨ÁÂõ) ´ý¨È ¸ñ Î¦¸¡ûÇ À¢ýÅÕõ Ó¨È¸û §¾¨ÅôÀÎ¸¢ýÈÉ.

1. ÅÊÅ¸½¢¾ Ó¨È
2. ¾¢ÕôÒò¾¢Èý Ó¨È
3. Å¨ÃÀ¼õ º¡÷ó¾Ó¨È

1. ±Ç¢¾¡É ¯ÕÅí¸Ç¢ý ÒÅ¢Â£÷ôÒ ¨ÁÂôÒûÇ¢¨Â, ´ù¦Å¡Õ ¯ÕÅò¾¢üÌ¡¢Â ÅÊÅ¸½¢¾ «¨Áô¨À ¦¸¡ñ Î ¾£÷Á¡É¢ì¸ ÓÊÔõ.
2. ¾Ç¦Á¡ýÈ¢ø «¨ÁÔõ ¾¢½¢×ûÇ ¦À¡Õû ´ý¨È, $m_1, m_2, m_3....$ ¾¢½¢× ¦¸¡ñ¼ º¢È¢Â À Ì¾¢¸Ç¡¸, Ó¨È§Â ox, oy «îÍ¸¨Çì ÌÈ¢òÐ, «¨Å¸Ç¢ý ÒÅ¢Â£÷ôÒ ¨ÁÂí¸û(x_i y_i)(i) i=1,2,3......n ±ýÈ þ¼í¸Ç¢ø அமைவதாகக் ¦¸¡ñ Î அமையும் திருப்புத்திறனைக் கொள்க, O புள்ளியில் அமையும்

$$\left\{ M\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i ; M\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i M = \sum_{i=1}^{n} m_i \right\}$$

«ô¦À¡ÕÇ¢ý ÒÅ¢Â£÷ôÒûÇ¢¨Â

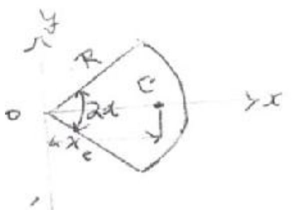
$\left(\bar{x} = \frac{1}{M}\sum mx, \bar{y} = \frac{1}{M}\sum my, \bar{z} = \frac{1}{M}\sum mz\right)$ ±ýÚ Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ.

"¾¢¨ºÂ¢"¿¢¨Ä $\left(Position\ Vector\right)$ ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ¨ÁÂôÒûÇ¢ C-ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{r_c} = x_c\underline{i} + y_c\underline{j} + z_c\underline{k}$ ±É ì ¦¸¡ ñ Î ¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢ý þÕôÀ¢¼ò¨¾ò ¾£÷Á¡É¢ì¸Ä¡õ.

I ¿¦ÇÓûÇ Å¨Ç× ´ýÈ¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂõ Ó¾Ä¡ÅÐ ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÉ¢ý

« ÊôÀ¨¼Â¢ø $\underline{r_c}l = \int \underline{r}dl,\ r_c = \frac{1}{l}\int \underline{r}dl$

À¢ý ÅÕõ «ð¼Å¨½Â¢ø, I ¿¦ÇÓûÇ Å¢ø (arc) ´ýÈ¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢ò ¦¾¡¨Ä× Å¨ÃÂÚì¸ôÀð Î ûÇÐ.

Å¢Çì¸õ	ÀÆÅõ	¿¦Çõ	x_c
Åð¼Å¢ø		$2R\sim$	$\frac{R\sin\sim}{\sim}$
¸¡øÅð¼ô À Ì ¾¢ $2\sim = \frac{®}{2}$		$\frac{R}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}R}{®}$
« ¨ÃÅð¼ô À Ì ¾¢		$® R$	$\frac{2R}{®}$
ÓØÅð¼õ $2\sim = 2®$		$2® R$	$x_c = 0, y_c = 0$

3 .6 º¢È¢Â Å¢¨¼¸ Ù ì ¸¡É §¸ûÅ¢¸ û

1. Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â º¡¢¿¢¸Ã¡É "Å¢¨º-Í Æ¢¨½ ´ Î ì ¸ò¨¾ Å¢Çì Î .
2. Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â¨¾ ÍÆ¢¨½Â¡¸ ´ Î ì ¸ôÀ Î õ§À¡Ð ÀÂýÀ Î ò¾ôÀ Î õ Å¢¨Ç ¨Å Å ¨ÃÂÚì ¸.
3. ÓôÀ¡¢Á¡½ « ¨ÁôÀ¢ø ¾¢¼ô¦À¡Õû ´ýÈ¢ý º¡¿¢¨Äì¸¡É §Å ñ ÊÂ ÁüÚõ §À¡¾¢Â ¿¢Àó¾¨É ¸¨Ç ì Ü È×õ
4. ¾¢ ñ Á ¨ÁÂõ ÁüÚõ ÒÅ¢ÕÂ¢÷ôÒ ¨ÁÂõ ¬¸¢ÂÅü¨È Å ¨ÃÂÚì ¸.
5. þÕÀ¡¢Á¡½ í ¸¨Çô ¦ÀüÈ ¦À¡Õû ´ýÈ¢Û ¨¼ÂÅ ÒÅ¢ÕÂ¢÷ôÒ ÒûÇ¢Â¢ý « î Íò ¦¾¡¨Ä× ¸û ±ùÅ¡Ú ¦ÀÇ¢ô À Î ò¾ôÀ Î ¸¢ÈÐ.
6. ´Õ ÀÃôÀ¢ü¸¡É ¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢¨Â ¸¡ ñ À¾ü¸¡¸ ¯¡¢Â §¸¡¨Å¸¨Ç «Ç¢ò¾¢Î ¸
7. Å¨Ç×§¸¡Î ´ýÈ¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò¨¾ì ¸¡ ñ À¾üÌ ¯¡¢Â §¸¡¨Å¸¨Çò ¾Õ¾¢Î ¸.
8. ÀÃôÒ ´ýÈ¢ý Ó¾üÅÊ Å¢Äì¸ô ¦ÀÕì¸ò¦¾¡¨¸ (First moment) ±ýÀ¨¾ Å¢Çì¸ Î ¸.
9. Üð Î ¦Àð Î í ¸Ç¢ý §º÷ì¨¸ ì¸¡É ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒûÇ¢¨Âì ¸ ñ Î ¦¸¡ûÅ¨¾ Å¢Çì¸ Î ¸.
10. ¦¾¡¨¸Â¢¼ø ãÄÁ¡¸ ¾¢½¢× ¨ÁÂò¨¾ì ¸¡ ñ À¾üÌ ที่ய

ºÁýÀ¡ Î ¸ ¨Ç ±Ø¾×õ.

11. ÍüÈ¢ý §ÁüÀÃôÒ $\left(Surface\ of\ revolution\right)$ ´ýÚ ±ùÅ¡Ú ¯ÕÅ¡ì ¸ôÀ Î ¸¢ÈÐ?
12. ÍÆüº¢Â¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ ¦À¡Õû ´ýÚ ¯ÕÅ¡ì ¸ôÀ Î Å ¨¾ Å¢Çì Ì ¸.
13. ÀôÒŠ - Ì øÊ¿¡ஸ் (GUI papusdinus) §¾üÈò ¨¾ì ÜÚ ¸
14. ÍÆüº¢Â¡ø ¿¢¸Øõ §ÁüÀÃô ¨À Å ¨ÃÂÚôÀ¾ü¸¡É §¸¡ ¨Å ¨Âì ¦¸¡ Î ì ¸×õ.
15. ±ó¾ ¿¢Àó¾ ¨É ¸Ç¢ý «ÊôÀ ¨¼Â¢ø (a) ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒûÇ¢Ôõ, ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ÁÂÓõ (b) ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ÁÂÓõ ¾¢½¢× ¨ÁÂÓõ ´§Ã þ¼ò¾¢ø þ ¨ ½Ôõ?
16. þÕ¾¢ ¨º «Ç×Õ× ¸û (vectors) «Ç× ¸û ´ýÈü¦ ¸¡ýÚ ¦ºí Ì ò¾¡¸ «¨ÁÅÐ «ÅüÈ¢ý ÌÚì Ìô ¦ÀÕì ¸ø â îº¢ÂÁ¡¸ §Å ñ Î õ
17. ¾¢ ¨ º Â¢Ä¢ ¨ Âô ¦À¡ÚòÐ, ¾¢ ¨ º «Ç×ÕÅ¢ý Å ¨ ¸ì¦ ¸Ø (*DIFFERNTIATION*) ¾¢ ¨ º «Ç×Õ ´Õ Á¡È¢Ä¢¾¢ ¨ º «Ç×ÕÅ¡¸¢ø â îº¢ÂÁ¡ Ì õ.
18. ¾¢ ¨ º Â¢Ä¢ ¨ Âô ¦À¡ÚòÐ ¾¢ ¨ º «Ç×ÕÅ¢ý ¦¾¡ ¨ ¸ (int*egral*) ¦ ¸¡ Î ì ¸ôÀð¼ ¾¢ ¨ º «Ç×ÕÅ¢ý ¦ºÂøÀ Î õ ¾¢ ¨ º ¨ Âò ¾Å¢÷òÐ, ÁüÈ¾¢ ¨ º ¨ Â ²üÚì ¦ ¸¡ûÇக் கூடும்.
19. ¾¢ ¨ º Â¢Ä¢ ¨ Â º¡÷ó¾ º¡÷ÀÄÉ¢ý º¡¢×, ´Õ ¾¢ ¨ º «Ç×Õ, ¾¢ ¨ º Â¢Ä¢ º¡÷ó¾ º¡÷ÀÄÉ¢ý ¦ºí Ìò¾¡É Á¡ÚÀ¡ð Î ¾¢ ¨ º Â¢ø « ¨ ÁÂ§Å ñ Î õ.
20. r ¬ ¨ ÃÔûÇ ´Õ « ¨ ÃÅð¼ò¾¢ø Å¢ø ´ýÈ¢ý ¾¢½¢× ¨ ÁÂò¾¢ý þÕôÀ¢¼ò ¨ ¾ ¸¡ ñ ¸.

$$A\bar{y} = 2\int_0^{\frac{®}{2}} \left(R^2 d\sim\right) R\cos\sim \;=\; 2R^2 d\sim \int_0^{\frac{®}{2}} \cos\sim d\sim$$

$$= 2R^2 \left[\sin\sim\right]_0^{\frac{®}{2}} = 2R^2$$

$$A = ®R$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{2R^2}{®R} = \frac{2R}{®}$$

¾¢½¢× ¨ ÁÂò¾¢ý þÕôÀ¢¼õ $= \left(0, \dfrac{2R}{®}\right)$

21. ´§Ãº£Ã¡É ¾Êò¾ûÇ ¾¸ Î ´ýÚ ºÁÀÊò¾ா ¾¸ Î ´ýÈü Ì ¾¢½¢× ¨ ÁÂÓõ ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ ÁÂÓõ ´ýÚÀ Î õ.

Å¢ ¨ ¼:

ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ ÁÂõ (*centreofgravity*)

¾¢ ¨ º §¸¡ð §º÷ì ¨ ¸ ±ùÅ¡È¡Â¢Ûõ ¦À¡ÕÇ¢ý « ¨ ÉòÐ ¿¢ ¨ÈÔõ ¦ºÂøÀ Î õ ÒûÇ¢§Â ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ ÁÂõ ±ýÚ Å ¨ ÃÂÚì ¸ôÀ Î õ.

¾¢½¢× ¨ ÁÂôÒûÇ¢ (*centreofmass*)

¦À¡ÕÇ¢ý ÓØ ¨ ÁÂ¡É ¾¢½¢×õ µ¡¢¼ò¾¢ø ¾¢Ãð¼ôÀ Î Å¾¡¸ ¾ü§¸¡Ç ´ý ¨ È « ¨ ÁÂÐ ì ¦ ¸¡ ñ ¼¡ø, «ôÒûÇ¢ ¨ Â ¾¢½¢× ¨ ÁÂôÒûÇ¢ ±ýÚ

Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

¾¢½¢× ¨ÁÂõ $(Centroid)$

¾Ç¦Á¡ýÈ¢ø «¨ÁÔõ ¯ÕÅ¸í¸Ùì¸ ÓØ¨ÁÂ¡É ÀÃôÒ µ¡¢¼ò¾¢ø ¾¢Ãð¼ôÀÎÅ¾¡¸ ¾ü§¸¡ள் ´ý¨È «¨ÁòÐì¦¸¡ñ¼¡ø «ôÒûÇ¢ ¾¢½¢× ¨ÁÂõ ±ýÚ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

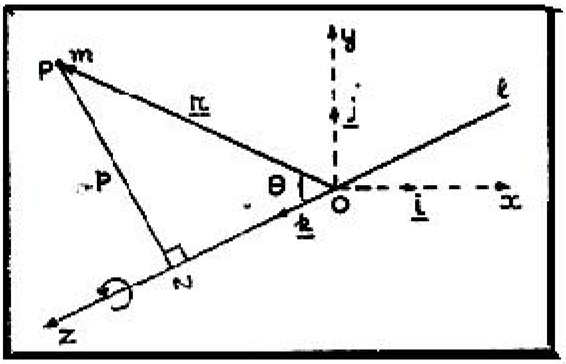
¿¨¼Ó¨ÈÂ¢ø ¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢Ôõ, ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ÁÂÓõ ´ý§È ±ýÚ ¦¸¡ûÇôÀÎõ. ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¸Çõ ´Õ º£Ãற்றதாக ¯ûÇ§À¡Ð ÁðÎ§Á þùÅ¢Ãñ Îõ Á¡ÚÀÎõ.

« ò¾¢Â¡Âõ 2
¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý
(Moment of Inertia)

¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû¸Ç¢ý þÂì¸ò¨¾ «È¢Å¾¢ø Óì¸¢ÂÀí¨¸ ¦ÀÚÅÐ ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢ÈÉ¡Ìõ.

3.7 ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢È ý .

´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ §¿÷§¸¡ðÊÄ¢ÕóÐ, p ¦¾¡¨ÄÅ¢Ö ûÇÐõ, m ¿¢¨È¨ÂÔ¨¼ÂÐÁ¡É Ð¸û ´ýÚ, «ì§¸¡ðÊ¨É «îº¡¸ì¦¸¡ñÎ ÍÆÖÁ¡Â¢ý, mp^2 ±ýÛõ ¦ÀÕì¸üÀÄý «ì§¸¡ð¨¼ôÀüÈ¢Â, «òÐ¸Ç¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý ±ÉôÀÎõ.



À¼õ (7.1)

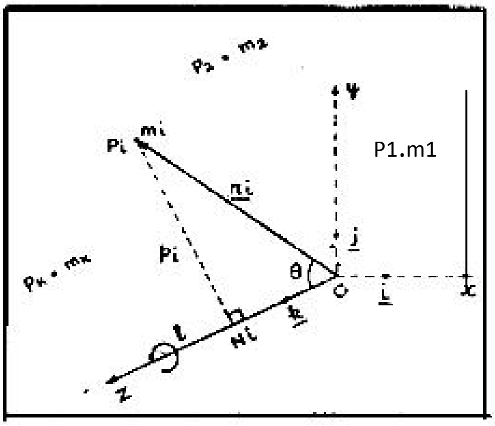
±É§Å,

¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý = ¿¢¨È×(¦¾¡¨Ä×)^2 ¬Ìõ.

« ùÅ¡§È, $m_1, m_2, m_3, ...m_i.........m_n$ ±ýÛõ ¿¢¨È¸¨ÇÔ¨¼Â Ð¸û¸û À¼õ (7.2) ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, l ±ýÛõ ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ §¿÷§¸¡ðÊÄ¢ÕóÐ, Ó¨È§Â - $p_1, p_2, ...p_i, ...p_n$ ±ýÛõ ¦¾¡¨Ä×¸Ç¢ø þÕôÀ¢ý, «ò¦¾¡Ì¾¢Â¢ý «ì§¸¡ð¨¼ôÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý.

$$I = m_1 p_1^{\;2} + m_2 p_2^{\;2} + ...m_i p_i^{\;2} + ...m_n p_n^{\;2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i p_i^{\;2}$$ ¬Ìõ.



À¼õ (7.2)

Ì È¢ôÀ¢ð¼ §¿÷§¸¡ð¨¼ z «î¾¢¸ì¦¸¡ñ¼, xoy ±ýÛõ ¸ð¼¨ÁôÀ¢ø, $\underline{r}$ ±ýÀÐ Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â, À¼õ (7.1)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸¢ø,

$$\underline{k} \wedge \underline{r} = l.r \sin^{-} \underline{n_+}$$ ¬Ìõ.

(þí Ì n^+ ±ýÀÐ $(\underline{k}, \underline{r})$ ¾Çò¾¢üÌî ¦ºí ÌòÐò ¾¢¨ºÂ¢Ä¨ÁÔõ µÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ìõ.)

§ÁÖõ ¯ ±ýÀÐ z «îÍìÌõ, $\underline{r}$ ìÌõ þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ §¸¡½Á¡Ìõ.

$$(\underline{k} \wedge \underline{r}).(\underline{k} \wedge \underline{r}) = \left(r \sin^{-} \underline{n_+}\right).\left(r \sin^{-} \underline{n_+}\right)$$

«¾¡ÅÐ $|\underline{k} \wedge \underline{r}|^2 = r^2 \sin^{2-} = p^2$ ¬Ìõ.

±É§Å Ð¸Ç¢ý, l ³ôÀüÈ¢Â, ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÀÒ¾¢È¨É

$I = mp^2 = |\underline{k} \wedge \underline{r}|^2 m$ ±É ×õ ±Ø¾Ä¡õ.

«ùÅ¡§È, Ð¸û ¦¾¡Ì ¾¢Â¢ý, z «î¨ºôÀüÈ¢Â, ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÀÒ¾¢Èý

$$I = \sum_{i=1}^{n} mipi^2 = \sum_{i=1}^{n} mi|\underline{k} \wedge \underline{r}|^2$$ ±ýÈ¡Ìõ.

¤ ±ýÛõ ²§¾Û¦Á¡Õ µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢ìÌ þ¨½Â¡¸ -- ÅÆ¢§Â ±Îì Ìõ «î¨ºôÀüÈ¢Â, Ð¸¦Ç¡ýÈ¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÀÒ¾¢Èý,

$$I = |¤ \wedge \underline{r}|^2 m$$ ¬Ìõ.

3.7.1. ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ «îÍ ÀüÈிய, ¸ðÊÚìகுõ ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÀÒ¾¢Èý

¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇû ±ýÀÐ, Δm நிை¨ÈÔ¨¼Â ± ñ ½üÈ Ð¸û¸¨Çò ¦¾¡¼÷î¢º¡¸ì ¦¸¡ñ ÊÕôÀ¾¡¸ì ¦தொள் Å¾¡ø. z «î¨ºôÀüÈ¢Â, «¾ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÀÒ¾¢Èý,

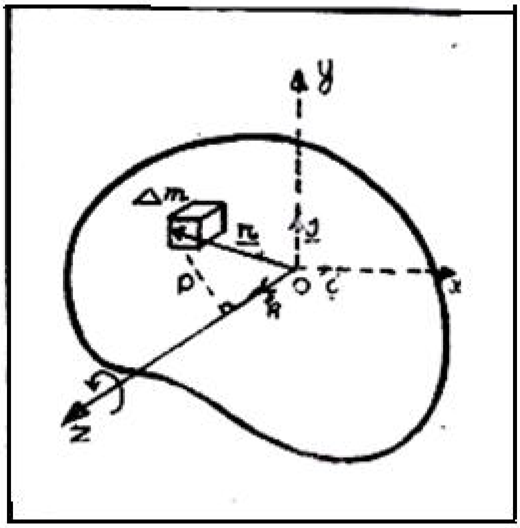
$$I = \text{±ø¨Ä}_{\Delta m \to 0} \sum p^2 \Delta m$$

$$= \text{±ø¨Ä}_{\Delta m \to 0} \sum |\underline{K} \wedge \underline{r}|^2 \Delta m$$

$$= \int_m |\underline{K} \wedge \underline{r}|^2 \, dm$$

¬Ìõ.

þí Ì ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨ÈÓØÅÐõ «¨¼À Îõ Å¨¸Â¢ø ¦¾¡¨¸Â¢ð Î ±ø¨Ä¸û Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.



À¼õ (7.3)

3.7.1. ÍÆüº¢ ¬Ãõ (Radius of gyration)

¦À¡Õû ¿¢¨È M ÓØÅÐõ «¾ý ÒÅ¢Â÷ôÒ ¨ÁÂò¾¢ø ¦ºÈ¢óÐûÇÐ¡¸ì ¦¸¡ñ Î, «ôÒûÇ¢ Ì È¢ôÀ¢ð¼ «î º¢Ä¢ÕóÐ K ¦¾¡¨ÄÅ¢Ä¢Õì Ì ¦ÁÉ¢ø,

$$MK^2 = \int p^2 dm$$ ---------------------- ¬ Ì õ.

«¾¡ÅÐ $$K^2 = \frac{\int mP^2 dm}{\int mdm}$$ ------------------ ±ý È¡ Ì õ.

K ±ýÀÐ ¦À¡ÕÇ¢ý «ì Ì È¢ôÀ¢ð¼ «î ¨ºôÀüÈ¢Â ÍÆüº¢ ¬Ãõ ±É ôÀ Î õ.

3.7.2 ¿¢¨ÄÁò திருப்புதிறனி¢ý «Ä Ì ¸û

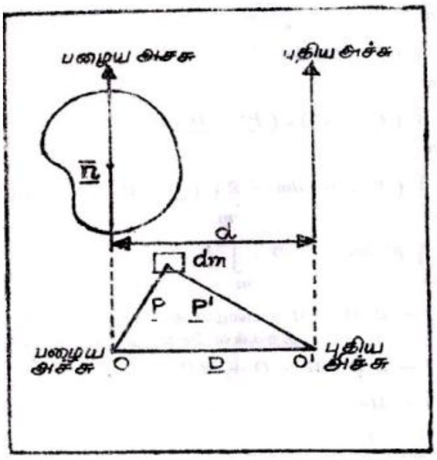
¦Áð¡¢ì `$CGS'$` முறை¢Â¢ø, ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢ÈÉ¢ý «Ä Ì ¸û, ¸¢Ã¡õ (¦º.Á¡)^2 ¬ Ì õ.

¦Áð¡¢ì `$MKS'$`முறையில், «¾ý «Ä Ì ¸û, ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ (Á¡)^2 ¬ Ì õ.

À¢¡¢ð¼ý `$FPS'$` முறையில், «¾ý «Ä Ì ¸û, À× ñ Î («Ê)^2 ¬ Ì õ.

3.8 þ ¨ ½ «î Í ò §¾üÈõ (The parallel-axis theorem)

¸ðÊÚì ¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºøÄ¡¾ ²§¾Û §Á¡÷ «î ¨ºôÀüÈ¢Â ÍÆüº¢ì Ì , «ùÅî ¨ºô ÀüÈ¢Â p' ±ý Ûõ ÍÆüº¢ ¬ÃÁ¡ ÉÐ, «ùÅîº¢ü Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ò ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý ÅÆ¢§Â Å ¨ÃÂôÀ Î õ «î ¨ºôÀüÈ¢Â $\overline{p}$ ±ý Ûõ ÍÆüº¢ ¬Ãõ, «ùÅ¢ ¨ ½ «î Í ¸Ç¢ý þ ¨¼ò¦¾¡ ¨Ä× d ¬ ¸¢ÂÅü ¨Èì ¦ ¸¡ ñ Î $p'^2 = p^2 + d^2$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å ¨ÃÂÚì ¸ôÀ Î õ.



À¼õ (7.4)

dm ±ýÀÐ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý ´Õ º¢È¢Â ãÄ¸¯ÚôÀ¢ý ¿¢¨È¨Âì Ì È¢ì¸ðÎõ. «î º¢È¢Â ¿¢¨ÈÂ¢ý ÅÆ¢§Â, þÕ þ¨½ «îÍ¸Ùì Ìî ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ ¾Çò¨¾ ±Îì¸. À¼õ (7.4)- ø, O,O' ±ýÀ¨Å, «ùÅ¢¨½ «îÍ¸û ¾Çò¨¾î ºó¾¢ìÌõ ÒûÇ¢¸¨Çì, ÌÈ¢ì¸ðÎõ,. O,O' ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ç¢Ä¢ÕóÐ dm ±ý Ûõ ãÄ¸¯ÚôÀ¢ý ¿¢¨Ä¨Â $\underline{p}, \underline{p}'$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢¸û Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. $\underline{D}$ ±ýÀÐ O,O' ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸¨Çî §º÷ìÌõ ¾¢¨ºÂ¢Å¡Ì¸.

±É§Å,

$\underline{p}' = \underline{p} - \underline{D}$ ¬Ìõ.

þ¾ý «¨ÁôÒ À¼õ (7.4)ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ.

¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý Ò¾¢Â «î¨ºôÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý.

$$I' = \int_m p'^2 dm$$

$$= \int_m (\underline{p}'.\underline{p}')dm$$

$$= \int_m (\underline{p} - \underline{D}).(\underline{P} - \underline{D})dm$$

$$= \int_m (\underline{p}.\underline{p})dm - 2\int_m (\underline{p}.\underline{D})dm + \int_m (\underline{D}.\underline{D})dm$$

$$= \int_m p^2 dm - 2.\underline{D}\int_m \underline{p}dm + d^2 \int_m dm$$

$= I - \underline{2D}.$ $(M \times$ À¨ÆÂ «îº¢Ä¢ÕóÐ ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢üÌûÇ ¦ºí ÌòÐò ¦¾¡¨Ä×$) + Md^2$

$= I - 2D.M \times O + Md^2$

$= I + Md^2$

« øÄÐ, $\frac{I'}{M} = \frac{I}{M} + d^2,$

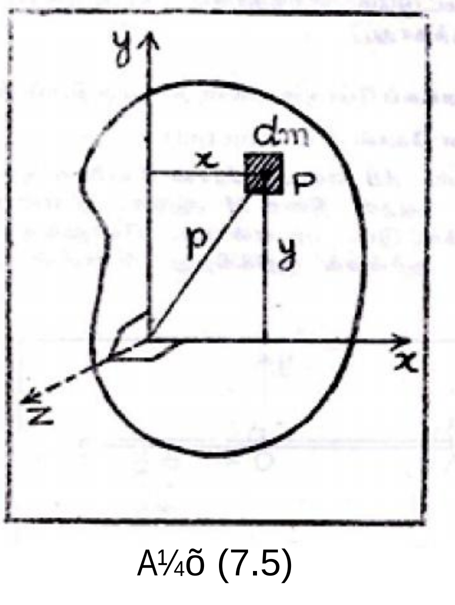
« ¾¡ÅÐ, $p'^2 = p^2 + d^2$ ¬ Ì õ.

±É§Å, M ¿¢¨ÈÔ¨¼Â ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ÒÅ¢Â÷ôÒ மையம் ÅÆ¢Â¡¸î ¦ºøÖõ ²§¾Û §Á¡÷ «î¨ºôÀüÈ¢ «¾ý ¿¢¨ÄÁò¾¢Èý I என்றாø, «ó¾ «î º¢üÌ þ¨½Â¡¸ «¾¢Ä¢ÕóÐ d ¦¾¡¨ÄÅ¢ÖûÇ Áü§È ார் அச்ச் ºôÀüÈ¢Â ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨ÄÁò¾¢Õô¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý.

$I^1 = I + Md^2$ ¬ Ì õ.

3.9 ¦ºí Ì ò¾î Íò §¾üÈõ (The Perpendicular-axis Theorem)

´Õ ¾Çò¾ðÊÄ¨ÁÔõ $(Plane\ lamina)$ ox, oy என்னும் இÕ ¦ºí Ì ò¾î Í¸¨Çô ÀüÈ¢Â, «ò¾¸ðடின் நிலைமத் திருப்புதிறன்கள் (முறையே, I_x I_y ±ýÈ¡ø, O ÅÆ¢§Â «ò¾ðÊü Ì î ¦ºí Ì ò¾¡¸ Å¨ÃÂôÀÎõ OZ ±ý Ûõ «î Í ÀüÈ¢Â «¾ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý $I_z = I_x + I_y$ ¬ Ì õ.



À¼õ (7.5)

À¼õ (7.5)ø, dm என்பது, P (x, y) ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø «¨ÁÔõ Ð¸Ç¢ý ¿¢¨È¨Âì Ì È¢ì¸ð Î õ. $OP = p$ ஆ Ì ¸.

0z பற்றி அத்Ð¸Ç¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý

$= dm.P^2$

$= dm\left(x^2 + y^2\right)$ ¬ Ì õ.

±É§Å, oz ÀüÈ¢, ¾ðÊ ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

$$= \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm$$

$$= I_y + I_x$$

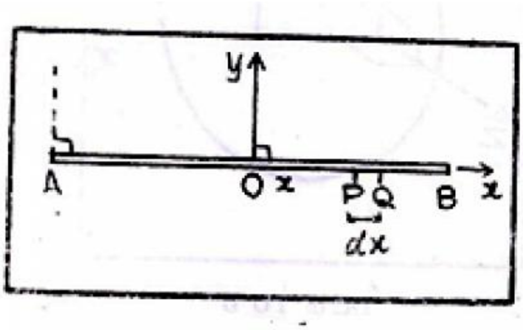
$$= I_x + I_y$$

(Ì È¢ôÒ: þ ò§¾üÈõ ¾Çò¾¢Ä ¨ ÁÔõ ¾ð Î §À¡ ý È ¦À¡Õ û ¸ Ù ì Ì Áð Î §Á ²üÈ¾¡ Ì õ, ¸ðÊÚ ì ¸ô ¦À¡Õ û ¸ Ù ì Ì þÐ ¦À¡Õó¾¡Ð.)

3.10 º¢Ä ¸ðÊÚ ì ¸ô ¦À¡Õ û ¸Ç¢ ý ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý

3.10.1 ´Õ º£Ã¡ É §¸ ¡ø (Uniform rod)

À¼õ (7.6) AB ±ý ÀÐ º£Ã¡ É §¸ ¡ ¨ Äì Ì È¢ì ¸ð Î õ. AB = 2a ¬ Ì ¸. «¾ý ¿¢ ¨ È M ¬ Ì ¸. O ±ý ÀÐ «¾ý ¨ ÁÂò ¨ ¾ì Ì È¢ì ¸ð Î õ. Oy ±ý ÀÐ, §¸ ¡Öì Ì î ¦º í Ì ò¾¡ ¸ « ¨ ÁÔõ « î ¨ º ì Ì È¢ì ¸¢ÈÐ. §¸ ¡Ä¢ý «¼÷ò¾¢ ° ¬ Ì ¸.



A¼õ (7.6)

· Oy பற்றிÂ, « ì§¸ ¡Ä¢ý ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý

$$\int_m \circ^{2} dm$$

$$= \int_{-a}^{+a} x^2 \left(\circ\, dx \right)$$

$$= 2\rho \frac{a^2}{3} = \left(2a\circ\right)\frac{a^2}{3} = M\frac{a^2}{3} \text{ ¬ Ì õ.}$$

A ±ý Ûõ Ó ¨ ÉÅÆ¢§Â Oy யிற்கு Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ î ¦ºøÖõ « î ¨ ºôÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý, þணையச் Íò §¾üÈò¾¢ ý ÀÊ,

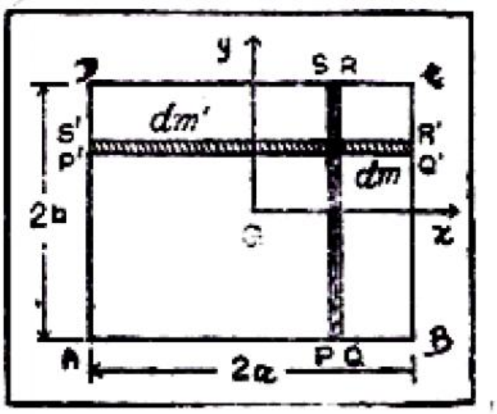
$$= M\frac{a^2}{3} + Ma^2 = \frac{4Ma^2}{3} \text{ ¬ Ì õ.}$$

3.10.2. º£Ã¡ É ¦ºùÅ¸ò ¾ð Î

ABCD ±ýÀÐ 2a, 2b ±ýÈ À¡¸í¸¨Çì ¦¸¡ñ¼ ´Õ ¦ºùÅ¸Á¡Ì¸. «¾ý ¾¢½¢× ¨ÁÂõ G ¬Ì¸.

M ±ýÀÐ «¾ý ¿¢¨È¨Âì ÌÈ¢ì¸ðÎõ.

Gx, Gy ±ýÀ¨Å À¼õ (7.7)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú AB,DA ×ìÌ þ¨½Â¡É «îÍ¸¨Çì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. (7.7) ¬ÅÐ À¼ò¾¢ø, PQRS ±ýÀÐ Gx ìÌî ¦ºíÌò¾¡¸ ±Îò¾ Ðñ¼¡Ìõ.



À¼õ (7.7)

dm ±ýÀÐ «¾ý ¿¢¨È¨Âì ÌÈ¢ìÌÁ¡É¢ø, GxÀüÈ¢ «¾ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý

$$= dm \times \frac{b^2}{3}$$ ¬Ìõ.

±É§Å,Gx ÀüÈ¢î ¦ºùÅ¸ò ¾ðÊý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý

$$= \int_m \frac{b^2}{3} dm = \frac{b^2}{3} \int_m dm = M \frac{b^2}{3}$$

«ùÅ¡§È Gy ÀüÈ¢, ¦ºùÅ¸ò ¾ðÊý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý

$$\int_m \frac{a^2}{3} dm' = \int_m \frac{a^2}{3} dm' = M \frac{a^2}{3}$$

G ÅÆ¢§Â ¾ðÊý ¾Çò¾¢üÌî ¦ºíÌò¾¡¸ ±ÎìÌõ «îÍÀüÈ¢ ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý, ¦ºíÌò¾¡îÍ §¾üÈò¾¢ý ÀÊ

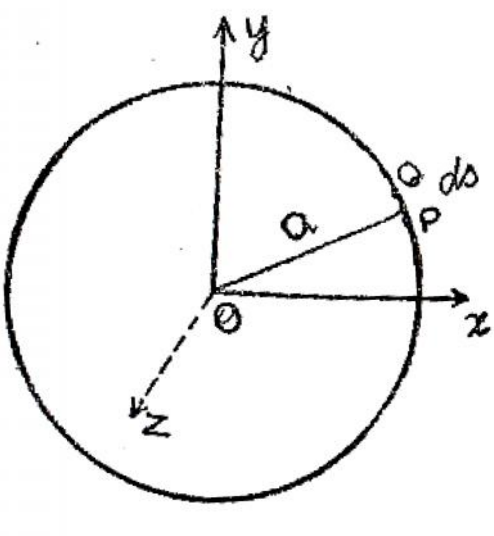
$$= \frac{M}{3}(a^2 + b^2)'$$ ¬Ìõ.

3.10.3 a ±ýÛõ ¬Ãó¨¾ ¯¨¼Â ÅðÎÅ¨Çõ

(i) ¨ÁÂò¾¢ý ÅÆ¢Â¡¸ Åð¼Å¨Çò¾¢ý ¾Çò¾¢üÌî ¦ºíÌò¾¡¸î ¦ºøÖõ oz ±ýÛõ «îÍ ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý

$$I_z = \int_m {}^\circ\, {}^2 dm$$

$$= \int_m {}^\circ\, dsa^2 = a^2\, {}^\circ \int_0^{2a®} ds = \left(2® a {}^\circ\right) a^2 = Ma^2$$



A¼õ 7.8

(ii) ²§¾Û ¦Á¡Õ Å¦ð¼ò ¨¾ô ÀüÈ¦Â ¿¦¨ ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦È ý , $I = I_x = I_y$ ¬ Ì õ.

¬ É ¡ø, $I_z = I_x + I_y = 2I_x = Ma^2$

$$\therefore I = I_x = I_y = \frac{Ma^2}{2}$$

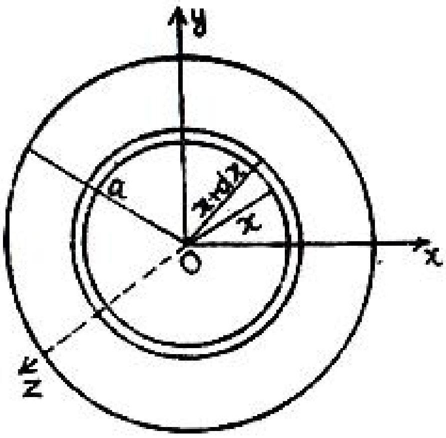
(iii) Å ¨ ÇÂò¾¦ ý ¾Çò¾¦ø ²§¾Û ¦Á¡Õ ¦¾¡ Î Å ¨ ÃÀüÈ¦ ¿¦¨ ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦È ý $= \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$

(iv) Å ¨ ÇÂò¾¦ ý À¡¦¾¦Â¦ø ²§¾Û ¦Á¡Õ ÒûÇ¦ ÅÆ¦§Â Å ¨ ÇÂò¾¦ü Ì î ¦º í Ì ò¾¡ ¸ Å ¨ ÃÔõ §¸ ¡ Î ÀüÈ¦Â ¿¦¨ ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦È ý

$$= Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

3.10.4 º¦Ã¡ É Åð¼ò ¾¸ Î

ox, oy ± ýÀ ¨ Å ¾¸ ðÊ ý ¾Çò¾¦Ä ¨ ÁÔõ ¸¦ ¨ ¼, ¿¦¨ Ä « î Í ¸ û, oz ± ýÀÐ ¾¸ ðÊü Ì î ¦º í Ì ò¾¡ É « îº¡ Ì õ.



A¼õ 7.9

$$(1) I_z = \int_0^a x^2 dm = \int_0^a x^2 (2® x dx)° = 2®°.\frac{a^2}{4}$$

$$= (2®° a^2)\frac{a^2}{2} = M\frac{a^2}{2}.$$

(ii) I = Åð¼ò¾¸ðÊý ²§¾Û¦Á¡Õ Å¦ð¼ò¨¾ôÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý

$$= I_x + I_y = \frac{I_x}{2} = M\frac{a^2}{4}$$

(iii) Åð¼ò ¾¸ðÊý ²§¾Û¦Á¡Õ ¦¾¡Î§¸¡ð¨¼ôÀüÈ¢Â ¿¢¨Ä¨Áò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý $= \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$

(iv) Åð¼ò ¾¸ðÊý À¡¢¾¢Â¢ø ²§¾Û¦Á¡Õ ÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â Åð¼ò ¾¸ðÊüÌî ¦ºíÌò¾¡¸ Å¨ÃÔõ §¸¡ÎÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý

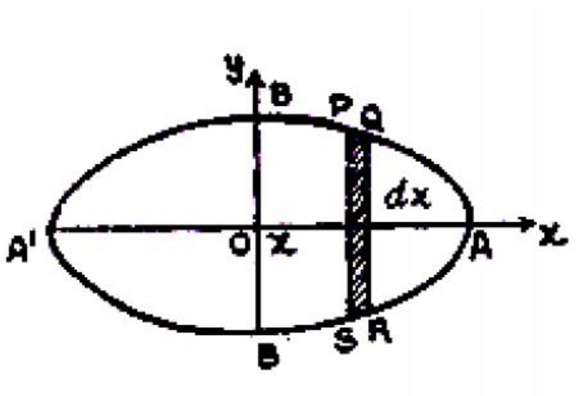
$$= \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$$

3.10.5 º¦Ã¡É ¿¦ûÅð¼ò ¾¸Î

¿¦ûÅð¼ò¾¢ý ºÁýÀ¡Î,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

º¦Ã¡É ¿¦û Åð¼ò¾¸ðÊý ¿¢¨È, $M = ®ab°$



A¼õ 7.10

(i) I_x = ¦¿ð¼î Í ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý ,

$$= \int_{-a}^{+a} (2ydx°)\frac{y^2}{3} = \frac{4°}{3}\int_0^a y^3 dy$$

$$= \frac{4°}{3}.\frac{b^3}{a^3}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{4° b^3}{3a^3}\int_0^{\frac{®}{2}} a^3\cos^3¯\, a\cos¯\, d¯ ,\left(x = a\sin¯\right)$$ ± É¢ø

$$= \frac{4° b^3}{3}\int_0^{\frac{®}{2}} \cos^4¯\, d¯$$

$$= \frac{4° b^3}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{®}{2} = \left(®ab°\right)\frac{b^2}{4} = M\,\frac{b^2}{4}$$

(ii) « ùÅ¡§È º¢üÈî Í ÀüÈ¢Â ¿¦ûÅð¼ò ¾¸ ðÊ ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ ¾¢È ý , $I_y = M\,\frac{a^2}{4}$

(iii) I_z = ¿¦ûÅð¼ò ¾¸ ðÊ ý ¾¢ ½¢× ¨ÁÂôÒû Ç¢ ÅÆ¢§Â «¾ü Ì Å¨ ÃÔõ ¦º í Ì òÐ «î ÍÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý .

$$= I_y + I_x = M\,\frac{a^2}{4} + M\,\frac{b^2}{4} = \frac{M}{4}(a^2 + b^2)$$

3.10.6 º¦Ã¡É ¯ûÇ£¼üÈ ¯Õ ¨Ç (Hollow circular cylinder)

a, h, m ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â ¯ûÇ£¼üÈ º¦Ã¡É §¿÷Åð¼ ¯Õ ¨ÇÂ¢ý ¬ ¨Ã, ¯ÂÃõ, ¿¢ ¨È ¬ ¸¢ÂÅü¨È Ì È¢ì Ì ¸ð Î õ.

(i) «¾ý «î Í ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

$$= \int_m dma^2 = a^2\int dm = Ma^2$$

(ii) «¾¨ É ¯ÕÅ¡ì Ì õ §¸¡Î ÀüÈ¢(generating line) ¿¢¨ÄÁò

¾¢ÕôÒ¾¢È ý

= ¯Õ ¨ÇÂ¢ ý « î Í ÀüÈ¢ ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý $+Ma^2 = 2Ma^2$

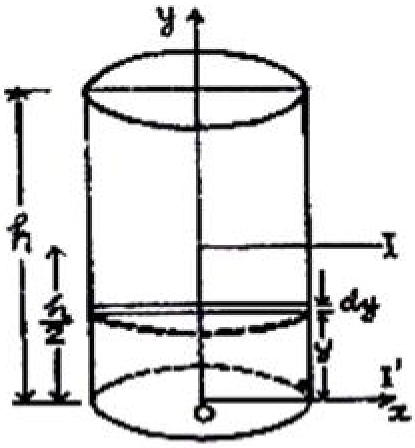
(iii) « ¾ ý ´Õ Åð¼Ó ¨ ÉÂ¢ ý Å¢ð¼ò ¨ ¾ô ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

$$= \int_m dm.\frac{a^2}{2} + dmy^2$$

$$= \int_a^h (\frac{a^2}{2} + y^2)2® a ° dy$$

$$= 2® a ° [\frac{a^2}{2} h + \frac{h^3}{3}]$$

$$I' = M\left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right), (M = 2® ah °)$$



À¼õ 7.11

(iv) « ¾ ý ¨ ÁÂò¾¢ ý ÅÆ¢§Â, « ¾ ý ¿¦Çò¾¢ü Ì §¿÷ Ì ò¾¡ ¸ î ¦ ºøÖõ « î ¨ ºô ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý = I ¬ Ì ¸ .

þ ¨ ½ « î Í ò §¾üÈò¾¢ ý ÀÊ,

$$I + M\left(\frac{h}{2}\right)^2 = I$$

$$= M\left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{2}\right)$$

$$\therefore I = M\left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right) - M\,\frac{h^2}{4}$$

$$= \frac{M}{12}\left(6a^2 + 4h^2 - 3h^2\right)$$

$$= \frac{M}{12}\left(h^2 + 6a^2\right)$$

3.10.7 º¦Ã¡ É ¾¢ ñ Á §¿÷Åð¼ ¯Õ ¨ Ç (Uniform solid cylinder)

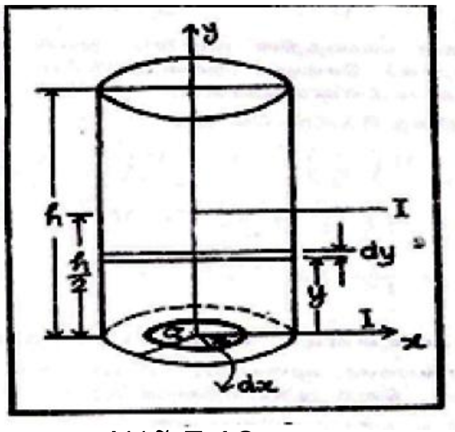
a, h, m ± ýÀ ¨ Å Ó ¨ È§Â º¦Ã¡ É ¾¢ ñ Á §¿÷Åð¼ ¯Õ ¨ ÇÂ¢ ý ¬ ¨ Ã, ¿¢ ¨ È ¬ ¸¢ÂÅü ¨ Èì Ì È¢ì ¸ ð Î õ.

$$M = ® a^2 h ° ; dm = ® a^2 ° dy$$

(i) « ¾ ý « î Í ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢È ý

$$= \int_m dm \frac{a^2}{2} = M\,\frac{a^2}{2}$$ « øÄÐ,

$$[= \int_0^a (2® xdxh°)x^2 = 2®° h \times \frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{2}]$$



A¼õ 7.12

(ii) « ¾ ý À¢ÈôÀ¢ì Ì õ §¸¡ Î ÀüÈ¢ ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢È ý
= ¯Õ ¨ ÇÂ¢ ý « î Í ÀüÈ¢ ¿¢ ¨ ÄÁò

¾¢È ý + $Ma^2 = \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma}{2}$

(iii) « ¾ ý ´ Õ Åð¼Ó ¨ ÉÂ¢ ý Å¢ð¼ò ¨ ¾ô ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ ¾¢È ý .

$$I' = \int_m (dm \frac{a^2}{4} + dmy^2)$$

$$\int_0^h (\frac{a^2}{4} + y^2)\text{®} a^2 \text{°}\, dy$$

$$= \text{®} a^2 \text{°} [\frac{a^2}{4} h + \frac{h^3}{3}]$$

$$= M[\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}]$$

(iv) « ¾ ý ¨ ÁÂò¾¢ ý ÅÆ¢§Â, « ¾ ý ¿¦Çò¾¢ü Ì §¿÷ Ì ò¾¡ ¸ î ¦ºøÖõ « î ¨ ºô ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý = I ±É ì ¦ ¸ ¡û ¸ .
þ ¨ ½ « î Í ò §¾üÈò¾¢ ý ÀÊ

$$I + M(\frac{h}{2})^2 = I' M(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3})$$

$$\therefore I = M(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}) - M\,\frac{h^2}{4}$$

$$= \frac{M}{12}(3a^2 + h^2)$$

3.10.8 º¦Ã¡ É ¯ûÇ¦Êø §¸¡Çõ (Uniform hollow sphere)

a, m ± ý À ¨ Å Ó ¨ È§Â, º¦Ã¡ É ¯ûÇ¦Êø §¸¡Çõ ´ ýÈ¢ ý ¬ ¨ Ã, ¿¢ ¨ È ¬ ¸¢ÂÅüÈ ¨ È ì Ì È¢ì ¸ ð Î õ,.

$$M = 4\text{®} a^2 \text{°}, dm = 2\text{®}\, y \text{°}\, ds$$

(i) §¸¡Ç ì Ü ðÊ ý Å¢ð¼õ ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

$$= \int (2\text{®}\, y \text{°}\, ds) y^2$$

$$= 2\text{®°} \int_{-a}^{a} y^3 \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2 dx}$$

$$= 2®° \int_{-a}^{+a} y^3 . \frac{a}{y} dx$$

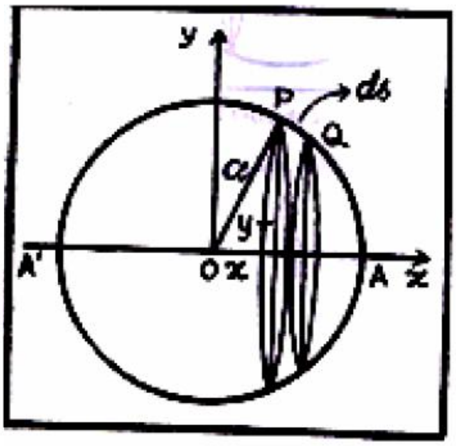
$$= 4a®° \int_{0}^{a} y^2 dx$$

$$= 4a®° \int_{0}^{a} (a^2 - x^2) dx$$

$$= 4a®° [a^3 - \frac{a^3}{3}]$$

$$= (4® a^2 °). \frac{2a^2}{3}$$

$$= M . \frac{2a^2}{3}$$



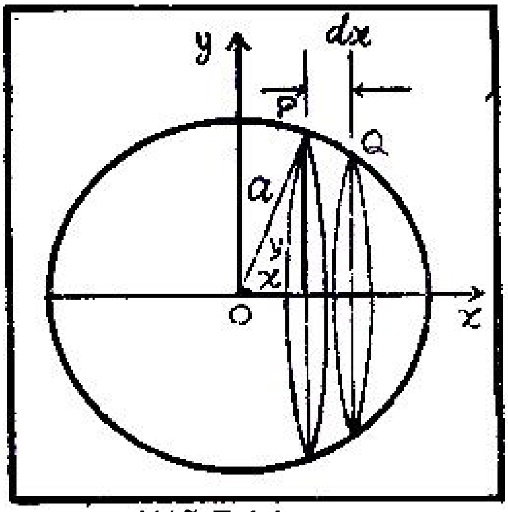
A¼õ 7.13

(ii) §¸¡Çì Ü ðÊ ý ²§¾Û ¦Á¡Õ ¦¾¡ Î §¸ ¡ Î ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ Ä ¨ Áò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

$$M \frac{2a^2}{3} + Ma^2 = \frac{5Ma^2}{3}$$

3.10.9. º¦Ã¡ É ¾¢ ñ Áì §¸ ¡Çõ (Uniform solid sphere)

$$M = \frac{4}{3} ® a^3 ° , dm = ® y^2 dx °$$



À¼õ 7.14

(i) ¾¦½Áì §¸¡Çò¾¦ý ²§¾Û ¦Á¡Õ Å¦ð¼ò¨¾ôÀüÈ¦Â ¿¦¨ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý.

$$= \int_{-a}^{+a} (® y^2 dx°) \frac{y^2}{2}$$

$$V^2 = \frac{«^2}{h_o^2}\left(1 - 2e\sin^{—} + e^2\right)$$

$$= ® P a^5 \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4® a^3}{3} \times \frac{2a^2}{5}$$

$$= M . \frac{2a^2}{5}$$

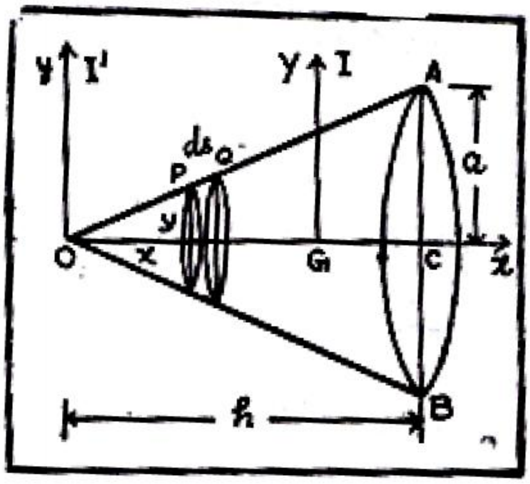
(ii) ²§¾Û ¦Á¡Õ ¦¾¡Î§¸¡ð¨¼ôÀüÈ¦Â ¿¦¨ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý

$$= \frac{2Ma^2}{5} + Ma^2 = \frac{7Ma^2}{5}$$

3.10.10 º¦Ã¡É ¯ûÇ¦Êø ÜõÒ (Hollow cylinder)

a, h, l, m ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â, ¯ûÇ¦Êø ÜõÀ¦ý «ÊÁð¼ ¬Ãõ, ¯ÂÃõ, º¡ö× ¯ÂÃõ, ¿¦¨È ¬¸¦ÂÅü¨Èì Ì È¦ì¸ð Îõ

$$M = ® alp; dn = 2® ydsP, \frac{y}{a} = \frac{x}{h}$$



A¼ö 7.15

(i) «¾ý «î ÍÀüÈ¢ ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý .

$$= \int 2\text{®}\, ydsP.y^2$$

$$= 2\text{®}\, P \int_{x=0}^{x=h} y^3 \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2\, dx}$$

$$= 2\text{®}\, P \int_O^h y^3 . \frac{1}{h} dx$$

$$= \frac{2\text{®}\, Pl}{h} \frac{a^3}{h^3} \int_O^h x^3 dx$$

$$= \frac{2\text{®}\, Pla^3}{h^4} . \frac{h^4}{4}$$

$$= (\text{®}\, alp). \frac{a^2}{2}$$

$$= M . \frac{a^2}{2}$$

(ii) «¾ý ¯î º¢ÅÆ¢Â¡¸, «¾ý «î Í ì Ì î ¦º í Ì ò¾¡¸ ¯ûÇ §¸¡Î ÀüÈ¢ ¯ûÇ¢Êø Ü õÀ¢ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý

$$I' = \int_0^h \left(dm \frac{y^2}{2} + dm.x^2 \right)$$

$$= \int_0^h \left(1 + \frac{a^2}{2h^2} \right) x^2 .2 ® ° \; y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)}$$

$$= 2 ® ° . \left(\frac{a^2 + 2h^2}{h^4} \right) . \frac{a}{h} \int_0^h x^3 dx$$

$$= (® \; a l °) \times \left(\frac{a^2 + 2h^2}{h^4} \right) \times \frac{h^4}{4}$$

$$= \frac{M}{4} \left(a^3 + 2h^2 \right)$$

(iii) «¾ý ÒÅ¢Â÷ôÒ ¨ÁÂõ G ÅÆ¢Â¡¸ «î Í ì Ì î ¦º í நத்தாயுல் Ç §¸¡Î ÀüÈ¢ ¯ûÇ¢Êø Ü õÀ¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò ¾¢Èý = I.

$$I + M \left(\frac{2h}{3} \right)^2 = I' = \frac{M}{4} \left(a^2 + 2h^2 \right)$$

$$\therefore I = \frac{M}{4} \left(a^2 + 2h^2 \right) - \frac{4Mh^2}{9}$$

$$= \frac{M}{36} (9a^2 + 18h^2 - 16h^2)$$

$$= \frac{M}{36} (9a^2 + 2h^2)$$

(iv) «¾ý «ÊÁð¼ Å¢ð¼õ ÀüÈ¢ ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý

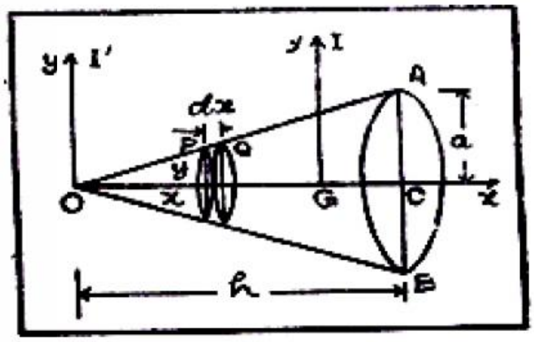
$$= I + M (\frac{h}{3})^2 = \frac{M}{36} (9a^2 + 2h^2) + \frac{Mh^2}{9}$$

$$= \frac{M}{36} (9a^2 + 2h^2 + 4h^2)$$

$$= \frac{M}{12} (3a^2 + 2h^2)$$

3.10.11. º¢¡É ¾¢ ñ Á Åð¼ì Ü õÒ (Solid right circular cone)

$$M = \frac{1}{3} ® a^2 hP; dm = ® y^2 dxP; \frac{y}{a} = \frac{x}{h}$$



A¼õ 7.16

(i) «¾ý «î¨ºô ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý

$$= \int_m dm.\frac{y^2}{2} = \int_O^h \text{®}\, y^2 dxP.\frac{y^2}{2}$$

$$= \frac{\text{®}\, p}{2}\int_O^h y^4 dx = \frac{\text{®}\, p}{2}.\frac{a^4}{h^4}\int_O^h x^4 dx$$

$$= \frac{\text{®}\, p}{2}.\frac{a^4}{h^4}.\frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{1}{3}\text{®}\, a^2 hp.\frac{3a^2}{10}$$

$$= M.\frac{3a^2}{10}$$

(ii) Ü õÀ¢ý ¯î º¢ÅÆ¢Â¡¸ «¾ý «î Í ì Ì î ¦º í Ì ò¾¡Ôû Ç §¸¡ Î ÀüÈ¢ Ü õÀ¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý .

$$= \int_m (dm\frac{y^2}{4} + dmx^2)$$

$$= \int_O^h (\frac{y^2}{4} + x^2)\text{®}\, y^2 dxP$$

$$= \text{®}\, P\frac{a^2}{h^2}.(\frac{a^2}{4h^2} + 1)\int_O^h x^4 dx$$

$$= \frac{\text{®}\, Pa^2(a^2 + 4h^{2)}}{4h^4} \times \frac{h^5}{5}$$

$$= (\frac{1}{3}\text{®}\, a^2 hp).\frac{3}{20}(a^2 + 4h^2)$$

$$= M.\frac{3}{20}(a^2 + 4h^2)$$

$$I' = \frac{3M}{20}(a^2 + 4h^2)$$

(iii) Ü õÀ¢ ý ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ÁÂõ G ÅÆ¢Â¡¸ «î Íக்குச்செ í Ì ò¾¡ ¸Ôû Ç §¸¡ Î ÀüÈ¢ Ü õÀ¢ ý ¿¢ ¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý = I

$$I+M\left(\frac{3h}{4}\right)^2 = I' = \frac{3M}{20}\left(a^2+4h^2\right)$$

$$\therefore I = \frac{3M}{20}\left(a^2+4h^2\right)-\frac{9Mh^2}{16}$$

$$=\frac{3M}{20}\left(4a^2+4h^2-15h^2\right)=\frac{3M}{8}\left(4a^2+h^2\right)$$

(iv) «¾ý «ÊÁð¼ Å¢ð¼õÀüÈ¢ ¿¢ ¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È ý

$$= I + M\left(\frac{h}{4}\right)^2$$

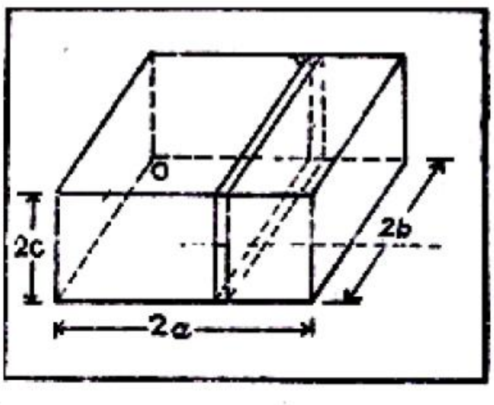
$$= \frac{3M}{80}(4a^2+h^2)+\frac{Mh^2}{16}$$

$$= \frac{M}{80}(12a^2+3h^2+5h^2)$$

$$= \frac{M}{20}(3a^2+2h^2)$$

3.10.12 ¸É ¦ºùÅ ¸õ (Rectangular parallelopiped).

M ¿¢ ¨ÈÔû Ç ¸É ¦ºùÅ ¸ò¾¢ ý Àì ¸ í ¸û, Ó ¨È§Â 2a, 2b, 2c ¬ Ì ¸. «¾ý ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ¨ÁÂõ a ¬ Ì ¸. a ³ò ¦¾¡¼ì ¸ô ÒûÇ¢Â¡ ¸×õ, «¾ý ÅÆ¢§Â 2a, 2b, 2c ±ý Ûõ Å¢Ç¢õÒ¸ Ù ì Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ ax, ay, az ±ý Ûõ ã ýÚ ¦º í Ì òÐ ax Ì î ¦º í Ì ò¾¡ ¸ þÕì Ì Á¡Ú, ¸É ¦ºùÅ ¸ò ¨ ¾î º¢È¢Â ÜÚ ¸Ç¡ ¸ô À¢¡¢ì ¸ ´ù ¦ÅÉ¡Õ Ð ñ Îõ 2b, 2c ±ýÀ ¨ Å ¸ ¨Çô Àì ¸ í ¸Ç¡ ¸ì ¦¸¡ ñ¼ ¦ºùÅ ¸ò ¾ ¸¼¡ Ì õ.



A¼õ (7.17)

axì Ì î ¦º í Ì ò¾¡ ¸ þÕì Ì Á¡Ú, ¸É ¦ºùÅ ¸ò ¨ ¾î º¢È¢Â ÜÚ ¸Ç¡ ¸ô

À¢¡¢ì¸ ´ù¦Å¡Õ Ð ñ Îõ 2b, 2c ±ýÀ¨ Å¸¨Çô Àì¸ í¸Ç¡¸ì ¦¸¡ ñ¼ ¦ºùÅ¸ò¾¸¼¡ Ì õ.

· ax ³ôÀüÈ¢ «¾ý ¿¢¨ ÄÁò திருப்புதிறý

$$= «¾ý ¿¢¨È \times \frac{b^2+c^2}{3} = dm \times \frac{b^2+c^2}{3}$$

· ox ³ôÀüÈ¢ ¸É ¦ºùÅ¸ò¾¢ý திலைÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èன்

$$= \frac{b^2-c^2}{3}\int_m dm = M\left(\frac{b^2-c^2}{3}\right)$$

«ùÅ¡§È, oy, oz ÀüÈ¢ ¸É ¦ºùÅ¸ò¾¢ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý Ó¨È§Â,

$$M\left(\frac{c^2+a^2}{3}\right); M\left(\frac{a^2+b^2}{3}\right)$$ ¬ Ì õ.

[Ì È¢ôÒ: (i) 2a Àì¸ò¨¾ô ¦ÀüÈ ´Õ ¸É ºÐÃò¾¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý ÅÆ¢§Â¦ºøÖõ ºÁîºÃî Í ÀüÈ¢Â «¾ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý $= \frac{2Ma^2}{3}$

(ii) «ì¸É ºÐÃò¾¢ý, ²§¾Û¦Á¡Õ Àì¸ò¨¾ô ÀüÈ¢Â ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý

$$= \frac{2Ma^2}{3} + M.(a^2+ah^2) = \frac{8Ma^2}{3}$$

3.11 ºÁ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¦¾¡Ì¾¢¸û (Equimomental systems).

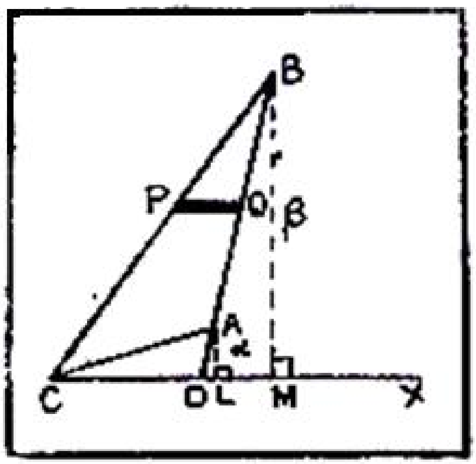
þÕ§ÅÚ ¦¾¡Ì¾¢¸Ç¢ý ¦Á¡ò¾¿¢¨È ºÁÁ¡¸×õ, «ÅüÈ¢ý ÒÅ¢Â£÷ôÒ ¨ÁÂõ ´ýÈ¡Ì õ, ±ó¾ «îÍ ÀüÈ¢Ôõ «ÅüÈ¢ý ¿¢¨ ÄÁò¾¢ÕôÒ¾¢Èý ºÁÁ¡¸×õ þÕôÀ¢ý. «¨Å ºÁ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¦¾¡Ì¾¢¸û ±ÉôÀÎõ.

þò¾¨¸Â ¦¾¡Ì¾¢¸û þÂì¸Å¢¨ºÅ¢ÂÄ¢ø þ¨½Á¡üÚ¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ.

3.11.1 M ¿¢¨ÈÔûÇ ºÃ¡É ´Õ Óì§¸¡½ò ¾¸Îõ, «õÓì§¸¡½ò¾¢ý Àì¸í¸Ç¢ý ¨ÁÂôÒûÇ¢¸Ç¢ø ¨Åì¸ôÀð¼ $\frac{M}{3}$ ¿¢¨ÈÔûÇ ºÁÐ¸û¸Ùõ ºÁ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¦¾¡Ì¾¢¸Ç¡Ì ¦ÁÉì¸¡ð Î¾ø.

ABC ±ýÛõ Óì§¸¡½ò¾¢ý, C ±ýÛõ §¸¡½ôÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â CX ±ýÛõ §¸¡ð¨¼ÅÃ¼õ (7.18)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¨Ã¸.

CX ±ýÛõ §¸¡Î ÀüÈ¢Â, «õÓì§¸¡½ò¾¢ø ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È¨ Éô À¢ýÅÕÁ¡Ú ¸¡½Ä¡õ.



À¼õ (7.18)

A, B ¸ÇÄÕó¾ CX ìÌ AL, BM ±ýÛõ ¦ºíÌòÐì §¸¡Î¸¨Ç Å¨Ã¸.
$AL = \sim$, $BM =$ ¬Ì¸.

$M = \Delta ABC$ Âý ¿¨È

$= P \times$ Óì§¸¡½ò¾ý ÀÃôÀÇ×

$= P[\Delta BCD - \Delta ACD]$

$= P[\frac{1}{2}CD. \quad - \frac{1}{2}CD.\sim]$

$= \frac{P}{2}.CD(\beta - \alpha)$

CD ìகு இணையாக் PQ ±ýÛõ ´Õ Ññ ÀÌ¾¨Â ±Îì¸. «¾ý ÀÃôÒ,

$dA = PQ \times dy$

$= \frac{CD}{\ }(\ ^{\rho} - y)dy$

$\therefore dm =$ Ññ ÀÌ¾Âý ¿¨È = $PdA = P\frac{CD}{P}(P-y)dy$

CX ÀüÈÂ þ¾ý ¿லைமாறத் திருப்புதிறன் $= PdA.y^2$

$\therefore CX$ ÀüÈÂ, BCD ±ýÛõ Óì§¸¡½ò¾ý ¿¨ÄÁò ¾ÕôÒ¾Èý

$= \int_{O} P.\frac{CD}{\ } - (\ - y)y^2 dy$

$= p.\frac{CD}{\ }[\ .\frac{\ ^3}{3} - \frac{\ ^4}{4}]$

$= \frac{P.CD}{12}.\ ^3$

«ùÅ¡§È, CX ÀüÈÂ $w_1 - ACD$ ±ýÛõ Óì§¸¡½ò¾ý ¿¨ÄÁò ¾ÕôÒ¾Èý $= \frac{P.CD}{12}.\sim^3$ ¬Ìõ.

±É§Å, CX ÀüÈ¢, ΔABC ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

$$= \frac{P.CD}{12}.(\;\;^{3} - \sim^{3})$$

$$= \frac{P.CD}{12}.(\;\; - \sim)\frac{1}{6}(\;\;^{2} + \sim\;\; + \sim^{2})$$

$$= \frac{M}{6}(\;\;^{2} + \sim\;\; + \sim^{2})$$

$A'B'C$ ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸û Ó¨È§Â BC, CA, AB ±ý Ûõ Àì¸í¸Ç¢ý ¿Îô Ò ûÇ¢¸Ç¡ Ì¸. «ôÒûÇ¢¸û ´ù¦Å¡ ýÈ¢ø «¨ÁÔõ $\frac{M}{3}$ ±ý Ûõ ¿¢¨È¨Âô ¦ÀüÈ ã ýÚ Ð¸û¸Ç¢ý ¾¢½¢×¨ÁÂÓõ, ΔABC ý ¾¢½¢×¨ÁÂÓõ ´ýÈ¡Ì õ. ±É§Å, CX «îÍÀüÈ¢, «õã ýÚ Ð¸û¸Ç¢É ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý.

$$= \frac{M}{3}\left[(\frac{\sim}{2})^2 + (\frac{\;}{2})^2 + (\frac{\sim +\;}{2})^2\right]$$

$$= \frac{M}{12} \times \frac{1}{4}[\sim^{2} + \;\;^{2} + (\sim + \;\;)^{2}]$$

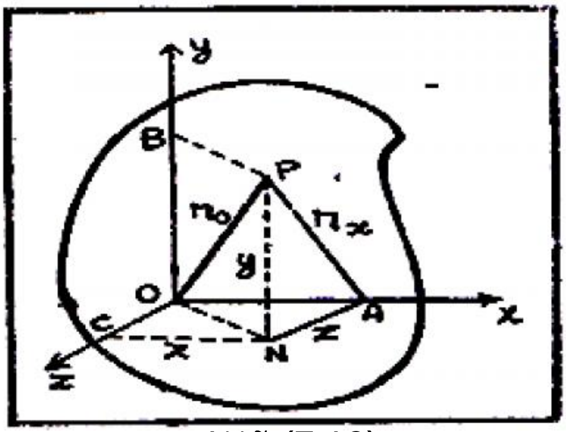
$$= \frac{M}{12}[2\sim^{2} + 2\;\;^{2} + 2\sim\;\;]$$

$$= \frac{M}{6}(\sim^{2} + \sim\;\; + \;\;^{2})$$

CX ÀüÈ¢Â Ó ì§¸¡½ò¾¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È Ûõ $A'B'C$ ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ç¢ø «¨ÁÔõ $\frac{M}{3}$ ±ý Ûõ ¿¢¨È¸¨ÇÔ¨¼Â ã ýÚºÁÁ¡É Ð¸û¸Ç¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È Ûõ þí§¸ ºÁÁ¡Å¾¡ø, «ùÅ¢Õ ¦¾¡ Ì¾¢¸ Ùõ ºÁ¾¢ÕôÒ¾¢È ý ¦¾¡ Ì¾¢¸Ç¡¸¢ýÈÉ.

3.12 º¼òÐÅô ¦ÀÕì¸õ (Product of inertia)

O ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø OX, OY, OZ ±ýÀ¨Å ´ýÈì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ «îÍ ¸¨Çì Ì ÈÈ¢ì¸ ðÎõ. P(x, y, z) ±ýÀÐ ¸ ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÙ ´ ýÈ¢ø ²§¾Û ¦Á¡Õ ÒûÇ¢Â¡ Ì ¸. «ôÒûÇ¢Â¢ø «ô¦À¡ÕÇ¢ý ´Õ º¢È¢Â dm ¿¢¨ÈÔûÇ À Ì ¾¢¨Â À¼õ (7.19)ø ¸¡ðÊÅ¡Ú ±Î ì¸ ×õ. ¦À¡ÕÇ¢ý º¼òÐÅô ¦ÀÕì¸ í¸û À¢ýÅÕõ Å¨ÃÂÚò¾ ¦¾¡¨ ¸Â¡Î ¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.



A¼õ (7.19)

$$I_{xy} = \int_m xydm = I_{yx}$$

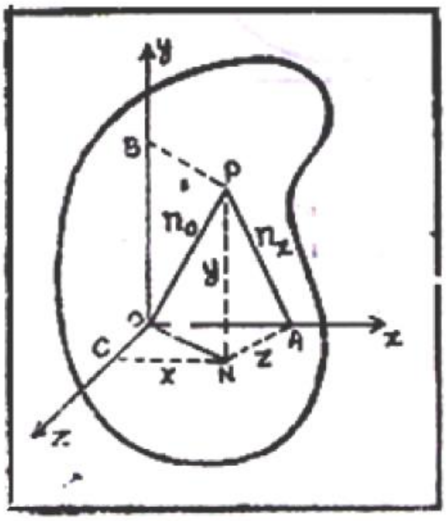
$$I_{yz} = \int_m yzdm = I_{zy}$$

$$I_{zx} = \int_m zxdm = I_{xz}$$

²§¾Û§Á¡÷ «î¨ºô ÀüÈ¦Â ¿¦¨ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý ±ô§À¡Ðõ Á¦¨¸ Ì È¦¨Âô ¦ÀüÈ¦Õì Ì õ, ¬É¡ø º¼òÐÅô¦ÀÕì¸õ, «î Í¸¨Ç Ì È¦òÐ ¿¦¨ÈÂ¦ý ¿¦¨Äì Ì ²üÈÅ¡Ú Á¦¨¸ Ì È¦Ô¨¼Â¾¡¸×õ Ì¨È Ì È¦Ô¨¼Â¾¡¸×õ «øÄÐ âîº¦Â Á¾¦ôÒ¨¼Â¾¡¸×õ þÕì¸ìÜ Ì õ. §ÁÖõ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õ¦Ç¡ýÚ ²§¾ÛÁ¦Õ ¬Âò¦¾¡¨Ä ¦ºí Ì òÐò ¾Çí¸¨Çî º¡÷ó¾ ¦ºù¦À¡Øí Ì (symmetrical) «¨Áô¨Àô ¦ÀüÈ¦Õì Ì ¦ÁÉ¦ø, º¼òÐÅô¦ÀÕì¸í¸û âîº¦ÂÁ¡ Ì õ.

3.12.1 ¾Çí¸û, «îÍ¸û, ÒûÇ¦¸û ¬¦ÂÅü¨Èô ÀüÈ¦Â ¿¦¨ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý¸Ù ì Ì þ¨¼§ÂÔûÇ ¯È¨Å ì ¸¡Ï ¾ø.

(i) ²§¾Û¦Á¡Õ «î¨ºôÀüÈ¦Â ¦À¡Õ¦Ç¡ýÈ¦ý ¿¦¨ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý, «ùÅîº¦ý ÅÆ¦§Â Å¨ÃÂôÀÎõ þÕ ¦ºí ÌòÐ ¾Çí¸û ÀüÈ¦Â ¿¦¨ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý¸Ç¦ý Ü Î¾Ö ì Ì ºÁÁ¡ Ì õ. À¼õ (7-20)ø OX ±ýÛõ «îÍ, XOY, ZOX ±ýÛõ ¦ºí ÌòÐò ¾Çí¸û ¦ÅðÊì¦¸¡û Ùõ §¸¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.



À¼õ (7.20)

$I_{xx,}I_{(x,y)},I_{(z,x)}$ ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â ¦À¡ÕÇ¢ý ox«îÍ ÀüÈ¢Â, (x, y) ¾Çõ (z,x) ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¸¨Çì ÌÈ¢ì¸ðÎõ.

«ô§À¡Ð,

$$I(x,y)=\int_m z^2dm$$

$$I(z,x)=\int_m y^2dm$$

$$I_{xx}=\int_m rx^2dm=\int_m (y^2+z^2)dm$$

$$=\int y^2dm+\int z^2dm$$

$$=I(z,x)+I(x,y)$$

±ýÈ¡Ìõ

$$\therefore I_{xx}=I(z,x)+I(x,y)$$

«ùÅ¡§È

$$I_{yy}=I(x,z)+I(y,z)$$

$$I_{zz}=I(y,z)+I(z,x)$$

±ýÀ¨Å¸Ùõ ¸¢¨¼ìÌõ,

(ii) ²§¾Û¦Á¡Õ ÒûÇ¢¨Âô ÀüÈ¢Â, ¦À¡Õ¦Ç¡ýÈ¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ÅÆ¢§Â ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºíÌò¾¡¸ þÕìÌÁ¡Ú Å¨ÃÂôÀÎõ ãýÚ ¾Çí¸û ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý¸Ç¢ý Ü¼üÌìÌ ºÁÁ¡Ìõ.

(À¼õ 7.20)ø O±ýÛõ ÒûÇ¢Â¡ÉÐ, ´ý¨È¦Â¡ýÚ ¦ºíÌò¾¡¸ ¦ÅðÊì ¦¸¡ûÙõ xoy, yoz, zox ±ýÛõ ãýÚ ¾Çí¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. O ÒûÇ¢ ÀüÈ¢Â ¦À¡Õ¦Ç¡ýÈ¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È¨É I_o ±Éì¦¸¡û¸.

dm ±ýÀÐ ¦À¡ÕÇ¢ý Á¢¸Ñ ñ ½¢Â ÀÌ¾¢Â¢ý ¿¢¨È¨Âì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. «î º¢È¢Â ¿¢¨È (x, y, z) ±ý ÛÅ¢¼ò¾¢ø p þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. o-ìÌõ p-ìÌõ þ¨¼Â¢ÖûÇ ¦¾¡¨Ä× r_o ¬ Ì¸. ±É§Å

$$r_\circ^2 = x^2 + y^2 + z^2$$ ¬ Ìõ.

$I_\circ =$ ¦À¡ÕÇ¢ý, O ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢È ý

$$= \int_m r_\circ^2 dm$$

$$= \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$\int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm + \int_m z^2 dm$$

$$= I_{(y,z)} + I_{(z,x)} + I_{(x,y)}$$

$$\therefore I_\circ = I_{(x,y)} + I_{(y,z)} + I_{(z,x)}$$

¬ Ìõ.

(iii) ´ý ¨È¦Â¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ ¦ÅðÊì¦¸¡ûÙõ ãýÚ «îÍ¸û ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý¸Ç¢ý Ü Î¾ø, «ùÅîÍ¸û « ¨ÁÔõ ¾¢¨º¸¨Çî º¡Ã¡Áø, « ¨Å¸û ¦ÅðÊì¦¸¡ûÙõ ÒûÇ¢¨Â ÁðÎ§Á º¡÷ó¾¾¡Ìõ.

$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$ ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â, ¦À¡Õ¦Ç¡ýÈ¢ý OX, OY, OZ «îÍ¸û ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁòÅÕôÒò¾¢Èý¸ ¨Çì ÌÈ¢ìÌ¦ÁÉ¢ø,

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_m (y^2 + z^2) dm + \int_m (z^2 + x^2) dm + \int_m (x^2 + y^2) dm$$

$$= 2\int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$= 2I_\circ$$

¬ Ìõ.

OÅ¢Ä¢ÕóÐ dm ±ýÛõ Ññ½¢Â ¿¢¨ÈÂ¢ý ¿¢¨Ä¨Â $\underline{r_o}$ ±ýÛõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. «ó¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ OÅ¢ø «¨ÁÔõ «îÍ¸Ç¢ý ¾¢¨º¸¨Çî º¡÷ó¾¢Ã¡Áø, O-¨Å ÁðÎ§Á º¡÷óÐûÇÐ. ±É§Å $I_\circ$ ±ýÀÐ ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡Ìõ.

¬¸§Å $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} =$ ´Õ Á¡È¢Ä¢.

3.13 (¾ð¦¼¡ýÈ¢ý) ¾¨ÄÂ¡Â «îÍ¸Ùõ, ¾¨ÄÂ¡Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢Èý¸Ùõ.

¾ð¦¼¡ýÈ¢ý ¾Çò¾¢ø À¼õ (7.21)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, OX, OY ±ýÀ¨Å ¸¢¨¼¿¢¨Ä «îÍ¸¨Çì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. OZ±ýÀÐ Oø «ò¾Çò¾¢üÌî ¦ºíÌò¾¡¸ «¨ÁÔõ «îº¡Ì¸.

A' A ±ýÀÐ XOY ¾Çò¾¢ø O ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ ²§¾Û¦Á¡Õ §¸¡ð¨¼ì

Ì È¢ì ¸ ð Î õ. « Ð x « î Í¼ý ¯ § ¸ ¡ ½ ò ¨ ¾ « ¨ ÁôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ¸ . p (x, y) ± ý Û Á¢¼ò¾¢ø, dm ± ý Û õ ¾ ¸ ðÊ ý Á¢ ¸ î º¢È¢Â ¿¢ ¨ È þ ÕôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ¸ , ¬ ¸ §Å, Å ¨ ÃÂ ¨ ÈôÀÊ,

$$I_{xx} = \int_m y^2 dm$$

$$I_{yy} = \int_m x^2 dm \quad .$$

$$I_{xy} = \int_m xydm$$

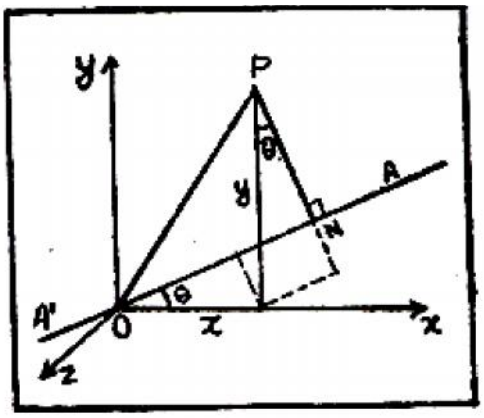
$$\int_m \left(y^2 \cos^2\text{¯} - 2xy \sin\text{¯} \cos\text{¯} + x^2 \sin^2\text{¯} \right) dm$$

$$= \cos^2\text{¯} \int_m y^2 dm - 2\sin\text{¯} \cos\text{¯} \int_m xydm + \sin^2\text{¯} \int_m x^2 dm$$

$$= I_{xx} \cos^2\text{¯} - I_{xy} \sin\text{¯} + I_{yy} \sin^2\text{¯}$$

$$= \left(\frac{1+\cos 2\text{¯}}{2} \right) I_{xx} + \left(\frac{1+\cos 2\text{¯}}{2} \right) I_{yy} - I_{xy} \sin 2\text{¯}$$

¬ Ì õ.



A¼õ (7.21)

p-Â¢Ä¢ÕóÐ A' A ± ý Û õ § ¸ ¡ ðÊü Ì , PN ± ý Û õ

þ í Ì *I* ¬ ÉÐ ¯ Å¢ ý º¡÷À¡Å¾¡ø, « Ð ¦ ÀÚõ ¦ ÀÕÁ, º¢ÚÁ Á¾¢ôÒ ¸ Ù ì Ì ² üÈÅ¡Ú þ Õ « î Í ¸ ¨ Ç O-Å¢ø ¾ ¸ ðÊü ¸ ¡ É ¾ ¨ ÄÂ¡Â « î Í ¸ Ç¡ Ì õ (Principal axes).

I ý ¦ ÀÕÁ, º¢ÚÁ Á¾¢ôÒ ¸ û ¾ ¨ ÄÂ¡ö ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý ¸ û (Principal moments of inertia) ± ÉôÀ Î õ. « ò¾ ¨ ¸ Â ¾ ¨ ÄÂ¡Â « î Í ¸ û , x « î Í¼ý ¾¡ í Ì õ § ¸ ¡ ½ í ¸ û Å ¨ ¸ Ñ ñ ¸ ½ ¢¾ Ó ¨ ÈôÀÊ, À¢ ý ÅÕÁ¡Ú Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ôÀ Î õ.

$$\frac{dI}{d¯} = -I_{xx}\sin 2¯ + I_{yy}\sin 2¯ - 2I_{xy}\cos 2¯$$
$$= (I_{yy} - I_{xx})\sin 2¯ - 2I_{xy}\cos 2¯$$

I ±ýÀÐ ¦ÀÕÁ, «øÄÐ º¢ÚÁ Á¾¢ô¨Àô ¦ÀÚÅ¾ü Ì¡¢Â ¿¢Àó¾¨É,

$$\frac{dI}{d¯} = 0$$

¬ Ìõ.

±É§Å

$$\tan 2¯ = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \tan(180 + 2¯)$$

$$\therefore ¯_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}\right\}$$

$$\therefore ¯_2 = \frac{®}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}\right\}$$

±ýÛõ þÕÁ¾¢ôÒ¸û ¸¢¨¼ì¸¢ýÈÉ. þõÁ¾¢ôÒ¸Ù ìÌ ûÇ §ÅÚÀ¡Î $\frac{®}{2}$ ¬ Ìõ. þùÅ¢Õ Á¾¢ôÒ¸Ç¢ø ´ýÚ Iý ¦ÀÕÁ Á¾¢ô¨ÀÔõ Áü¦È¡ýÚ Iý º¢ÚÁ Á¾¢ô¨ÀÔõ Å¨ÃÂÚìÌõ. §ÁÖõ þ¨Å OÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ þÕ¾¨ÄÂ¡Â «îÍ¸¨ÇÔõ Å¨ÃÂÚì¸¢ýÈÉ. O ±ýÛõ ÒûÇ¢, ¾¸ðÉý ¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢ø «¨ÁÔ¦ÁÉ¢ø, ¯ Å¢ý Á¾¢ôÒ¸û ¨ÁÂ «îÍ¸¨Ç (central axes) Å¨ÃÂÚì¸¢ýÈÉ.

3.13.1 ¾¢ÕôÒ¾¢È¨É¢ý ¿¦û Åளையம் (Momental eclipse)

A' A ±ýÛõ §¸¡ðÊø, Q(X, Y) என்னும் புள்ளி¢¨Â,

$1\sim \frac{1}{(OQ)^2}$ «øÄÐ $I = \frac{MK^4}{(OQ)^2}$ என்றிருக்குமாறு ±Î ì¸×õ. «ô§À¡Ð,

$$I = I_{xx}\cos^2 ¯ - 2I_{xy}\sin ¯\cos ¯ + I_{yy}\sin^2 ¯ = \frac{Mk^4}{(OQ)^2}$$

«øÄÐ

$$I_{xx}(OQ\cos ¯)^2 - 2I_{xy}(OQ\sin ¯)(OQ\cos ¯)(OQ\cos ¯) + I_{yy}\,(OQ\sin ¯)^2 = Mk^4$$

«øÄÐ $X^2 I_{xx} - 2XYI_{xy} + Y^2 I_{yy} = Mk^4$ ±ýÈ¡ Ìõ.

QÅ¢ý þÂí Ì Å¨Ã¨Â þîºÁýÀ¡Î «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ. OQ Å¢ý Á¾¢ôÒ ÓÊ×ûÇ ´Õ ¦Áö¦Â ñ ½¡Å¾¡ø, þî ºÁýÀ¡Î ´Õ ¿¦û Åð¼ô À¡¨¾¨Â Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. ´ùÅ¢Â í Ì ¯ ¨ÃÂ¡ÉÐ, ¾¢ÕôÒ ¾¢È¨É¢ý ¿¦û Å¨ÇÂõ ±É×õ ÜÈôÀÎõ. þùÅ¨ÇÂò¾¢ý ¾¨ÄÂ¡Â «îÍ¸û, º¼òÐÅ ¾¨ÄÂ¡Â «îÍ¸û

±É×ம் கூறப்படும்.

$I_{xy} = 0$ என்ற¡ Ì õ §À¡Ð, OX, OY ±ýÚõ ¬Âò¦¾¡¨Ä «î Í¸§Ç º¼òÐவ தலையாய «î Í¸¨Ç Å¨ÃÂÚì Ì õ. «ô§À¡Ð ¿¦ûÅð¼ô À¡¨¾Â¢ý ºÁýÀ¡ Î ,

$$I_{xx}X^3 + I_{yy}Y^2 = Mk^4$$ ¬ Ì õ.

$I_{xy} \neq 0$ ±ýÈ¡ Ì õ§À¡Ð, º¼òÐÅ ¾¨ÄÂ¡Â «î Í¸¨Çô À¢ýÅÕÁ¡Ú Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

´ýÚì¦¸¡ýÚ 90° §ÅÚÀ¡ Î ¨¼Â þÕÁ¾¢ôÒì¸¨Ç ¯ ¦ÀüÈ¢ÕôÀ¾¡ø O-Å¢ý ÅÆ¢§Â «¨ÁÔõ þÕ¾¨ÄÂ¡Â «î Í¸û, «¨ÅÀüÈ¢Â, ¾¸ðÊý º¼òÐÅô ¦ÀÕì¸ò¾¢ý Á¾¢ôÒ âîº¢ÂÁ¡¸ §Å ñ Î õ ±ýÈ ¿¢Àó¾¨ÉÂ¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀ Î õ. ±É§Å ON ±ýÈ §¸¡ Î õ, N ÅÆ¢§Â ON ì Ì î ¦ºí Ìò¾¡¸ Å¨ÃÂÔõ §¸¡ Î õ Oø ¾¨ÄÂ¡Â «î Í¸Ç¡¸ þÕôÀ¾üÌ «ì§¸¡ Î ¸û ÀüÈ¢Â º¼òÐÅô¦ÀÕì¸õ âîº¢ÂÁ¡¸ §Å ñ Î õ.

«¾¡ÅÐ,

$$\int_m NP.ONdm = 0$$

«¾¡ÅÐ,

$$\int_m \left(y\cos ¯ - x\sin ¯\right)\left(x\cos ¯ + y\sin ¯\right)dm = 0$$

«¾¡ÅÐ,

$$\int_m (y^2 - x^2)\frac{\sin 2¯}{2}dm + \int_m xy\cos 2¯\, dm = 0$$

«¾¡ÅÐ,

$$\frac{\sin 2¯}{2}(I_{xx} - I_{yy}) + \cos 2¯\, I_{xy} = 0$$

$$\therefore \tan 2¯ = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}$$

$$¯ = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}\right\}$$

±É§Å, ON ±ýÈ §¸¡ Î õ, O ÅÆ¢§Â ONì Ì ¦ºí Ìò¾¡¸ Å¨ÃÂÔõ §¸¡ Î õ ¾¨ÄÂ¡Â «î Í¸Ç¡¸ þÕôÀ¾üÌ «¨Å¸û, OX ±ýÈ «î Í¼ý, Ó¨È§Â

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\{\frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}\}, \frac{®}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}\right\}$$

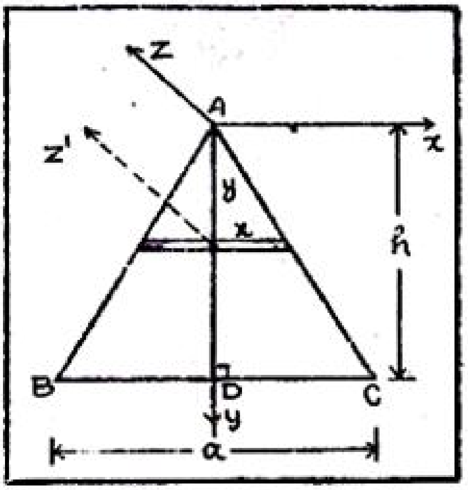
±ý Ûõ §¸¡½í¸¨Ç «¨Áì¸ §Å ñ ÊÅÕõ.

3.14 Á¡¾¢¡¢ ¸½ì Ì ¸û

3.14.1 µ÷ þÕºÁÀì ¸ Óì§¸¡½ò¾¢ý ¯î º¢ôÒû Ç¢ A ÅƢ§Â

(i) BC ±ý Ûõ ±¾¢÷Àì ¸ò¾¢ü Ì Å ¨ÃÂôÀ Î õ ¦ º í Ì òÐ ì§¸¡ Î ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý

(ii) Óì§¸¡½ ¾Çò¾¢ü Ì Å ¨ÃÂôÀ Î õ ¦ º í Ì òÐ ì§¸¡ Î ÀüÈ¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¸ ¨ Çì ¸¡ ñ ¸



À¼õ (7.22)

ABC ±ýÀÐ µ÷ þÕºÁÀì ¸ Óì§¸¡½Á¡ Ì õ. Óì§¸¡½ ¾Çò¾¢ø AX,AY ±ýÀ ¨ Å À¼õ 7.22 ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú A ÅƢ§Â ¦ºøÖõ ¸¢ ¨ ¼¿¢ ¨ Ä §¸¡ Î ¸ ¨ Çì Ì È¢ì ¸¢ýÈÉ. AD - BC ±É Å ¨ Ã AD = h ¬ Ì õ.

þ í Ì dA = 2xzdy

dm = (2xdy)PAy ÀüÈ¢, dm- ý ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý = $dm\frac{x^2}{3}$

±É§Å Ay ÀüÈ¢ Óì§¸¡½ò¾¢ý ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý

Az ±ýÀÐ A ÅƢ§Â Óì§¸¡½ ¾Çò¾¢ü Ì Å ¨ÃÂôÀ Î õ ¦ º í Ì òÐ ì §¸¡ð ¨ ¼ì Ì È¢ì ¸ð Î õ

$$= \int_0^h \frac{x^2}{3}\left(2xdy\right)p$$

$$= \frac{2p}{3}\frac{a^3}{8h^3}\int_0^h y^3dy = \left(\frac{1}{2}ahp\right).\frac{a^2}{24} = M\,\frac{a^2}{24}$$

Az ÀüÈ¢ dmý ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý $= dm\frac{x^2}{3} + dmy^2$

Az ÀüÈ¢ Óì§¸¡½ò¾¢ý ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý

$$= \int_o^h \left(\frac{x^2}{3} + y^2 \right) (2xdyp)$$

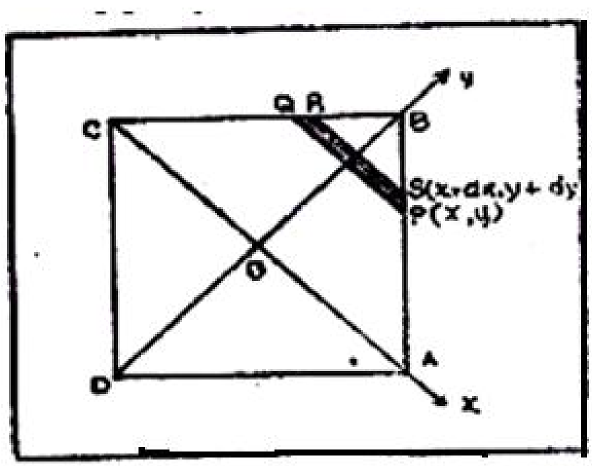
$$= \left(\frac{a^2}{12h^2} + 1 \right) \frac{ap}{h} \int_o^h y^3 dy$$

$$= \left(\frac{a^2}{12h^2} + 1 \right) \frac{aph^3}{4}$$

$$= \frac{M}{8} a^2 \left(\frac{1}{3} + \cot^2 \frac{A}{2} \right) \cdot \left[\cot \frac{A}{2} = \frac{2h}{a} \right]$$

3.15.2 ºÐÃ ÅÊÅò¾¸ Î ´ ýÈ¢ý «¼÷ò¾¢,ÒûÇ¢ §¾¡Úõ Á¡ÚÀð Î ±ó¾¦Å¡Õ ÒûÇ¢Â¢Öõ «¾ý «¼÷ò¾¢ «ò¾¸ðÊ ý ´Õ ã¨ÄÅ¢ð¼ò¾¢Ä¢ÕóÐ «ôÒûÇ¢Â¢ý ¦¾¡¨ÄÅ¢ý þÕÀÊì Ì §¿÷ Å¢¸¢¾¾ò¾¢Ä¢Õì¸¢ÈÐ. «ò¾¸ðÊ ý þõ ã¨Ä Å¢ð¼ò¨¾ô ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È¨É ì ¸¡ ñ ¸.

À¼õ 7-23-ø ABCD ±ýÀÐ ºÐÃò ¾¸ð¨¼Ôõ AC ±ýÀÐ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ã¨ÄÅ¢ð¼ò¨¾Ôõ ÌÈ¢ì¸ðÎõ, ã¨ÄÅ¢ð¼í¸û 0Å¢ø ºó¾¢ì¸ðÎõ. OA,OB ±ýÀ¨Å x,y «îÍì¸Ç¡Ìõ. PQRS ±ý Ûõ º¢Ú Ññ ÀÌ¾¢Â¢ý ¿¢¨È



À¼õ (7.23)

$$= 2xdx \cdot p = 2xdx \times ky^2$$

¾ðÊ ý ¿¢¨ È$M = 2\int_0^{a/\sqrt{2}} 2kxy^2dx$

$$= 2\int_0^{a/\sqrt{2}} 2k\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right)y^2dy$$

$$= \frac{ka^4}{12}$$

· AC ³ ô ÀüÈ¢Â Ñ ñ À Ì ¾¢ PQRS ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

$= 2xdx \cdot ky^2 \cdot y^2$ ¬ Ì õ,

AC ³ ô ÀüÈ¢Â ÓØò¾ðÊ ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

$$= 2\int_o^{a/\sqrt{2}} 2kxy^4dy$$

$$= 4k\int_o^{a/\sqrt{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right)y^4dy$$

$$= \frac{ka^6}{60} = \frac{Ma^6}{5};$$

3.15.3 M ¿¢¨ ÈÔûÇ ´Õ Ó̧ ¡½ò¾¸ðÊ ý ¾Çò¾¢Ö ûÇ ²§¾Û ¦Á¡Õ § ¡ðÊÄ¢ÕóÐ «¾ý ¯î º¢¸Ç¢ý ¦¾¡¨ Ä× ¸û ~, ,¥ ±É¢ý ŵ̧ ¡Î ÀüÈ¢Â அம்முக்§¸¡½ò¾¢ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý $\frac{M}{6}\left(\sim^2 + \ ^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \ ¥ + ¥\sim\right)$ ±É நிறுவுக

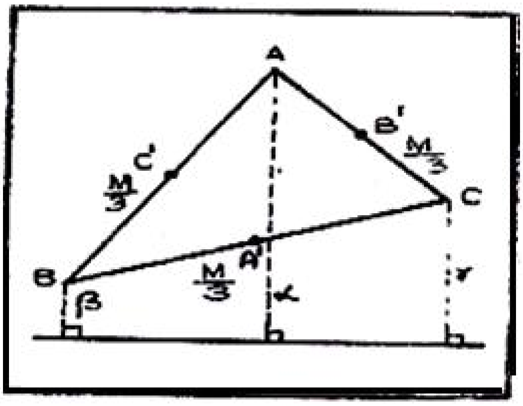
I என்பது ABC ±ý Û õ Ó̧ ¡½ò¾¢ø ´Õ §¸¡¼¡ Ì õ. I பற்றி ¢ ¸¡ Î ì ¸ôÀð¼ $\triangle ABC$ ±ý Û õ Ó̧ ¡½ò¾¢ý ¿¢¨ ÄÁò¾¢ÕôÒ¾¢È ý = I பற்றி (ழ ì § ¡½ò¾¢ý Àì ¸ í ¸Ç¢ý ¿ Î ôÒ ûÇ¢¸Ç¢ø ¨ Å ì ¸ôÀð¼ $\frac{M}{3}$

¿¢¨ ÈÔ ¨¼Â Ð¸ û ¸Ç¢ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

$$= \frac{M}{3}\left(\frac{\ +¥}{2}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{¥+\sim}{2}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{\sim +\ }{2}\right)^2$$

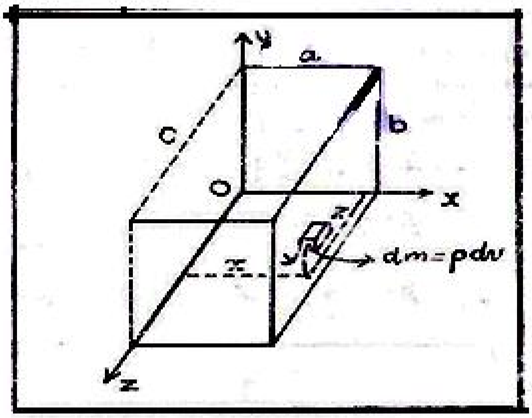
$$= \frac{M}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[\ ^2 + ¥^2 + 2\ ¥ + ¥^2 + \sim^2 + 2¥\sim + \sim^2 + \ ^2 + 2\ \sim\right]$$

$$= \frac{M}{6}\left(\sim^2 + \ ^2 + ¥^2 + \sim\ + \ ¥ + ¥\sim\right)$$



À¼õ (7.24)

3.15.4 M ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ ¸É¦ºùÅ¸ò¾¢ý Àì¸í¸û Ó¨È§Â a,b,c ¬Ì¸. ox,oy,oz ±ýÛõ ¦ºíÌò¾î͸¨Ç «¾ý 0±ýÛõ Ó¨ÉÅÆ¢§Â a,b,c Àì¸í¸Ç¢ý §À¡¸¡¸ «¨Áì¸. «ì¸É¦ºùÅ¸ò¾¢ý oz ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õô¾¢È¨ÉÔõ (ox,oy) ÀüÈ¢Â º¼òÐÅô¦ÀÕì¸ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.



À¼õ (7.25)

$$I_{xx} = \iiint \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$= \int_0^c \int_0^b \int_0^a \left(x^2 + y^2\right) p dv = p \int_0^c \int_0^b \int_0^a \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$$

$$= p \int_0^c dz \int_0^b \frac{a^3}{3} + ay^2) dy$$

$$= p.c. \left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{ab^3}{3} \right)$$

$$= \left(abcp\right) \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \right) = M \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \right)$$

$$I_{xy} = p\int_0^c\int_0^b\int_0^a xydxdydz$$

$$= p\int_0^c dzX\int_0^b ydyX\int_0^a xdx$$

$$= p\times c\times\frac{b^2}{2}\times\frac{a^2}{2}$$

$$=\left(abcp\right)\frac{ab}{4}$$

$$= M\,\frac{ab}{4}$$

3.15.5. 2a ¿¦Çõ, 2b « ¸Äõ ¯ ¨ ¼Â ´Õ º¦Ã¡É ¦ºùÅ¸ò¾¸ðÊý ´Õ Ó¨ÉôÒûÇ¢Ä¢ø « ¨ÁÔõ ¾¨ÄÂ¡Â « î Í ¸û «õÓ¨É ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ 2a ±ý Ûõ Àì ¸òÐ¼ý

$$–_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{3ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\right\}$$

$$–_2 = \frac{®}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{3ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\right\}$$

±ý Ûõ §¸¡½î º¡¢¨ Åô ¦ÀüÚûÇÉ ±É ì ¸¡ð Î ¸

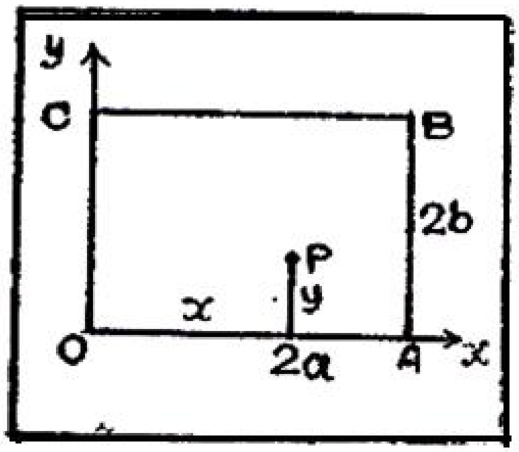
P±ýÀÐ ¾¸ðÊý «¼÷ò¾¢¨Â ì Ì È¢ôÀ¾¡¸¢ø «ò¾¸ðÊý ¿¢¨È M = 4 abp ¬ Ì õ.

I_{xx} = OA ÀüÈ¢Â ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý $= M\cdot\frac{4b^2}{3}$

$I_{yy}OB$ ÀüÈ¢Â ¿¢¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý $= M\cdot\frac{4a^2}{3}$

$I_{xy} = OA, OB$ ÀüÈ¢Â º¼òÐÅô ¦ÀÕì ¸õ

$$= \int_o^{2a}\int_o^{2b} pyydxdy$$



A¼õ (7.26)

$$= p\int_{o}^{2a} xdxx\int_{o}^{2b} ydy$$

= 4a^{2}b^{2}p

= $\left(4abp\right)\cdot$ab

= M ·ab

0Å¢ø « ¨ÁÔõ ¾¨ÄÂ¡Â «î Í ¸û 0A×¼ý ¯, ¯+ $\frac{®}{2}$ ±ý Ûõ §¸¡½ò¨¾ « ¨Áì ¸ð Î õ, «ô§À¡Ð

$$\tan 2¯ = \frac{2I_{xy}}{I_{yy}-I_{xx}} = \frac{2Mab}{\frac{4M}{3}\left(a^2-b^2\right)} = \frac{3ab}{2\left(a^2-b^2\right)}$$

¬ Ì õ.

$$¯_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{3ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\right\}$$

$$¯_2 = \frac{®}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{3ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\right\}$$

3.15.6. ´Õº¦Ã¡É ¦ºí§¸¡½ Óì§¸¡½ò¾¢ý ¦ºí§¸¡½ Ó¨ Éô ÒûÇ¢Â¢ø « ¨ÁÔõ ¾¨ÄÂ¡Â «î Í ¸û «õÓ¨ É ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ Àì¸òÐ¼ý ¾¡í Ìõ §¸¡½ í¸¨Çì ¸¡ ñ ¸

$$I_{xx} = \frac{Mh^2}{6};\ I_{yy} = \frac{Ma^2}{6}$$

$$I_{xy} = \int_o^a \int_o^b pxydxdy$$

$$= p\int_o^a x\left\{\int_o^{b/a(a-x)} ydy\right\}dx$$

$$= \frac{pb^2}{2a^2}\int_o^a x(a-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} pab \cdot \frac{ab}{12}$$

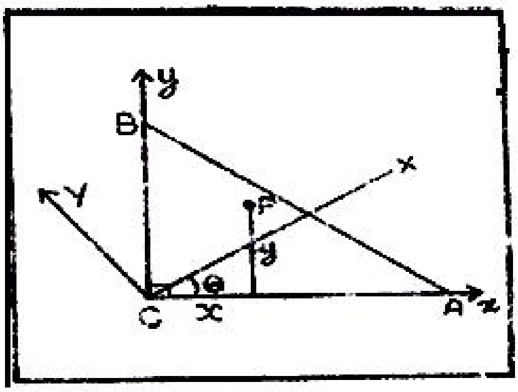
$$= M\,\frac{ab}{12}.$$

CÂ¦ø « ¨ ÁÔõ ¾¨ ÄÂ¡Â « î Í ¸ û CA×¼ý ¯,¯+ $\frac{®}{2}$ ±ý Ûõ §¸¡½ò¨¾ ¾¡í Ì Å¾¡¸¦ø

$$\tan 2¯ = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2\cdot\frac{Mab}{12}}{\left(\frac{Ma^2}{6} - \frac{Mb^2}{6}\right)} = \frac{ab}{a^2 - b^2}$$

$$¯_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{ab}{a^2 - b^2}\right\}$$

$$¯_2 = \frac{®}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{ab}{a^2 - b^2}\right\}$$



À¼õ (7.27)

7-8-7. ´Õº¦Ã¡É «¨ÃÅð¼ò ¾¸ðÊý Å¦ð¼Ó¨Éô ÒûÇ¦Â¦Ä¨ÁÔõ ¾¨ÄÂ¡Â «îÍ¸û Å¦ð¼òÐ¼ý ¯ §¸¡½î º¡¦¨Åô ¦ÀüÈ¦Õì Ì ¦ÁÉ¦ø $8\cot ¯ = 3®$ ±É ì ¸¡ð Î ¸

« ¨Ã Åð¼ò¾¸ ðÊý ¿¦¨È M ¬ Ì õ.
a ±ýÀÐ Åð¼ò¾¦ý ¬Ãò¨¾ì Ì È¦ì Ì ¦ÁÉ¦ø þ í Ì

$$CG = \frac{49}{3®}$$ ¬ Ì õ.

$I_{xx} = OD$ « ¨ÃÅð¼ò ¾¸ðÊý ¿¦¨ ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý

$$= M\frac{a^2}{4}$$

$I_{yy} = Oy$ ÀüÈ¦Â ¾¸ðÊý ¿¦¨ ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý

= GM ÀüÈ¦Â ¿¦¨ ÄÁò ¾¦ÕôÒ¾¦Èý $+M \cdot a^2$

$$= \frac{Ma^5}{4} + Ma^2 + \frac{5Ma^2}{4}$$

I_{xy} = ox,oy ÀüÈ¦Â ¾¸ðÊý º¼òÐÅô¦ÀÕì¸õ

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{GL,GM ÀüÈ¦Â}\\ \text{¾¸ðÊý}\\ \text{º¼òÐÅô}\\ \text{¦ÀÕì¸õ}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{ox,oy ÀüÈ¦Â}\\ \text{M ¿¦¨È¨Âô}\\ \text{¦ÀüÚ GÂ¦ø «¨ÁÔõ Ð¸Ç¦ý}\\ \text{º¼òÐÅô ¦ÀÕì¸õ}\end{array}\right\}$$

$$= 0 + M \cdot OC \cdot CG$$

$$= M \cdot a \cdot \frac{4a}{3®} = \frac{4Ma^2}{3®}$$

0Å¦ø «¨ÁÔõ ¾¨ÄÂ¡Â «îÍ¸Ç¦ø ²§¾Ûõ ´ýÚ Å¦ð¼òÐ¼ý ¯§¸¡½î º¡¦¨Åô ¦ÀüÚûÇ¾¡¸¦ø

$$\tan 2¯ = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2 \cdot \frac{4Ma^2}{3®}}{\left(\frac{5Ma^2}{4} - \frac{Ma^2}{4}\right)} = \frac{8}{3®}$$

$$\therefore 8\cot 2¯ = 3®$$

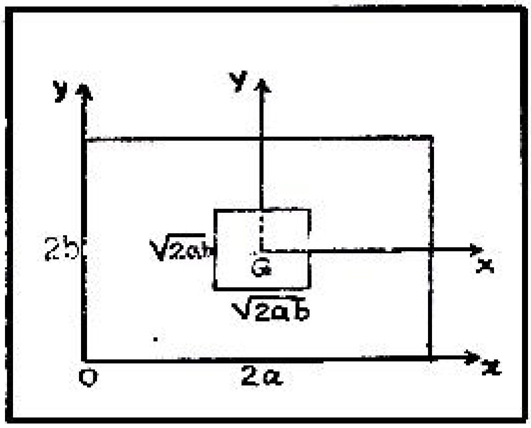
3.15.8 2a ¿¦Çõ, 2b «¸Äõ ¯¨¼Â ´Õº¦Ã¡É ¦ºùÅ¸ò¾¸ðÊý ¿Î¨ÁÂò¾¦ø þÕóÐ «¾ý ¿¦¨ÈÂ¦ø À¡¾¦ «Ç¨Åô ¦ÀüÚûÇÐõ, ºÐÃÅÊÅÓûÇÐÁ¡É À Ì ¾¦¦Â¡ýÚ ¦Åð¼ôÀð Î ¿¦ì¸ôÀÎ¸¦ÈÐ. Á¾¦ÓûÇ ¦ºùÅ¸ô À Ì ¾¦Â¦ý ´Õ ÓÉ¦Â¦Ä¨ÁÔõ ¾¨ÄÂ¡Â «îÍ¸û «õÓ¨É ÅÆ¦§Â ¦ºøÖõ 2a ±ýÛõ À ì¸òÐ¼ý

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{6ab}{5\left(a^2-b^2\right)}\right\}$$

$$= \frac{®}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{6ab}{5\left(a^2-b^2\right)}\right\}$$

± ý Û õ §¸ ¡ ½ í ¸ ¨ Çò ¾¡ í Ì ¦ÁÉ ì ¸ ¡ð Î ¸

Á¾Ó û Ç ¦ºùÅ ¸ò¾ ¸ ðÊ ý « ¨ Áôò (À¼õ 7.28)ø ¸ ¡ð¼ôÀð Î û ÇÐ.



(À¼õ 7.28)

¦ÅðÊ ± Î ì ¸ôÀð¼ ºÐÃôÀ Ì ¾¢Â¢ý À ì ¸ò¾¢ý ¿£Çõ

$$= \sqrt{\frac{4ab}{2}} = \sqrt{2ab}$$

$I_{xx} = GX$ ÀüÈ¢Â Á¾Ó û Ç ¾¸ ðÊ ý ¿¢¨ ÄÁò ¾¢Õôò¾¢È ý

$$= 4ab° .\frac{b^2}{3} 2ab° .\left(\frac{\sqrt{2}ab}{4\times 3}\right)^2$$

$$= \frac{4ab°}{3}\left(b^2-\frac{ab}{4}\right)$$

$$= \frac{ab°}{3}\left(4b^2-ab\right)$$

$$I_{xx} = I_{xx} + \left(2ab°\right)\times b^2$$

$$= \frac{ab°}{3}\left(4b^2-ab\right)+2ab^2°$$

$$= \frac{ab°}{3}\left(10b^2-ab\right)$$

« ùÅ¡§È

$$I_{yy} = \frac{ab°}{3}\left(10b^2 - ab\right)$$

$$I_{xy} = I_{xy} + \left(2ab°\right)\cdot b\cdot a\cdot$$

$$= 0 + 2a^2b^2°$$

¬ Ìõ.

0Å¦ø « ¨ÁÔõ ¾¨ÄÂ¡Â «îÍ¸û OA ×¼ý $¯,¯+\frac{®}{2}$ + 0±ý Ûõ §¸¡½î º¡¦¨Åô ¦ÀüÚûÇ¾¡¸¦ø

$$\tan 2¯ = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}$$

$$= \frac{2\times 2ab^2°}{\frac{ab°}{3}\left(10a^2 - ab\right) - \frac{ab°}{3}\left(10b^2 - ab\right)}$$

$$= \frac{6ab}{5\left(a^2 - b^2\right)}$$

¬ Ìõ.

±É§Å

$$¯_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{6ab}{5\left(a^2 - b^2\right)}\right\}$$

$$¯_2 = \frac{®}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{6ab}{5\left(a^2 - b^2\right)}\right\}$$

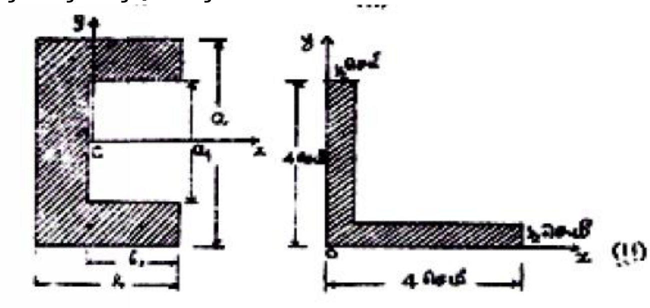
¬ Ìõ.

3.16 ÀÂ¢üº¢

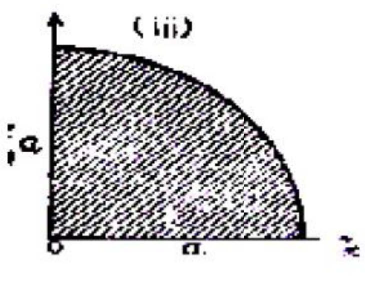
3.16.1 µ÷ þÕºÁÀì¸ ¦ºí§¸¡½ Óì§¸¡½ò¾¢ý ¸÷½õ ÀüÈ¢ «¾ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È¨ É ì ¸¡ ñ ¸
(Å¢¨¼ a ±ý ÀÐ ¸÷½ò¾¢ý ¦¾¡¨Ä× ±É¢ø ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý $= \frac{Ma^2}{24}$)

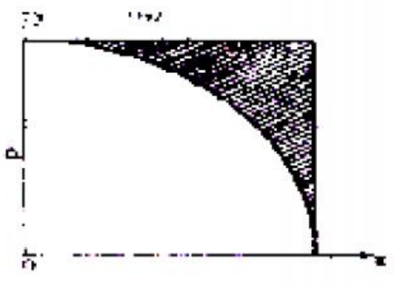
3.16.2 ´Õ ºÐÃò¾¢ý ã¨ÄÅ¢ð¼õ ÀüÈ¢ «¾ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È¨ É ì ¸¡ ñ ¸.
(Å¢¨¼: Àì¸õ a ¬ É¡ø ¿¢¨ÄÁò¾¢ÕôÒ¾¢Èý $= \frac{Ma^2}{12}$)
ã¨Ä Å¢ð¼õ l ¬ É¡ø ¿¢¨ÄÁò¾¢ÕôÒ¾¢Èý $= \frac{Ml^2}{24}$)

3.16.3 À¢ý ÅÕõ ¯ÕÅôÀ¼í¸Ù ì Ì OX «î Í ÀüÈ¢Â ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¸¨Çì ¸¡ ñ ¸.

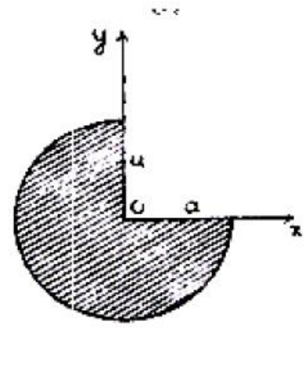


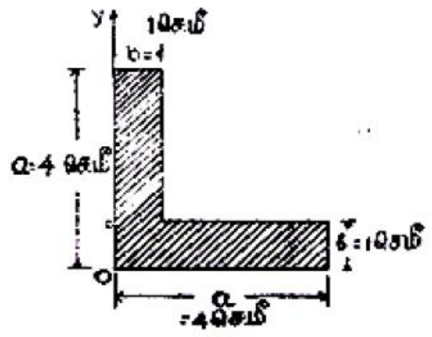
(Å¢¨¼ : $I_x = \frac{p}{12}\left(ba^3 - b_1a_1^5\right)$; $I_x = 5.56\,p$ ¦ºÁ¢^{4})





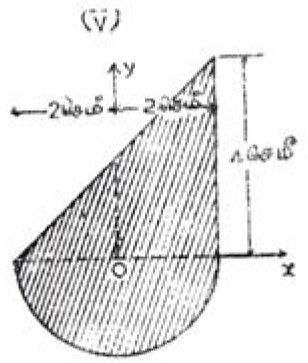
(Å¢¨¼ : $I_x = \frac{®\, pa^4}{16}$; $I_x = \frac{a^{4}°}{48}\left(16 - 3®\right)$)

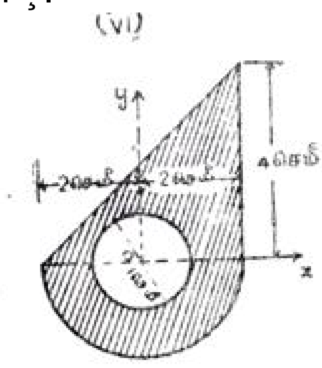




(Å¢¨¼ $I_x = 504.56p$ ¦º.Á^4 , Å¢¨¼ $I_x = 26.83p$ ¦º.Á^4)

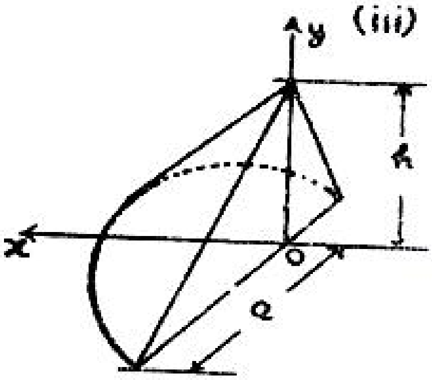
3.16.4 À¢ýÅÕõ ¯ÕÅôÀ¼í¸Ùì¸Ì OX, OY «îÍ¸û ÀüÈ¢Â º¼òÐÅô¦ÀÕì¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.





(Å¢¨¼: $I_{xy} = -\frac{a^4 p}{8}, I_{xy} = 7.75p$ ¦º.Á

(iii) «¨Ã¾¢ñ Áì Üõ Ò



(Å¢¨¼ : $I_{xy} = \frac{2Mah}{®}$

3.17 §ÁÖõ º¢Ä ÀÂ¢üº¢¸û

1. ÀÃôÀÇ× ´ý È¢ý ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý ¸¨Ç x ÁüÚõ y «î Í ¸¨Çì Ì È¢òÐ Å¨ ÃÂÚì ¸.
(Å¢¨¼, ÀÃôÀÇ× A ý º¢È¢ÂÀ Ì ¾¢ ¸Çò¾¢ø dA ±ýÚ ±Î ì Ì õ§À¡Ð x, y «î Í ¸û Ì È¢òÐ ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý ¸¨Ç ¦¾¡¨ ¸Â¢¼ø Å¡Â¢Ä¡¸

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

±ýÈ ºÁý À¡ Î ¸û Å¨ ÃÂÚì ¸ôÀ Î ¸¢ýÈÉ.

2. §¸¡½ àÃ (polar) «¨ÁôÀ¢ø A ý º¢È¢Â À Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â §¸¡½ àÃ ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý ÐÕÅôÒûÇ¢ 0 Ì È¢òÐ
$dJ_o = r^2 dA, r = o$ (z «îº¢ý) ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ º¢È¢ÂÀ Ì ¾¢ dAì Ì ¦ºí Ì òÐ ¦¾¡¨Ä¨Åì Ì È¢ì ¸¢ÈÐ. ±É§Å ÀÃôÀÇ× Aì Ì ¯¡¢Â §¸¡½ àÃ ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢È $J_o = \int_A r^2 dA = I_x + I_y; \left(r^2 = x^2 + y^2\right)$ ¬ Ì õ. ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢ÈÛ ì Ì ¯¡¢Â «Ä Ì ¸û ¦¾¡¨ÄÅ¢ý 4õ «Î ì Ì $\left(m^4, mm^4\right)$ ¬ Ì õ.

3. þ¨½ «î Íò §¾üÈò¨¾ ´Õ ÀÃôÀÇÅ¢üÌ ÜÚ¸.

Å¢¨¼

ÀÃôÀ¢ý ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒள்ளி Cன் ÅÆ¢§Â cx,cy ±ýÈ «î Í ¸û ox,oy¸ Ùì Ì þ¨½Â¡¸ $\rho(d_x, d_y)$ என்ÚûÇÀÊ ±Î ôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ñ Î x«î Í Ì È¢òÐõ, ÁüÚõ yஅச்சு குÈ¢òÐõ ±Î ì ¸ôÀ Î õ ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý ¸û Ó¨È§Â

$$I_x = \int_A \left(y^1 + d_y\right)^2 dA = I_{x^1} + Ad^2{}_y$$

$$I_y = \int_A \left(x^1 + d_x\right)^2 dA = I_{y^1} + Ad^2{}_x;$$

±É×õ Å¨ ÃÂÚì ¸ôÀ Î Å¾¡ Ì õ.
þùÅ¡§È x, y ¾Çò¾¢ü Ì 0 ÐÕÅôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºí Ì ò¾¡¸ ±Î ì Ì õ z «î Í Ì È¢òÐ §¸¡½ àÃ ¿¢¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢ÈÛ ì Ì ¯¡¢Â ºÁý À¡ Î

$$J_o = \overline{J_c} + Ad^2$$

4. §¾üÈõ
´Õ «î Í Ì È¢òÐ ÀÃôÀÇÅ¢ü¸¡É ¿¢¨ÄÁò¾¢ÕôÒò¾¢Èý «ôÀÃôÀÇÅ¢ý ¾¢ ñ Á¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â þ¨½Â¡¸ ±Î ì ¸ôÀ Î õ «î Í Ì È¢òÐ «ÇÅ¢ Î õ ¿¢¨ÄÁò ¾¢Õôò¾¢Èý ÁüÚõ ÀÃôÀÇ× þÕ «î Í ¸ Ù ì Ì õ

þ ¨¼ôÀð¼ ¦º í Ì òÐò ¦¾¡ ¨ÄÅ¢ ý þÕÀÊ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ ý ¦ÀÕì ¸ò¦¾¡ ¨ ¸ ± ý ÀÉ ÅüÈ¢ ý Ü Î ¾Öì Ì î ºÁÁ¡ Ì õ.

5. ÀÃôÀÇ× ´ ýÈ¢ ý ÍÆ¢Â¡ ¨Ã ¨Â (Radius of gyration) Å ¨ÃÂÚ ì ¸.

I_x , I_y ÁüÚõ J ¬ ¸¢Â ¨Å ¦¾¡¢ó¾¢Õì Ì õ§À¡Ð ÍÆ¢¬ ¨Ã ¸ û Ó ¨È§Â

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

± ý È Ýò¾¢Ã í ¸Ç¡ø (Å¡öÀ¡ Î ¸Ç¡ø) Å ¨ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ.

6. ÀÃôÒ ´ ýÈ¢ ¨ º º¼òÐÅô¦ÀÕì ¸ò ¨ ¾ (product of inertia) Å ¨ÃÂÚ ì ¸.

ox, oy « î Í ¸ ¨Çì Ì È¢òÐ dA ± ý Ûõ º¢È¢Â ÀÃôÒ ´ ýÚ ¸¢ ¨ ¼Â¡ ¸ x ¦¾¡ ¨ÄÅ¢Öõ ¿¢ ¨ÄÂ¡ ¸ y ¦¾¡ ¨ÄÅ¢Öõ « ¨ÁÔ¦ÁÉ¢ø ÀÃôÒ Å ý º¼òÐÅô¦ÀÕì ¸õ

$$I_{xy} = \int_A xydA$$ ± ý È ºÁ ý À¡ð¼¡ø Å ¨ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î ¸¢ÈÐ.

7. ÀÃôÒ ´ ýÈ¢ ý º¼òÐÅô¦ÀÕì¸òÐ¼ý ¦¾¡¼÷ÒûÇ þ ¨ ½ « î Í ò §¾üÈò ¨ ¾ Å ¨ÃÂÚ ì ¸.

ÀÃôÀ¢ ý ¾¢ ñ Á ¨ÁÂ ப்புள்ளி C என் ÅÆ¢§Â p_{x^1}, c_{y^1} ± ý È « î Í ¸ û ox, oy¸ Ù ì Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ $\rho(d_x, d_y)$ என் ÚûÇÀÊ ± Î ôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î dA ± ý È º¢È¢Â ÀÃôÒ c_{x^1}, c_{y^1} ¦¾¡ ¨Ä× ¸Ç¢ø « ¨ÁÔ¦ÁÉ¢ø

$$I_{xy} = \int_A \left(x^1 + d_x\right)\left(y^1 d_y\right) dA$$

$$= \int_A x^1 y^1 dA + d_x \int_A y^1 dA + dy \int_A x^1 dA + d_x d_y \int dA$$

$$= \bar{I}_{x^1 y^1} + Ad_x d_y$$

8. ¦À¡Õû ´ ýÈ¢ ý ¾¢½¢×ì Ì (mass) ¯¡¢Â ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý º¡÷¾ Ýò¾¢Ã í ¸û ÅÕÁ¡Ú

(i) z « î Í Ì È¢òÐ $I = \int_m r^2 dm$

$$= \int_v r^2 \rho\, dv = \rho \int_v r^2 dv$$

(ii) þ ¨ ½ « î Í ò §¾üÈõ

$$I = \int_m r^2 dm = \int_m \left[\left(d + x^1\right)^2 + y^{1^2}\right] dm = I_G + md^2$$

$I_G = z'$ « î Í Ì È¢òÐ ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý

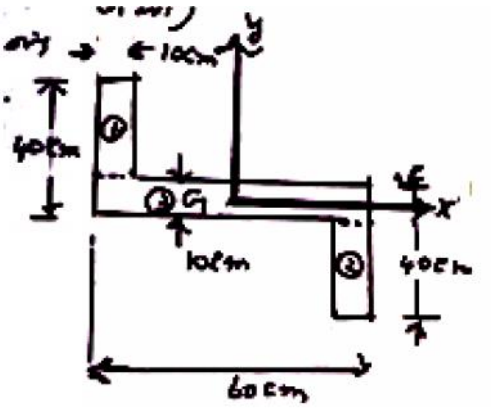
$m =$ ¦À¡ÕÇ¢ ý ¾¢½¢×

d = þ ¨ ½ « î Í ¸ Ù ì Ì ûÇ ¦¾¡ ¨Ä×

(iii) Í Æ¢Â¡ ¨ Ã

$$I = mk^2, k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

9. ´Õ ¯ò¾Ãò¾¢ý Ì Úì Ì ¦Åð Î ô ÀÃôÀÇ× À¼ò¾¢ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÐ. ¾¢ ½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢ý (Gý) ÅÆ¢§Â x,y «î Í ¸ û ±Î ì ¸ôÀð Î ûÇ É. ¯ò¾Ãò¾¢ý ¿¢ ¨ÄÁò ¾¢ÕôÒò¾¢È ¨ É x,y «î Í ¸ ¨ Çì Ì È¢òÐ ¾¦÷Á¡ É¢ì ¸ ×õ



Å¢ ¨ ¼

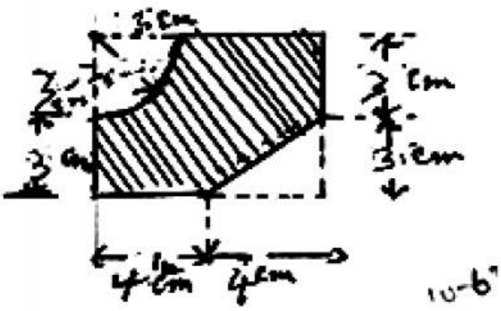
$$I_{xx} = \frac{1}{12}(40)(10)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(10)(40)^3\right] + 2(10)(40)(15)$$

$$= 29.0 \times 10^4 cm^3$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(10)(60)^3 + \frac{2}{12}(30)(10)^3 + 2(30)(10)(25)^2$$

$$= 56.0 \times 10^4 cm^3$$

10. À¼ò¾¢ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇ ¦Åð Î Ó¸ô À Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â ÀÃôÀÇÅ¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢È ¨ ÉÔõ Í Æ¢Â¡ ¨ Ã (radius of gyration)Ôõ x «î Í Ì È¢òÐ ¾¦÷Á¡ É¢ì ¸ ×õ.



Å¢ ¨ ¼

A1 ¦ºùÅ¸ò¾¢ý ÀÃôÒ: b = ¿¦Çõ = 8$\{[10^{-2}]$மீ$\}$;

d = ¯ÂÃõ = 3$\{[10^{-2}]$மீ$\}$

A2 Ó ì §¸ ¡ ½ ò¾¢ ý ÀÃôÒ: b = ¿¦Çõ = 4$\{[10^{-2}]$மீ$\}$;

h = ¯ÂÃõ =1.5$\{[10^{-2}]$மீ$\}$

A3 ¸ ¡øÅð¼ôÀÃôÒ: R = ¬Ãõ 1.5$\{[10^{-2}]$மீ$\}$

11. ÀÃôÒ¸ û A2, A3-¬ ¸¢Â ¨ Å ¿¦ì ¸ôÀð Î ûÇ É

$I_{xx} = 0.055\ (10^{-4})12^{4}$ - ¸ ¡øÅð¼ôÀ Ì ¾¢

$I_{xx} = bd^3/12$ ¦ºùÅò¾¢ü Ì

$\frac{bh^3}{36}$ Ó ì §¸ ¡ ½ ò¾¢ü Ì

« ÅüÈ¢ ý ¾¢ ñ Á ¨ ÁÂ « î Í Ì È¢òÐ.
Í ð Î Ó ¸ò¾¢ü Ì .

$$I_{xx} = \left(\sum I_{xx}\right)i + \sum (A_1)\left(\overline{y_i}\right)$$

$$A_1 = (8)(6) = 48, Y_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(4)(3) = 6$$

$$A_3 = \frac{®R^2}{4} = \frac{®}{4}(3^2) = 7.06858$$

Å¡¢ ¨ º ± ñ	ÀÃôÒ (A)	Y_i	$(I_{xx})i$	$A_i\overline{y_i}^2$;
1	48	30	144	432
2	–6;	10	–3	–6
3	–7.06858	$6 - \frac{4(3)}{3®}$	−44550	–157.930

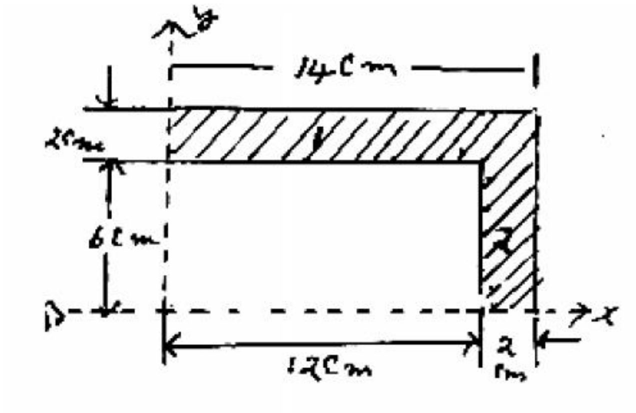
$\sum A_i = 34.93142$ $\sum I_{xx} = 0.47268$

$$I_{xx} = 136.5450 + 268.0692\ 742$$

$$= 404.6142742\ cm^4$$;$\{[10^{-2}]$மீ$\}$

x: Ì È¢òÐ ÍÆ¢Â¡ ¨ Ã $\sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} = 3.40341cm$; $\{[10^{-2}]$மீ$\}$

12. À¼ò¾¢ø ¸ ¡ð¼ôÀð Î ûÇ À Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â ÀÃôÇÅ¢ ý º¼òÐÅô ¦ÀÕì ¸ò ¨ ¾ x « î Í Ì È¢òÐ ¾¢÷Á¡ É¢ì ¸ ×õ,
[Å¢ ¨ ¼:þ í Ì ¦ºùÅ ¸õ ´ Õ « î Í Ì È¢òÐ ºÁîº¦Õ ûÇ¾¡÷



º¼òÐÅô¦ÀÕì¸õ «¾Û ¨¼Â ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒûÇ¢ì Ì ¯¸ó¾ «î Í
Ì È¢òÐ âîº¢ÂÁ¡ Ì õ («¾¡ÅÐ $I_{xy}=0$ ÀÃôÒ (1)ì Ì õ, ÀÃôÒ (2)ì Ì õ)

Å¡¢¨º ± ñ	ÀÃôÒ	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$A\overline{X}\overline{Y}$
1	$(14)(2)=28$	7.0	$6+1=7$	$(28)(7)(7)=1372$
2	$(2)(6)=12$	$12+1=13$	3	(12)(13)3.468

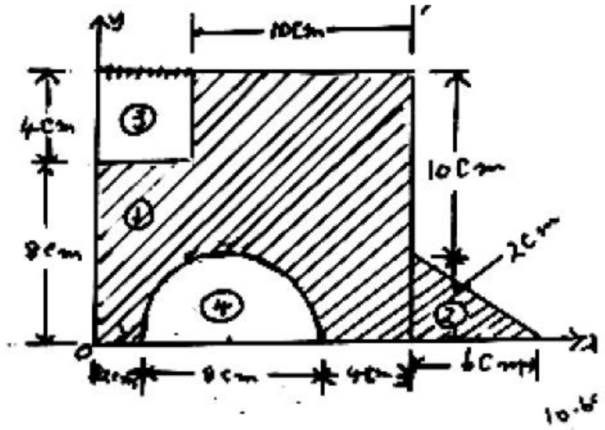
$$I_{xy}=\sum(I_{xy})i+\sum A_i(\overline{x}i)(\overline{y}_i) \qquad \sum 1840$$

$$=1840cm^4 \left\{\left[10^{-2}\right]ꦱ\right\}$$

13. À¼ò¾¢ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇ ÀÃôÀÇÅ¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢ý «îÍò ¦¾¡¨Ä×¸¨Ç (x,y) «îÍ¸û «¨ÁôÀ¢ø ¾÷ÁÉ¢ì¸×õ.
Å¢¨¼

(1) ¦ºùÅ¸õ 14x12
(2) Óì§¸¡½õ 2x6
(3) ºÐÃõ -(4x4) =- 16
(4) «¨ÃÅð¼õ =- $\frac{®}{2}\times 16$

$r=4cm=-25.13$



Å¡¢¨º ± ñ	A	$\overline{x}$	$\overline{y};$	$A\overline{x}$	$A\overline{y}$
1	$14\times12=168$	7	6	1176	1008
2	$\frac{1}{2}(2)(6)=6$	16	6.67	96	4.0
3	-16	2	10	-32	-160
4	-25.13	6	1.697;	-150.780	-42.64561

$\sum 13287$ $\sum 1089.220$ $\sum 809.357$

$\bar{x}=\frac{1089.220}{132.87}=8.197$ cm; $\left\{\left[10^{-2}\right]ß\right\}$

$\underline{F_k}, \underline{f_k} = m_k \underline{\pm_k}$;$\left\{\left[10^{-2}\right]ß\right\}$

¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢ (8.197,6.09 cm) $\left\{\left[10^{-2}\right]ß\right\}$

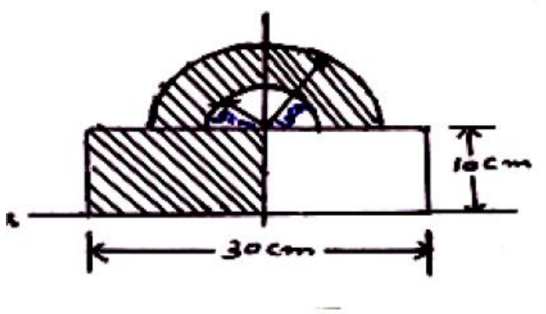
14. À¼ò¾¢ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇ ¦Åð Î Ó ¸ôÀ Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â ÀÃôÀÇÅ¢ý þÕÀÊ ¾¢ÕôÒ¾¢È ¨É «¾ý «Ê «î Í a-a Ì È¢òÐ ¾¢÷Á¡É¢ì ¸×õ

Å¢¨¼

(1) ¦ºùÅ ¸õ

(2) « ¨ÃÅð¼õ

(3)Åð¼õ



aa Ì È¢òÐ(1)- ý ¾¢ÕôÒò¾¢È ý $=\frac{1}{3}(30)(10)(10^2)t$

$=10000$

¾¢ ñ ¨ÁÂôÒÇ¢Â¢ ý

Åஇ§Â ¦ºøÖõ ¾¢½õ «î Í .

Ì È¢òÐ(2)- ý ¾¢ÕôÒò¾¢È ý $(0.11r^2)r^2=(0.11)r^4$

$=0.11(10)^4$

$=1100$

$A=®r^2/2 = ®(2.5)^2/20 = 1.5757$

aa Ì È¢òÐ $I=1100+1.5707(14.244)^2=$ 32968.1735

¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒû Ç¢Â¢ ý ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ ¾¢ ñ Á $=\frac{®r4}{4}=\frac{®(5)^4}{4}$ « î Í

Ì È¢òÐ (3)- ý ¾¢Ĝநப்புதிறன்ý . =490.3738

A = ÀÃôÒ = 78.54

aa Ì È¢òÐ I =- 490. 8738-78.54(10)

=- 490.8738-0.7854

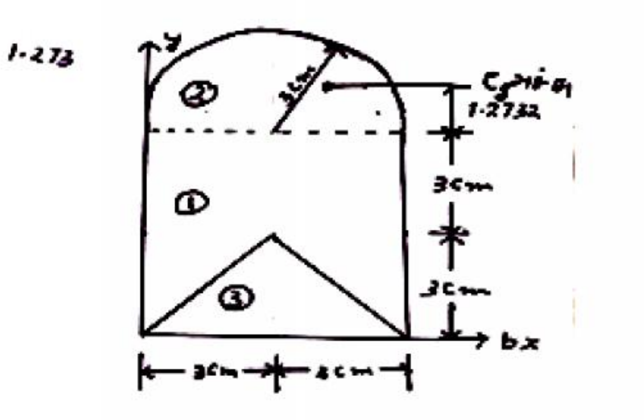
=-8344.8738

aa Ì È¢òÐ
¦ Á¡ò¾
ÀÃôÀÇÅ¢ü Ì ¡¢Â } I = 1000+32968.1735-8344.8738

= 34623.3004 cm^4 $\{[10^{-2}]மீ\}$

15. À¼ò¾¢ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇ ¾Ç§ÁüÀÃôÀ¢ ý þÕÀÊ ¾¢ÕôÒ¾¢È¨ É «¾ý ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢ ý ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ ¸¢¨¼Â¡É ¾¢ ñ Á «î Í Ì È¢òÐ ¾÷Á¡É¢ì ¸×õ.

Å¢¨¼ ($\frac{4R}{3®}=\frac{4(3)}{3®}=1.273$)



Å¡¢¨º± ñ	A	ÀÃôÒ y		Ay	$\frac{1}{2}bd^3$	Ay^2
1.	36	3	108	(«Ê ì §¸¡ Î Ì È¢òÐ	$\left(\frac{1}{3}bd^3\right)$	
2 .	14.13	7.273	102.76	$0.11r^4=8.91$	743.37	
3.	-9	1	-9	-13.5 («Ê ì §¸¡ Î Ì È¢òÐ	$\left(\frac{1}{12}\right)bd^3$)	
4.	41.13		201.76	1170.78		

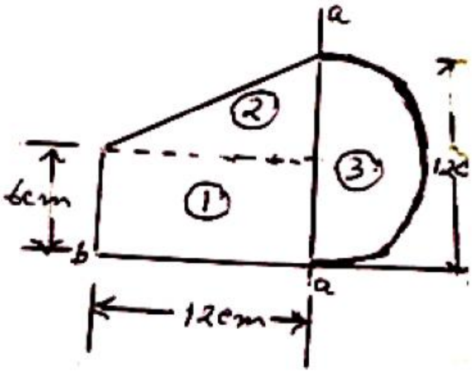
$$\bar{y}=\frac{201.76}{41.13}=4.905$$

¸¢¨¼ì§¸¡Î ì Ì ¡¢Â
« î Í ´ ýÈ¢ü Ì
¯ ¡¢Â¾¢ÕôÒò¾¢È ý

$$= 1170.78(201.76)(4.905)$$

$$= 181.1472$$

16. À¼ò¾¢ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇ À Ì ¾¢ì Ì ÀÃôÀÇÅ¢ý ¾¢ ½¢× ¨ÁÂò ¨¾ ¦¸¡ Î ì¸ôÀð¼ aa-« î Í ÁüÚõ bb-« î Í Ì È¢òÐ ÀÃôÀÇÅ¢ü¸¡É ¾¢ÕôÒò¾¢È ¨É ì ¦¸¡ ñ Î ¾÷Á¡É¢ì¸×õ.



Å¢¨¼

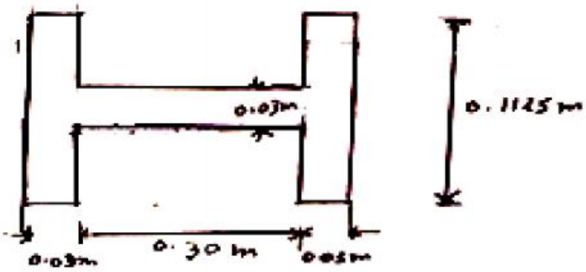
Å¡¢¨º± ñ	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$A\bar{x}$	$A\bar{y}$
1	-72	-6	3	-432	216
2	36	-4	8	-144	288
3	$\frac{®(6^2)}{2}$	$4(6/3)$	$®6$	143.8	339
	164.5	$= 2.546$		-432.2	843

$$X_C = \frac{-432}{164.5} = -2.677$$

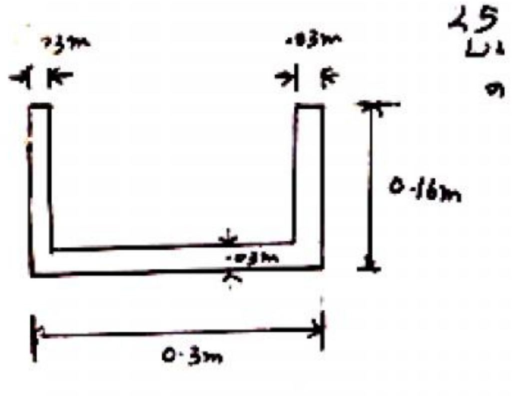
$$y_C = \frac{843}{164.5} = 5.124$$

17. À¢ýÅÕõ À¼ò¾¢ø ¦Åð Î Ó¸õ ´ù¦Å¡ýÈ¢ü¸¡É º¼òÐÅò ¾¢ÕôÒò¾¢È ¨É ì ¸¡ ñ ¸.

H ¦Åð Î Ó¸õ



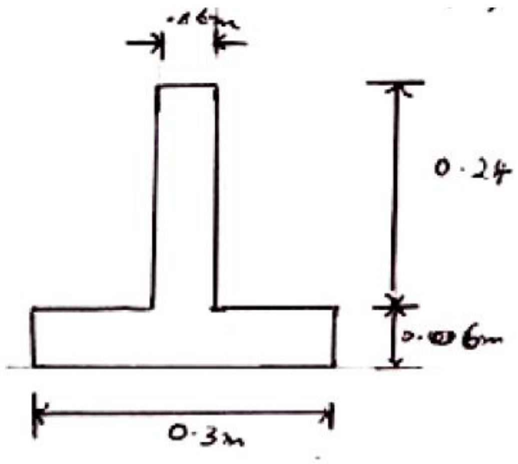
18. À¼ò¾¢ø ¸¡ðÊÔûÇ ¦Åð Î Ó ¸ò¾¢É ÀÃôÀ¢ü Ì ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢ ý ÅÆ¢§Â ±Î ì Ì õ «î Í ¸ ¨Ç Ì È¢òÐ º¼òÐÅò ¾¢ÕôÒ¾¢È ¨ ÉÔõ, §¸¡ ½ ò ¨ ¾Î º¡÷ó¾ (bolar) º¼òÐÅò ¾¢ÕôÒ¾¢È ¨ ÉÔõ ÀÃôÀ¢ü Ì õ ¸¡ ñ ¸.



(Å¢ ¨ ¼

$$I_{xx} = 2.40x10^{-16} m^4$$
$$I_{yy} = 13.14x10^{-6} m^4$$
$$I_p = 15.54x10^{-6} m^4$$)

19. À¼ò¾¢ø ¸¡ðÊÔûÇ ¾ ¨ Ä ¸¸¡É T- ý ¦Åð Î Ó ¸ò¾¢ ý ÀÃôÀÇÅ¢ü Ì , ¾¢ ñ Á ¨ÁÂôÒûÇ¢Â¢ ý ÅÆ¢§Â ±Î ì Ì õ «î Í ¸ ¨Ç Ì È¢òÐ º¼òÐÅò ¾¢ÕôÒ¾¢È ¨ É ì ¸¡ ñ ¸.



(Å¢ ¨ ¼ $15.91x10^{-6} m^4; I_{yy} = 8.71x10^{-6} m^4$)

«Ä Ì - 4

4.1 þÂì¸Å¢Âø (Ð¸û þÂí¸¢Â¢Âø)

4.1.1 þÂì¸Å¢ÂÄ¢ý ãÄ¸í¸û (Elements of Kinematics)

Å¢¨º¸û ¦À¡Õû ´ý¨Èò ¾¡ì Ì Å¾¡ø «¨Å («) «ô¦À¡Õ¨Ç µö× ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åì¸Ä¡õ «øÄÐ (¬) «ô¦À¡ÕÇ¢ø þÂì¸ò¨¾ò §¾¡üÚÅ¢ì¸Ä¡õ «øÄÐ (þ) «ô¦À¡ÕÇ¢ø Óý0 þÕó¾ þÂì¸ò¨¾ Á¡üÈÄ¡õ.

Å¢¨º¸Ç¡ø ¾¡ì¸ôÀð Î ô ¦À¡Õû¸û µö× ¿¢¨ÄÂ¢ÄÂ¢ÕìÌ Á¡Ú «¨ÁÔõ «ùÅ¢¨º¸Ç¢ý ¾¡ì¸ò¨¾ô ÀüÈ¢ Å¢Å¡¢òÐì ÜÚõ á ø ¿¢¨ÄÂ¢Âø (Statics) ±ýÚõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¾¡ì¸ò¾¾¡ø ¦À¡Õû¸Ç¢ø þÂì¸õ ²üÀÎÅ¨¾ Å¢Å¡¢òÐì ÜÚõ á ø þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø (Dynamics) ±ýÚõ ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

þó á üÀÌ¾¢Âø, ´ÕÐ¸Ç¢ý (Particle) þÂì¸ò ¨¾ô ÀüÈ¢Ôõ, À¢ÈÌ ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý (Rigid body) þÂì¸ò¨¾ô ÀüÈ¢Ôõ ÜÈôÀÎõ,

¦À¡ÐÅ¡¸, þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø, («)þÂì¸Å¢Âø(Kinematics) (¬)Å¢¨ºÂ¢Âø (Kinetics) ±É þÕÀÌ¾¢¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸ôÀð Î Å¢Çì¸ôÀÎõ.

Ð¸û¸û, ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû¸û ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø þÂì¸õ ±ì¸¡Ã½í¸Ç¡ø Å¢¨Ç¸¢ýÈÐ ±ýÚ §¿¡ì¸¡Áø, «¨Å þÂíÌõ ÀøÅ¨¸ Â¡É Á¡¨¾¸Ç¢ý ÅÊÅ ¨Áô¨À (Geometry of motion) Å¢Å¡¢ìÌõ ÀÌ¾¢§Â þÂì¸Å¢ÂÄ¡Ìõ.

þÂì¸Å¢ÂÄ¢ý ¸ÕòÐ¸¨Ç ÅÊÅ¸½¢¾ «¨ÁôÀ¢ø ¿ýÌ «È¢§Å¡Á¡Â¢ý, þÂì¸ò¨¾ Å¢¨ÇÅ¢ìÌõ ãÄìÜÚ¸Ùìì þ¨¼§ÂÔûÇ ¦¾¡¼÷Ò¸¨ÇÔõ þÂì¸ò¨¾ô ÀüÈ¢Ôõ ±Ç¢¾¡¸ ¦ÅÇ¢ôÀÎò¾ þÂÖõ.

¦À¡Õû¸Ç¢ý þÂì¸ò¾¢üÌì ¸¡Ã½Á¡É Å¢¨º, ÁüÚõ ¾¢Èý, ¬üÈø ¬¸¢ÂÅü¨È Å¢Å¡¢ìÌõ ÀÌ¾¢§Â Å¢¨º¢ÂÄ¡Ìõ.

þÂì¸õ, «Ð ¿¢¸úÅ¾üÌ¡¢Â ¸¡Ã½õ ¬¸¢ÂÅü¨ÈôÀüÈ¢ «È¢Å¢ìÌõ «È¢×òÐ¨È þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø (Dynamics) ±ÉôÀÎõ.

4.1.2 þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢ÂÄ¢ý À¢¡¢×¸û

þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Â¨ÄÌ ¸¢úì¸¡ Ï õ À¢¡¢×¸Ç¡¸ô À¢¡¢òÐ «È¢¾ø Ó¨ÈÂ¡Ìõ.

(«) ´Õ Ð¸Ù Ì Ì¡¢Â þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø (Dynamics of a Particle)

Ð¸û ±ýÀÐ ¦À¡Õ ñ ¨Á§ÂÂ¡Î ÜÊÂ ¸üÀ¨É Â¡É ¯Õ¦Å¡ì¸ôÀð¼ ÀÕÁÉüÈ 0ûÇ¢¡Ìõ. þôÀ¢¡¢Å¢ø Ð¸Ç¢ý þÂì¸õ Å¢Å¡¢ì¸ôÀÎõ.

(¬) Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ìÌ¡¢Â þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø (Dynamics of a System of Particles)

¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû (Rigid body), À¡ö¦À¡Õû (Fluid) ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý þÂì¸ò¾¢üÌ º ýÚ§¸¡Ä¡¸ «¨ÁÔõ ¦¾¡¼÷¸ º¼¸ þÂì¸ò¨¾ (Motion of continuous media) þôÀ¢¡¢× Å¢Çìì Ìõ.

(þ) ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø (Dynamics of a Rigid body)

¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû ±ýÀÐ, «¾ý ÀÌ¾¢¸û ´ýÚì¦¸¡ýÚ Á¡È¡ ¿¢¨ÄÂ¢Ä¨ÁóÐ, ÀÕÁÛ¼ý ¦À¡Õ ñ ¨Á ¨ÁÂô ¦ÀüÈ ¦À¡Õ¨ÇìÌ ÌÈ¢ìÌõ. ¿¢¨ÄÂ¢Âì¸Å¢ÂÄ¢ø (Mechanics) þôÀ¢¡¢§Å Á¢¸ îº¢Èô0 ¦ÀüÈ¾¡Ìõ.

(®) ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ì Ì¡¢Â þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø (Dynamics of a System of Rigid bodies)

(¯) ¦¾¡¼Ã¸ ¯ÕÅÁ¡üÈ º¼¸ò¾¢ü Ì¡¢Â þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø (Dynamics of continuous deformable medium)

À¡ö¦À¡Õû þÂì¸õ þô À¢¡¢Åø º¢ÈôÒô¦ÀÚõ.

þÂì¸ Å¢ÂÄ¢ý ¸ÕòÐ¸¨Ç ¿ýÌ «È¢Å¾ü Ìò Ð¸û ¦À¡¢Ðõ þ ýÈ¢Â¨ÁÂ¡¾ Àí¨¸ §Áü¦¸¡û¸¢ÈÐ. ±É§Å ¸üÀ¨É ÉÂ¡¸ì¸¯ ¸Õ¾ôÀÎõ Ð¸Ùì Ìõ, ÀÕô¦À¡Õû º¡÷ó¾ (matter) À¢Ãîº¢¨É ¸Ç¢ø ¯ ñ ¨ÁÂ¡¸ì ¸ñ ÏÚõ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû¸Ùì Ìõ ¯ûÇ ¯È×Â¡Ð ±ýÀ¨¾ì ¸¡ Ï¾ø §Å ñ Îõ. ÀÄ À¢Ãîº¢¨É ¸Ç¢ø ´Õ¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸ò¨¾ ¬ö×Úõ§À¡Ð «¾ý ÀÕÁý, ¯ÕÅõ ±ýÀ¨Å º¢ÈôÀ¡¸ò §¾¨ ÅôÀÎÅ¾¢ø ¨Ä. ¬¸§Å, «ô¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸¢¿¢¨Ä¨Â «È¢Â «¾ý¿¢¨È¨Â (mass) ¦ÀüÈ ´Õ Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä «È¢Å¢ì Ìõ ±Éì ¸üÀ¨É ¦ºöÐ¦¸¡ûÅÐ Ó¨ÈÂ¡Ìõ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, ´Õ À¡ÃÅ ñ Ê¨Â, Ìý È¢ý§Áø ¸¼ò¾ô ÀÂýÀÎò¾ôÀÎõ þØÅ¢¨ºÃ¡ÉÐ, Å ñ ÊÂ¢ý ÀÕÁý, ¯ÕÅõ ¬¸¢ÂÅü¨È Èîº¡÷ó¾Ã¡Áø (þÂì¸ò¨¾ò ¾¨¼ôÀÎòÐõ ¸¡üÈ¢ý ±¾¢÷ò¾¡ì¸õ, ¯Ã¡ö×Å¢¨º, Å ñ Êî ºì¸Ãí¸Ç¢ø ¿¢¸Øõ Íƒüº¢ì Ì¡¢Â Å¢¨Ç× ¸û ¬¸¢Â¨Å Å ÈÉì¸ ½¢ì¸ôÀÎÅÐ¾¡¸ì Ì ¦¸¡û¸Ù õ§À¡Ð) «¾ý¿¢¨È¨Â Áð Îõ§ÀÄ º¡÷ó¾Õì¸¢ÈÐ. ±É§Å, þùÅ¢¾õ ¿¢¨Ä¨Â Á¸Ç¢ø, À¡ÃÅ ñ Ê¨Â, «¾ý ¿¢¨ÈÌ Ð ¿¢¿¢¸Ã¡É ¿¢¨È¨ÂÔ¨¼Â Ð¸û ´ýÈ¡¸ì ¸Õ¾¢ þØÅ¢¨º¨Âì ¸½ì¸¢¼ ÓÊ¸¢ÈÐ. «ùÅ¡§È ´Õ§¸¡û þÂí Ìõ À¡¨¾¨Â Å¨ÃÂÚì¸ «ì§¸¡Ç¢ý ¯ÕÅò¨¾ì ¸¡ðÊÖõ «¾ý ¿¢¨È¨Â Ó¸¢ÂÁ¡ÉÐÅÕ ¦ÀÚÅ¾¡ø þùÅ¢¾ì ¸½ì Ì¸Ç¢ø §¸¡¨Ç ´ÕÐ¸Ç¡¸ì ¦¸¡ûÅÐ º¢ÈôÒ¨¼Â¾¡Ìõ.

4.1.3 þÂì¸õ (Motion)

´Õ ¦À¡Õû «øÄÐ Ð¸û ¿¢¨ÄÂ¡É ²§¾Û¦Á¡Õ ´Õ¦À¡Õ¨Çô ¦À¡ÚòÐò ¾ý ¿¢¨ÄÂò ¦¾¡¼÷óÐ ¸¡Äò¾¢ü§¸üÈÅ¡Ú Á¡üÈ¢ì ¦¸¡ ñ §¼Â¢Õó¾¡ø, «Ð þÂí Ì¸¢ÈÐ ±ýÚ ÜÈôÀÎõ.

4.1.3.1 þÂì¸ôÀ¡¨¾ (Trajectory; Path of motion)

þÂí Ìõ Ð¸¨Ç ÌÈ¢ì Ìõ ÒûÇ¢Â¢ý «Îò¾Îò¾ ¿¢¨Ä¸¨Ç þ¨½òÐ ÓÊÅ¡¸ì ¸¢¨¼ì¸ô¦ÀÚÈ ¿¢¨ÄÂ¡É «¾ý þÂì¸ôÀ¡¨¾Â¡Ìõ.

þÂí Ìõ ÒûÇ¢Â¢ý ¿¢¨Ä¨Â ²§¾Û¦Á¡Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ §¿Ã¡ò¾¢ø ¬Âò¦¾¡¨ÄÅÇÅ ¸½¢ôÀ¾¢É ¢ø ¦ºùÅ ¸ «îÍò ¦¾¡¨Ä×¸Ç¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎ Ð¸û þÂí Ìõ À¡¨¾Â¢ý ºÁýÀ¡Î¨¼ ¦ÀüÚ, «¾ýÅÆ¢Â¡¸ «ôÀ¡¨¾Â¢ý Àñ Ò¸¨Ç «È¢ÂÄ¡õ.

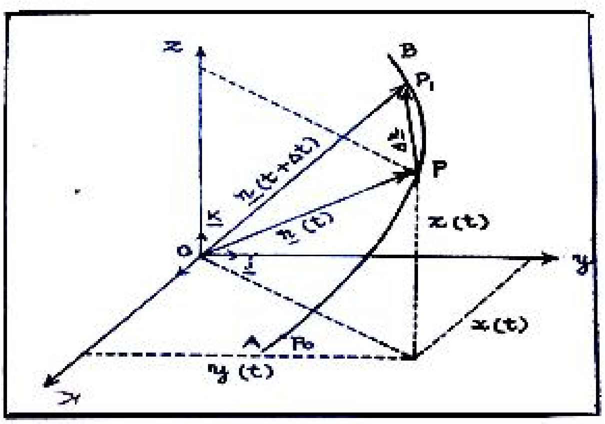
4.1.4. ¿¢¨ÄÂ¡É ÌÈ¢ôÀ¢ð¼îÍ «¨ÁôÒõ þÂí Ìõ Íð¼¨ÁôÒõ (Fixed frame of reference and rotating frame of reference)

ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢Â¢ø ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ ¿¢¨ÄÂ¡É ã ýÚ «îÍ¸ Å¨ÃÂÚòÐì ¦¸¡ñ Î ´Õ¦À¡ÕÇ¢ý «ÎòÐ ¿¢¨Ä¨Â ¸½ô¦À¡ØÐ §¿Ãò þ ¼¼¢Å¢Ä¿¢¨Ä¸Ç¢ø (at every instant of time) ¸ ñ Î, «ô¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸ò¨¾ «È¢ÂÓÊÔõ. þùÅ¢¾õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼îÍ «¨ÁôÒ ¾É¢ì¸ð¼¨ÁôÒ (Absolute) «øÄÐ º¼òÐÅ Íð¼¨ÁôÒ (inertial) «øÄÐ ¿¢äð¼É¢ý Íð¼¨ÁôÒ (Newton frames of references) ±É

ÅÆí¸ôÀÎõ. þó¾ «¨ÁôÀ¢ø ¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸õ ¾É¢þÂì¸Á¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ.
¿¨¼Ó¨ÈÂ¢ø ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ «îÍ «¨Áô¨Àô ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø ¿¢Ú×¾ø ±Ç¢¾¡ýÚ. ÒÅ¢¨Â ¿¢¨ÄÂ¡¸ì ¦¸¡ñ¼ ¬Âò¦¾¡¨Ä «¨ÁôÒ, ÒÅ¢Ô¼ý þÂí̧Å¾¡ø ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø «Ð ´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É Íð¼¨ÁôÀ¡¸¡Ð. þùÅ¢¾ «¨ÁôÀ¢ø ¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸õ ÒÅ¢¨ÂÎ º¡÷ó¾¾¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎ§Á ¾Å¢Ã ¾É¢ þÂì¸Á¡¸¡Ð. ¦À¡ÕÇ¢ý ¾É¢ þÂì¸òÐìÌ Ò×Å¢¨Â ¿¢¨ÄÂ¡¸ì ¦¸¡ñ¼ Í¼ÂÎõ ¦À¡ÕÇ¢ý º¡÷ó¾ þÂì¸òÐìÌ ¯ûÇ §ÅÚÀ¡Î ÌÈ¢ôÀ¢¼ò¾ì¸¾¡¸ þøÄ¡¨ÁÂ¡ø, ¦À¡ÈÅ¢Âø ¸½¢ôÒ¸Ç¢ø ÒÅ¢¨Â ¿¢¨ÄÂ¡¸ì ¦¸¡ñ¼ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼¸õ «¨Áô§À ÅÆì¸òÐ¾ø ÀÂýÀÎòÐôÀÎ¸¢ÈÐ.
Å¡É¢¨Ä¨ÂÎ º¡÷ó¾ ¬ö×¸Ç¢ø »¡Â¢ü¨È (Sun) Íð¼¨ÁôÒ ÒûÇ¢Â¡¸ì ¦¸¡ñÎ ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø «îÍ¸¨Ç ã ýÚ¿¢¨ÄÂ¡É Å¢ñÁ£ý¸¨Ç (Fixed stars) §¿¡ì¸¢ ±Îì¸ôÀÎõ. «ùÅ¡¾ ¬Âò¦¾¡¨Ä «¨ÁôÒ »¡Â¢üÚî Íð¼¨ÁôÒ ±ÉôÀÎõ. þÂí¸¢Îõ ¦À¡Õû ´ýÈ¢ý «îÍò¦¾¡¨Ä×¸û «øÄÐ þÂí¸¢Îõ ¦À¡Õû ´ýÈý§Áø ±ÎìÌõ Â¡§¾Ûõ ´Õ ÒûÇ¢Â¢ý «îÍò¦¾¡¨Ä×¸û ¦Áð¡¢ìÓ¨ÈÂ¢ø ¦ºýÊÁ¢ð¼÷ «øÄÐ Á£ð¼÷ «Ç×¸Ç¢ø «Çì¸ôÀÎõ. ¦¾¡¼÷î º¢Â¡¸ Á¡ÚÀÎ¸¢È §¿Ãò¨¾î º¡÷À¢Ä¡ Á¡È¢Â¡¸ì (independent vaiable) ¦¸¡ñÎ þÂí¸¢Îõ ÒûÇ¢Â¢ý «îÍò ¦¾¡¨Ä×¸û §¿Ãò¨¾î º¡÷ó¾ Á¡È¢¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. ¦À¡ÐÅ¡¸ò ¦¾¡¼¼ì¸ §¿Ãõ âîºÂÁ¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. §¿Ãõ µ÷ ±ñ ¸½¢¾Á¡¸ Ìõ. «Ð Å¢É¡¢Ê¸Ç¢ø «ÇÅ¢¼ôÀÎõ.
þÂì¸ Å¢Âø ÓØÅÐõ ÀÌÓ¨È Å¨Ã¸½¢¾ò¨¾ «ÊôÀ¨¼Â¡¸ì ¦¸¡ñÎûÇÐ, ±É¢Ûõ ¾¢¨ºÂ¢ Ó¨È¨Âô À¢ýÀüÈ¢ Ð¸Ç¢ý þÂì¸ò¨¾ «È¢ÅôÀÐ Åº¾¢Â¡¸ ¯ûÇÐ.

4.1.5 Ð¸û À¡¨¾Â¢ý ºÁýÀ¡Î (Equation of the path of a particle)

Ð¸¦Ç¡ýÚ ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø À¼õ (4.1-1)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÂíÌÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. ¦Åù§ÅÚ §¿Ãí¸Ç¢ø ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø Ð¸û ¦Åù§ÅÚ þ¼í¸Ç¢ø «¨ÁÔõ Ð¸û «Îò¾Îò¾Ð ¯¨ÈÅ¢¼õ ¦¸¡ûÙõ ÒûÇ¢¸¨Çî §º÷ìÌõ§À¡Ð



¡ À¼õ 4-1-1

AB ±ýÛõ þ¼§¿Ã Å¨Ç§¸¡ð¨¼ô ¦À¡ÈÄ¡õ. þÐ§Å Ð¸Ç¢ý Å¢íÀ¡¨¾ (Trajectory) Á¡Ìõ. Ð¸Ç¢ý À¡¨¾Ôõ, «òÐ¸û þÕìÌõ þ¼Óõ ±øÄ¡ §¿Ãò¾¢Öõ «È¢§Å¡Á¡Â¢ý «¾ý þÂì¸õ ÓüÈ¢Öõ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

¦À¡ÐÅ¡¸ò Ð¸Ç¢ý þÂì¸ò¨¾ ÅÆ¢Å¡¢ôÀ¾¢ø þÕ Ó¨È¸û ¨¸Â¡ÇôÀÎõ.

4.1.5.1 Ó¾ø Ó¨È (¾¢¨ºÂ¢ Ó¨È)

þÐ ¾¢¨ºÂ¢ Ó¨ÈÂ¡ Ìõ. À¼õ (4.1-1)-ல் O ±ý Ûõ Íð¼¨ÁôÒô ÒûÇ¢Â¢ø OX,OY,OZ ±ýÀ¨Å ´ýÚì¦¸¡ýÚ செங்குò¾¡ÉÐõ ¿¢¨ÄÂ¡ÉÐÅ¡É «î Í¸Ç¡ Ìõ. þÅüÈ¢ý ¾¢¨º¸¨Ç $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ±ý Ûõ µÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢¸û Å¨ÃÂÚì¸ðÎõ.

Ð¸û þÂíÌõ AB±ý Ûõ Å¨Çவுப்பாதையி¢ø ²§¾Ûõ t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø «Ð Å¢üÈ¢Õì Ìõ P ±ý Ûõ þ¼ò¨¾ $\underline{OP}$=r(t) எý Ûõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ (Position Vector) Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. þó¿¢¨Äò¾¢¨ சயி ஒரு மாÈ¢Ä¢Âý Ú. §¿Ãò¨¾ì ÌÈ¢ì Ìõ t ±ý Ûõ Á¡È¢ò¦¾¡¼÷ Á¡È¢Â¡¾Ä¡ø $\underline{r}$ (t) ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢Ôõ ¦À¡ÐÅ¡¸ò ¦¾¡¼÷î º¢Â¡É ¾¢சையியாகும். குÈ¢ôÀ¡¸ நேரமாறÈò¨¾ô ¦ÀÚõ§À¡Ð து¸Ç¡ÉÐ P Â¢Ä¢ÕóÐ P' என்னும் இடத்து¢üÌ Δt §¿Ãò¾¢ø ¦ºøÅ¾¡ Ìõ. ±É§Å (t+Δt) ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ல துகள் P' ±ன் Ûõ புள்Ç¢Â¢ø þÕì¸ò¾ì¸Ð. «ôபுள்Ç¢ì Ì¡¢Â ¿¢¨ÄÂ¢ò¾¢¨ºÂ¢ $\underline{OP}'=\underline{r}$ (t+ Δt) ¬ Ìõ. À¼õ 4.1-1ø PP' ±ýÀÐ Δt §¿Ãò¾¢ø Ð¸Ç¢ø ²üÀð¼ இடப்பெயர்ச்சிைÂக் குறிச்¸¢ÈÐ. PP'=Δ$\underline{r}$ ±É ì¦¸¡ ñ ¼ால் ¾¢¨ºÂ¢ ÓÌ§¸¡½ Å¢¾¢ôÀடி,

PP'=OP'-OP

«¾¡ÅÐ, $\Delta\underline{r}=\underline{r}(t+\Delta t)-\underline{r}(t)$ஆ Ìõ.

§ÁÖõ Δ$\underline{\Pi}$ ±ý னும் திசையிக்கு ஏற்றகாரணி ±ñ Á¾¢ôÒ Δr = |Δ$\underline{\Pi}$| ¬ ÉÐ, Δt ±ý Ûõ Á¢¸î º¢È¢Â «Ç×ì Ì ¯¸ó¾ÐÅ¡É ¦¾¡Õ (arbitrary) Á¾¢ôÀÇÅ¡ Ìõ.

t ±ý Ûõ Á¡È¢¨Âò Ð¨½ÂÄ¸¡¸ì (parameter) ¸Õ¾ Ð¸û þÂíÌõ À¡¨¾ $\underline{r}=\underline{r}(t)$ ±ý Ûõ Ð¨½ÂÄ º Áýª À¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

ÁüÚõ x,y,z ±ýÀ¨Å P ±ý Ûõ ÒûÇ¢Âý «îÍò ¦¾¡¨Ä×¸¨Çì ÌÈ¢ôÀ¾¡ø $\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$ ±ýÈ¡ Ìõ.

§¿Ãò¨¾î º¡÷óÐ Ð¸Ç¢ý þÕôÀ¢¼õ ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø Á¡ÈìÜÊÂ¾¡ø x,y,z ±ý Ûõ «îÍò ¦¾¡¨Ä×¸Ùõ t ±ý Ûõ Ð¨½ÂÄ¨¸î º¡÷óÐûÇÉ.

¬¸§Å t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸û P-±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø «¨ÁÅ¾¡ø ¦ÅÇ¢ôÀ¨¼Â¡¸

$\underline{r}(t)=x(t)\underline{i}+y(t)\underline{j}+z(t)\underline{k}$

±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Îõ, Ð¸û ¦ºøÖõÀ¡¨¾¨Â Å¨ÃÂÚì Ìõ ºÁýÀ¡¼¡ Ìõ.

þ í Ì $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ±ýÀ¨Å ¿¢¨ÄÂ¡É µÃÄÌ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Çì ÌÈ¢ôÀ¾¡ø, Ð¸û þÂíÌõ À¡¨¾¨Â

x = x(t); y =y(t); z = z(t)

±ý Ûõ Ð¨½ÂÄ ºÁýÀ¡ Î¸Ùõ Å¨ÃÂÚì¸¢ýÈÉ.

þîºÁýÀ¡ Î¸Ç¢Ä¢ÕóÐ t-³ Å¢ÄìÅ¢ì¸

f(x,y,z) = 0

±ý Ûõ ºÁýÀ¡ð¨¼ô ¦ÀÈÄ¡õ. þîºÁýÀ¡Îõ Ð¸û þÂíÌõ À¡¨¾¨Â Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇÄ¡õ.

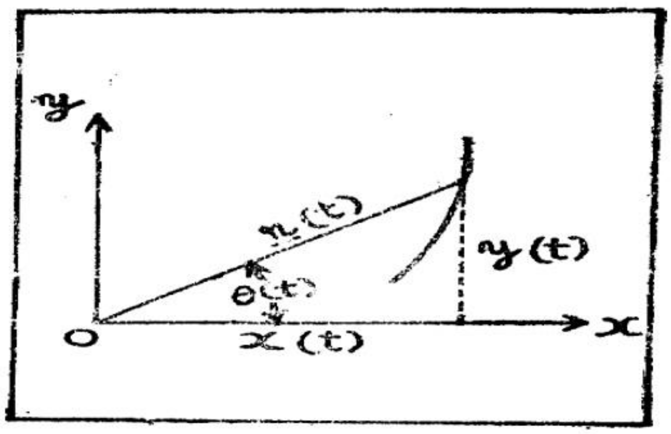
±øÄ¡§¿Ãí¸ÇÖõ z(t) = 0 ±Éø, Ð¸û þÂíÌõ À¡¨¾ (x,y) ±ýÛõ ¾Çò¾Ä¨ÁóÐ f(x,y) = 0 ±ýÛõ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

ÌÈôÀ¡¸, Ð¸û þÂíÌõ À¡¨¾ ´Õ §¿÷§¸¡¼¡Ì õ ±Éø, «Ð ´Õ §¿÷§¸¡ðÊÂì¸ò¨¾ô (rectilinear motion) ¦ÀüÚûÇ¦¾ÉôÀÎõ.

´Õ¾Çò¾ø Ð¸û þÂíÌÅ¾¡¸ø §¸¡½ìÜÚ¸¨Çô (PolarCoordinates) ÀÂýÀÎò¾Õõ ¿¸Õõ ÒûÇÂý ¿¨Ä¨Á¨Â Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

À¼õ (4.1-2)-ø ÌÈôÀðÎûÇÅ¡Ú, P ±ýÛõ ¿¸Õõ ÒûÇÂý §¸¡½ì ÜÚ¸Ç¡É ¬¨Ãò¦¾¡¨Ä× r = r(t), ¬¨Ãì§¸¡½õ θ = θ(t) ±ýÀ¨Å Ð¸Çý ¿¨Ä¨Á Å¨ÃÂÚì¸ýÈÉ.

Ó¨ÉôÒûÇ (Pole) O - ÅÄÕóÐ ¸¨¼Â¡¸ «¨ÁÔõ §¸¡ð¨¼ OX ±ýÚõ, ¦ºíÌò¾¡¸ «¨ÁÔõ §¸¡ð¨¼ OY ±ýÚõ ¦¸¡û Ù õ§À¡Ð



À¼õ 4-1-2

$x(t) = r(t)\cos\theta$

$y(t) = r(t)\sin\theta$

±ýÛõ ºÁýÀ¡Î¸û ¸¨¼ì¸ýÈÉ. t-±ýÛõ Ð¨½ÂÄ¨¸ ÅÎÅì¸, ¾Çò¾ø ´ÕÅ¨Ç Å¨ÃÂÄÂíÌõ À¡¨¾¨Â

$F(r,\theta)=0$

±ýÛõ ºÁýÀ¡Î Å¨ÃÂÚìÌõ.

4.1.5.2 þÃñ¼¡ÅÐ Ó¨È

ºÄ ºÁÂí¸Çø ÀÕô¦À¡Õû º¡÷ó¾ ¿Àó¾¨É¸Ç¡ø (physical condition) Ð¸Çý þÂì¸õ ¸ðÎôÀÎò¾ôÀðÎ «¾ýÀ¡¨¾ Óý§À «ÈÅì¸ôÀÎõ.

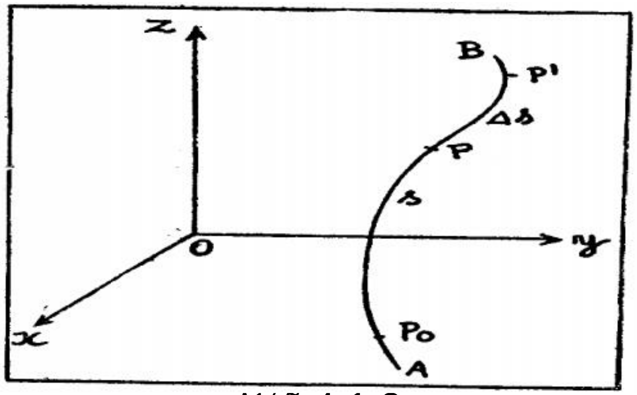
À¼õ (4.1-3)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Ð¸û þÂíÌõ AB ±ýÛõ À¡¨¾¨Â

$f(x,y,z)=0$

±ýÛõ ºÁýÀ¡Î Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

P_0 ±ýÛõ ÒûÇ Å¨ÇÅ¨ÃÂø t=0 ±ýÛõ §¿Ãò¾ø ´Õ¿¨ÄÂ¡É ÒûÇ¨Âì ÌÈì¸ðÎõ. À¡¨¾Âø $\underline{P}$ ±ýÛõ ÒûÇ¨Â $\widehat{P_0P}=s$ ±ýÛõ Åø t §¿Ãò¾ø Å¨ÃÂÚìÌõ. $P_0.P - dt$ ±ýÛõ ÒûÇ¸Ù ìÌ þ¨¼ÂÖûÇ À¡¨¾Âý ¦¾¡¨Ä× §¿Ãò¾ü§¸üÈÅ¡Ú Á¡ÚÀÎÅ¾¡ø,

$s=F(t)$



A¼õ 4-1-3

±É ì ¦ ¸ ¡ û ÇÄ¡õ. ±É§Å F(t) ± ý Û õ º¡÷ÀÄ Û õ À¡ ¨ ¾ ¨ Â Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ f(x,y,z) ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î õ ¦ ¾¡¢Ôõ§À¡Ð Å ¨ ÇÅ ¨ ÃÂ¢ø Ð ¸ Ç¢ ý þ ÕôÀ¢¼ò ¨ ¾ ±ó§¿Ãò¾¢Ö õ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ÓÊÔõ.

þ ùÅ¢Õ Ó ¨ È ¸ Ù õ Ð ¸ Ç¢ ý þÂ ì ¸ Å¢ÂÄ¢ø ÀÂ ý À Î ò¾ôÀ Î ¸ ¢ ý È É.

4.1.6 Á¡¾¢¡¢ì ¸ ½ ì Ì ¸ û

4.1.6.1 t ± ý Û õ §¿Ãò¾¢ø Ð ¸ ¦ Ç¡ ý Ú « ¨ ÁÔõ ÒûÇ¢Â¢ ý ¿¢ ¨ Äò¾¢ ¨ ºÂ¢, (x,y,z)± ý Û õ Ì ò¾î Í ¸ ¨ Çô ¦ ÀüÈ Ì ð¼ ¨ ÁôÀ¢ø

$\underline{r}(t) = (t^2+3)\underline{i} + (1+t^2)\underline{j} + O\underline{k}$ Á¢.Á¡. ± ý È¢Õ ì Ì ¦ ÁÉ¢ø Ð ¸ û þ Â í Ì õ À¡ ¨ ¾ ¨ ÂÔõ, t=3 Å¢É ¡Ê ± ý Ú û Ç§À¡Ð Ð ¸ Ç¢ ý þ ÕôÀ¢¼ò ¨ ¾Ôõ ¸ ¡ ñ ¸ .

þ í Ì x(t) = 3+t^2

y(t) = 1+ t^2

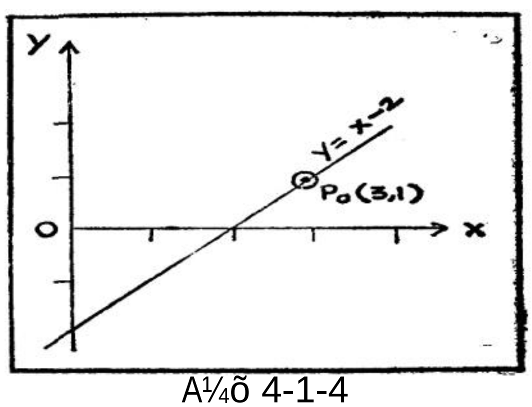
z(t) = 0 ¬ Ì õ.

t ± ý Û õ Ð ¨ ½ ÂÄ ¨ ¸ Å¢ Î Å¢ì ¸ .

x-3 = y-1

« øÄÐ y = x-2

± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î ¸ ¢ ¨ ¼ì Ì õ. þÐ§Å Ð ¸ Ç¢ ý À¡ ¨ ¾ ¨ Â Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ.



A¼õ 4-1-4

(x,y) ¾Çò¾¢ø þôÀ¡ ¨ ¾ ´ Õ §¿÷§¸ ¡¼¡ Ì õ. « Ð À¼õ (4.1-4)-ø ¸ ¡ðÊÔ û ÇÅ¡Ú ¯ û ÇÐ.

§¿Ãõ t=0 ± ý Ú ¯ û Ç§À¡Ð §¿÷§¸ ¡ðÊø Ð ¸ û, ¬ Âò ¦ ¾¡ ¨ Ä ¸ û x=3, y=1 ± ý À ¨ Å ¸ ¨ Ç ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼ P_0 ± ý Û õ ÒûÇ¢Â¢ø « ¨ Á ¸ ¢ÈÐ.

§¿Ãõ t=3 Å¢É¡Ê ±ý Ûõ§À¡Ð Ð¸û À¡¨¾Â¢ø « ¨ÁÔõ ÒûÇ¢ì Ì¡¢Â ¬Âò¦¾¡ ¨Ä¸û Ó ¨È§Â x=3+9 = 120 Á¢.Å , y=1+9 = 100 Á¢.Á ¬ Ìõ.

4.1.6.2. t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸û þÂí Ìõ À¡¨¾Â¢Ä¨ÁÔõ ÒûÇ¢Â¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢

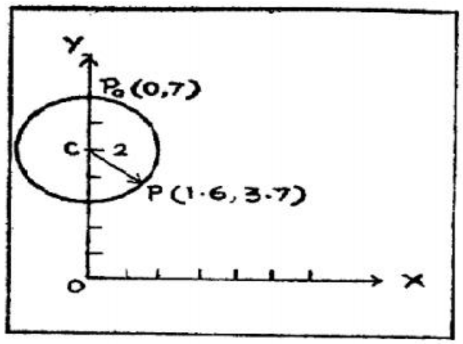
$$\underline{r}(t) = 2\sin 10t\underline{i} + (5 + 2\cos 10t)\underline{j}$$ Á¢.Á

±ýÈ¡ø, Ð¸û þÂí Ìõ Å¨ÇÅ¨ÃÂ¢ý ºÁýÀ¡ð¨¼Ôõ §¿Ãõ t=4 Å¢É¡Ê ±ýÚûÇ§À¡Ð Ð¸û þÕì Ì Á¢¼ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.

þ í Ì x(t) = 2sin10t

y(t) = 5+2cos10t

¦¿Î ì ¨ ¸, ¸¢¼ì ¨ ¸¸Ç¢ø §¸¡½õ ¬ ¨ÃÂÉ¢ø (Radians) ÌÈ¢ì ¸ôÀ Îõ.



A¼õ 4-1-5

t ±ý Ûõ Ð ¨ ½ÂÄ ¨ ¸ Å¢ Î Å¢ì ¸ $X^2+(y-5)^2 = 4(\sin^2 10t + \cos^2 10t) = 4$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î ¸¢ ¨ ¼ì ¸¢ÈÐ. þ îºÁýÀ¡ Î (x,y) -¾Çò¾¢ø c(0,5) ±ý Ûõ ÒûÇ¢ ¨Â ¨ÁÂÁ¡¸×õ r=2 ¦º.Á ±ý Ûõ ¿¢Çò ¨ ¾ ¬ ¨ÃÂ¡¸×õ (radius) ¦¸¡ ñ¼ Åð¼ò ¨ ¾ô À¼õ (4.1.5) -ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å ¨ÃÂÚì ¸¢ÈÐ.

§¿Ãõ t=0 ±ýÚûÇ§À¡Ð Ð¸û x=0 , y=7 ±ý Ûõ ¦¾¡ ¨Ä× ¸ ¨ ÇÔ ¨¼Â P_0 ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø « ¨ ÁÔõ.

§¿Ãõ t=4Å¢ ¬ ¸ ¯ ûÇ§À¡Ð Ð¸û $x = 2\sin 40, y = 5 + 2\cos 40$ ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø þÕì Ìõ. §ÁüÜÈ¢Â ºÁýÀ¡ Î ¸Ç¢ø ¦¿Î ì ¨ ¸, ¸¢¼ì ¨ ¸¸Ç¢ø ¯ ûÇ 40 ±ýÀÐ, 40 ¬ ¨ÃÂý ¸ ¨ Çì ÌÈ¢ì ÌÁ¡¾Ä¡ø ¬ ¨ÃÂý 57.3⁰ ±ýÈ Å ¨ÃÂÚôÒôÀÊ

$$\begin{aligned} x &= 2\sin(40 \times 57.3^\circ) \\ &= 2\sin 2292^\circ \\ &= 2\sin 132^\circ \\ &= 2\sin 48^\circ \\ &= 1.5862 \\ &= 16 \text{ Á¢.Á} \end{aligned}$$

$$y = 5 + 2\cos(40 \times 57.3^\circ)$$

$= 5+2\cos 2292°$

$= 5+2\cos 132°$

$= 5-2\cos 48°$

$= 5-1.3382$

$= 0.037$ Á

= 37 Á.Á ¬ Ì õ.

±É§Å Ð¸û Åð¼ò¾ø P(x=16 Á.Á., y= 37 Á.Á)±ý Ûõ ÒûÇÂø t=4Å ±ý Ûõ §¿Ãò¾ø « ¨ÁÔõ.

§ÁÖõ

$$\sin pt=\sin(pt+2®) = \sin p\left(t + \frac{2®}{p}\right)$$

$$\cos pt=\cos(pt+2®) = \cos p\left(t + \frac{2®}{p}\right)$$

±ýÈ¡Å¾¡ø, Ð¸û P ±ý Ûõ ÒûÇ ¨Â ÁÚÀÊÔõ « ¨¼Å¾ü Ì ±Î òÐì ¦¸¡û Ùõ §¿Ãõ $t = \frac{2®}{P}$ ÅÉ¡Ê¸Ç¡ Ì õ. þùÅ¾ þÂì¸Á¡ÉÐ ¸¡ÄÅð¼ ´Øí ÌÀ¨¼ò¾ þÂì¸õ (Periodic motion) ±ÉôÀ Î õ. Ð¸û «ùÅ¾ þÂí ÌÀ¡ ¨¾Âø ²§¾Ù ¦Á¡Õ ÒûÇ ¨Â « Î ò¾ Î òÐ « ¨¼Å¾ü Ì ±Î òÐì ¦¸¡û Ùõ þ ¨¼¦ÅÇ§¿Ãõ ¸¡ÄÅð¼ §¿Ãõ (Periodic Time) ±ÉôÀ Î õ.

«Ð $T = \frac{2®}{P}$ Å. ¬ Ì õ.

þ í Ì $T = \frac{2®}{P} = \frac{2®}{10} = \frac{2\times 3.1416}{10} = 0.628$ ¬ Ì õ.

4.1.7. ÀÂüº

4.1.7.1 Ð¸¦Ç¡ýÚ þÂí Ìõ À¡ ¨¾ ¨Â $\underline{r}(t) = (t^2+4)\underline{i} + 2t\,\underline{j}$ ±ý Ûõ ¿ ¨Äò¾ ¨ ºÂ Å ¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ø À¡ ¨¾Âý ºÁýÀ¡ð ¨¼Ôõ, §¿Ãõ t=2Å ±ýÚûÇ§À¡Ð À¡ ¨¾Âø Ð¸û þÕì Ì ÁÌò ¨¾Ôõ Å ¨ÃÂÚì¸.

(Å ¨¼: $y^2 = 4(x-4); t=2\,; t=2$ Ð¸û (8, 4) Á.Á ±ý Ûõ ÒûÇÂø þÕì Ì õ)

4.1.7.2 Àý ÅÕõ ¿ ¨Äò¾ ¨ ºÂ¸ ¨Çì ¦¸¡ ñ¼ ÒûÇý þÂí Ì Å ¨Ã¸ ¨Çì ¸¡ ñ ¸

(i) $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + (t-2t^2)\,\underline{j}$

(Å ¨¼ $4\times^2 + y^2 + 4xy - x = 0$)

(ii) $\underline{r}(t) = (2+2\cos t)\underline{i} + (3+\sqrt{3}\sin t)\,\underline{j}$

(Å ¨¼: $3x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 36 = 0$)

(iii) $\underline{r}(t) = 2t^2\underline{i} + 4t\,\underline{j} + 8\underline{k}$

(Å ¨¼: $y^2 = 4x,\ z = 8$)

(iv) $\underline{r}(t)=4\sin t\underline{i}+4\cos t\,\underline{j}+t^2\underline{k}$

(§¿Ãõ t Å¢É¡ÊÃ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð ¦¿Î ì ¨¸, ¸¢¼ì ¨¸¸Ç¢ø t ±ýÀ¨¾ ¬¨ÃÂÉ¡¸ì ¦¸¡û¸)

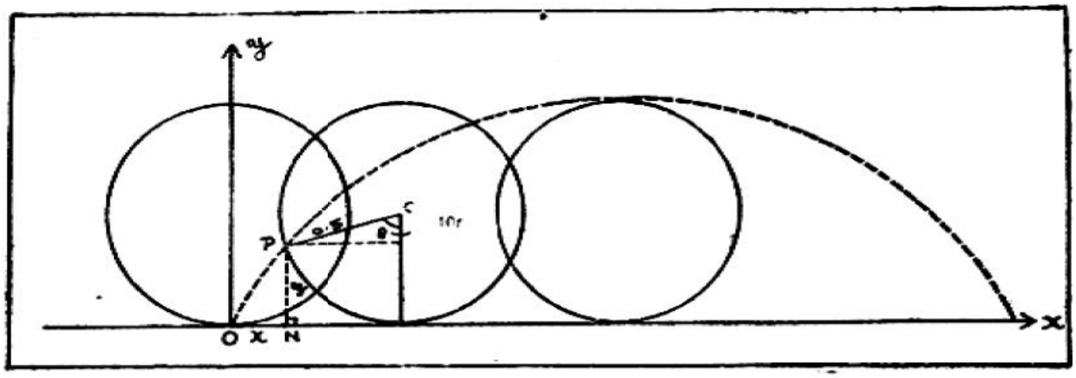
(Å¢¨¼: $x=y\tan\sqrt{z}$)

(v) $\underline{r}(t)=\cos t\underline{i}+\sin t\,\underline{j}+t\underline{k}$

(Å¢¨¼: $y=x\tan z$)

(vi) $\underline{r}(t)=4t^2\underline{i}+6t\,\underline{j}$

(Å¢¨¼: $y^2=9x$)



À¼õ 4-1-5

4.1.7.3 À¼õ (4.1.6)-ø ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú 1000 Á¢.Á¡ Å¢ð¼Óû Ç ¿Ã¡Å¢ þÂó¾¢Ãî º¸ì¸Ãò¾¢ý À¡¢¾¢Â¢Öû Ç P ±ýÛõ ÒûÇ¢ þÂí Ìõ À¡¨¾¨Â, ¿Ã¡Å¢ þÂó¾¢Ãõ 5Á¡/Å¢ ±ýÛõ §Å¸ò¾¢ø ¦ºøÅ¾¡¸×õ, t=0 ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø P ±ýÛõ ÒûÇ¢ ¬¾¢ôÒûÇ¢Â¢ø (Origin) þÕôÀ¾¡¸×õ ¦¸¡ñ Î , Å¨ÃÂÚì¸.

{Å¢¨¼: x = (5000t - 500sin 10t Á¢.Á) y = (500 - 500 cos 10t Á¢.Á¡.)

4.1.7.4 400Á ¯ÂÃò¾¢ø ÀÃóÐ ¦ºøÖõ Å¢Á¡Éò¾¢Ä¢ÕóÐ ±È¢ÂôÀð¼ Ì ñ Î ´ýÚ, $\underline{r}(t)=100t\underline{i}+8t^2\,\underline{j}$ ±ýÛõ À¡¨¾Â¢ø þÂí Ì¸¢ÈÐ. Ì ñ Î ±È¢ÂôÀð¼ ÒûÇ¢¨Âò ÐÅì¸ô ÒûÇ¢Â¡¸×õ, «î ¨ºì¸¡ú§¿¡ì¸¢Âò ¾¢¨ºÂ¢¦Ä ÎòÐõ,

(i) Ì ñ Êý þÂí Ì ÅÆ¢ôÀ¡¨¾,

(ii) Ì ñ Î ¿¢Äò¨¾ «¨¼Å¾ü Ì ¯¡¢Â§¿Ãõ,

(iii) Ì ñ Î ¸¢¨¼Â¡¸ì ¸¼ì Ìõ ¦¾¡¨Ä×, ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ñ ¸.

[Å¢¨¼ : $(i)\, y=\dfrac{x^2}{1250}; (ii) 81.17$ Å¢. $(iii) 811.7$ Á¢.Á¡.

4.2. þÂì ¸Å¦Âø (Ð¸ Ù ì ¸¡É Å ¨ Ç§¸¡ Î , §¿÷§¸¡ðÊÂì ¸ þÂø)

4.2.1 §Å ¸õ (Speed)

þÂ í Ì ¸¢ýÈ µ÷ Òû Ç¢Â¢ý §Å ¸õ « Ð ¾ýÀ¡ ¨ ¾ ¨ Â Å ¨ Ã ¸¢ýÈ Å¾Á¡ Ì õ.

4.2.1.1 º£Ã¡ É §Å ¸õ (Uniform speed)

º£Ã¡ É §Å ¸õ ±ýÀÐ ±òÐ ¨ ½ î º¢È¢Â §¿Ã í ¸Ç¡Â¢Ûõ ºÁ§¿Ã í ¸Ç¢§Ä þÂ í Ì ¸¢ýÈ Òû Ç¢Â¡ ÉÐ ¾ý þÂ í Ì õ ¾¢ ¨ ºÂ¢§Ä§Â ºÁ¦¾¡ ¨ Ä× ¸ ¨ Ç ì ¸¼ôÀ¾¡ Ì õ.

§Å ¸õ º£Ã¡ É¾¡ ¸ ×ûÇ§À¡Ð Ð ¸Ç¢ý §Å ¸õ, « Ð µÃÄ Ì §¿Ãò¾¢ø ¦ºøÖ ¸¢ýÈ ¦¾¡ ¨ ÄÅ¡ø « ÇÅ¢¼ôÀ Î õ.

4.2.1.2 ºÃ¡º¡¢ §Å ¸õ (Average speed)

þÂ í Ì ¸¢ýÈ Òû Ç¢Â¢ý §Å ¸õ º£Ã¡ É¾¡ ¸ þøÄ¡Å¢Êø Òû Ç¢ ¸¼ó¾ ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å « Ð ±Î òÐ ì ¦ ¸¡ ñ ¼ ¸¡Äþ ¨ ¼¦ÅÇ¢Â¡ø Å Ì òÐ ¯ ñ¼¡ Ì õ Á¾¢ôÀÇ§Å ºÃ¡º¡¢ §Å ¸Á¡ Ì õ.

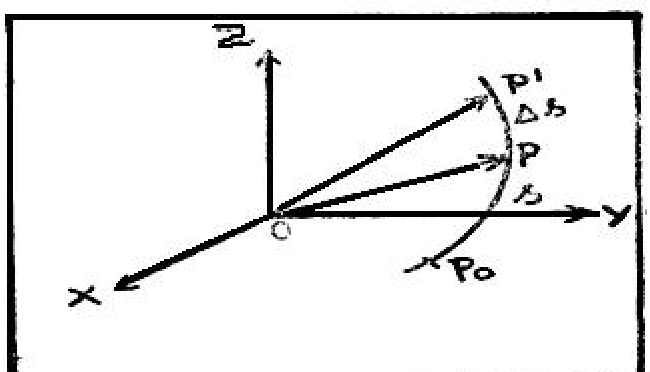
ºÃ¡º¡¢ §Å ¸õ ±ýÀÐ ´Õ ¸½òÐ¢ø Òû Ç¢ ¦À¡ÐÅ¡ ¸ì ¸¼ì ¸ìÜÊÂ ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Åì Ì È¢ì ¸¢ÈÐ. ±É§Å,

$$\text{ºÃ¡º¡¢ §Å ¸õ} = \frac{\text{Òû Ç¢ ¸¼ó¾ ¦Á¡ò¾ò ¦¾¡ ¨ Ä×}}{\text{± Î òÐì ¦ ¸¡ ñ ¼ ¸¡Ä þ ¨ ¼¦ÅÇ¢}}$$

4.2.1.3 ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸½òÐ¢ø Òû Ç¢Â¢ý §Å ¸õ (Instantaneous Speed)

§Å ¸õ º£Ã¡ É¾¡ ¸ þøÄ¡¾§À¡Ð, ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¦¿¡Êô¦À¡ØÐ¢ø Òû Ç¢Â¢ý §Å ¸ò ¨ ¾ Å ¨ ¸ Ñ ñ ¸ ½¢¾ (Differential calculus) Å¡Â¢Ä¡ ¸ô ¦ÀÚ¾ø§Å ñ Î õ.

þÂ í Ì õ Òû Ç¢ t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø « Ð ¦ºøÖõÀ¡ ¨ ¾Â¢ø, P_0 ±ý Ûõ ¿¢ ¨ ÄÂ¡ É Òû Ç¢Â¢Ä¢ÕóÐ s ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å ì ¸¼óÐ À¼õ (4.2.1)ø ¸¡ðÊÔû ÇÅ¡Ú P ±ý Ûõ Òû Ç¢Â¢ø þÕôÀ¾¡ ¸ì ¦ ¸¡û ¸.



À¼õ 4-2-1

t ±ý Ûõ §¿Ãò ¨ ¾ « Î òÐ Δt ±ý Ûõ Á¢ ¸ì Ì Ú ¸¢Â ¸¡Ä « ÇÅ¢ø Òû Ç¢ Δs ¦¾¡ ¨ Ä ¨ Å ì ¸¼óÐ P' ±ý Ûõ þ¼ò ¨ ¾ « ¨ ÁÅ¾¡ ¸¢ø Òû Ç¢Â¢ý ºÃ¡º¡¢ §Å ¸õ $= \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ¬ Ì õ. ±É§Å Δt ±ý Ûõ §¿Ãò ¨ ¾î º¢È¢¾¡ì ¸¢ì ¦ ¸¡ ñ §¼ ¦ºýÚ

þÚ¾¢Â¡¸ Δt âîº¢Âò¨¾ «ÏÌõ§À¡Ð t ±ýÛõ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ §¿Ãò¾¢ø,ÒûÇ¢Â¢ý
§Å¸õ = ±ø¨Ä$_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$
¬Ìõ. ¦À¡ÐÅ¡¸ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø ¦ºÂøÀÎõ §Å¸õ v ±ýÛõ ±Øò¾¡ø ÌÈ¢ôÀ¢¼ôÀÎõ.

±É§Å, $v = \frac{ds}{dt}$

§Å¸õ µ÷ ¾¢¨ºÂ¢Ä¢ (Speed is a scalar)

§Å¸ò¾¢ý Å¨ÃÂ¨ÈÂ¢ø ¾¢¨º¨Âô ÀüÈ¢ì ÜÈôÀ¼Å¢ø¨ÄÂ¡¾¡Ä¡ø §Å¸ò¾¢üÌ ±ñ Á¾¢ôÒ Áð¼Î§Á ¯ûÇÐ. ±É§Å §Å¸õ µ÷ ±ñ½¢ «øÄÐ ¾¢¨ºÂ¢Ä¢ ¬Ìõ.

4.2.1.4 §Å¸ò¾¢ý «Ä̸û (Units of speed)

¦Áð¡¢ì "C, G, S" Ó¨ÈÂ¢ø §Å¸ò¾¢ý «ÄÌ ¦º.Á£./Å¢.

¦Áð¡¢ì "M, K, S." Ó¨ÈÂ¢ø §Å¸ò¾¢ý «ÄÌ Á£/Å¢.

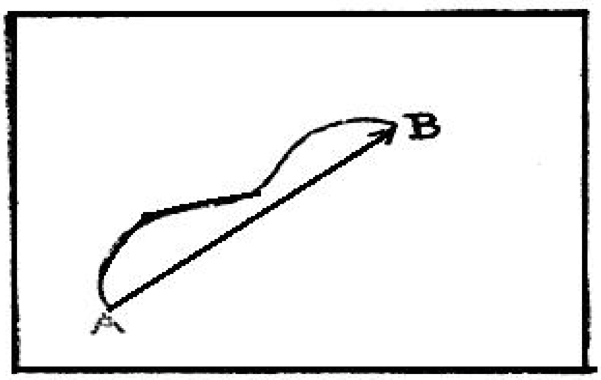
மிரிட்டன் "F, P, S." Ó¨ÈÂ¢ø §Å¸ò¾¢ý «ÄÌ «./Å¢. ¬Ìõ.

¿¨¼Ó¨ÈÂ¢ø §Å¸ò¨¾ Á½¢ìÌ þò¾¨É ¨Áø¸û «øÄÐ Á½¢ìÌ þò¾¨É ¸¢§Ä¡Á£ð¼÷¸û ±Éì ÌÈ¢ôÀÐ ÅÆì¸õ.

4.2.2 þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ (Displacement)

þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ ±ýÀÐ þÂí̸¢ýÈ ÒûÇ¢Â¢ý ¿¢¨Ä Á¡üÈÁ¡Ìõ.

þÐ þÂíÌõ ÒûÇ¢Â¢ý þÕ¿¢¨Ä¸¨Çì ÌÈ¢ìÌõ ÒûÇ¢¸¨Çî §º÷òÐ ¯ñ¼¡Ìõ §¿÷§¸¡ðÊý ¾¢¨º¨ÂÔõ ¿£Çò¨¾Ôõ º¡÷óÐûÇÐ.



À¼õ 4-2-2

±É§Å þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ. À¼õ (4.2.2) ø A, B ±ýÀ¨Å Ð¸Ç¢ý þÕ¿¢¨Ä¸¨Çì ÌÈ¢ôÀ¾¡¸¢ø, Ð¸Ç¢ý þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ AB ±Éì ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ.

4.2.3 ¾¢¨º§Å¸õ (Velocity)

µ÷ þÂí̸¢ýÈ ÒûÇ¢Â¢ý ¾¢¨º§Å¸õ «¾ý þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢Â¢ý Å¢¾Á¡Ìõ.

µ÷ þÂíÌõ ÒûÇ¢, ´Õ Å¢É¡Ê¢ø ¦ÀüÈ¢Îõ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢§Â ÒûÇ¢Â¢ý ¾¢¨º§Å¸Á¡Ìõ.

¾¢¨º§Å¸õ "±ñ Á¾¢ôÒ", "¾¢¨º" ±ýÛõ þÃñ¨¼Ôõ ¦ÀüÚûÇ¾¡ø, «Ð ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Ä¡Ìõ. ±É§Å ¾¢¨º§Å¸õ µ÷ «õÒ §¿÷§¸¡ð¼¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ.

4.2.3.1 º¢Ã¡É ¾¢¨º§Å¸õ (Uniform velocity)

þÂí Ì õ ÒûÇ¢Â¡ÉÐ ´§Ã ¾¢¨ºÂ¢ø ±òÐ¨É î º¢È¢Â¾¡É ºÁ§¿Ãí¸Ç¢ø ºÁò¦¾¡¨Ä×¸¨Çì ¸¼ôÀ¾¡¸¢ø «Ð º¢Ã¡É ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý þÂí ÌÅ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀ Î õ.

«ô§À¡Ð «ôÒûÇ¢ µÃÄ Ì §¿Ãò¾¢ø ¦ÀüÈ¢ Î õ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢§Â «¾ý ¾¢¨º§Å¸Á¡¸¢ÈÐ.

þ¾ü Ì Á¡È¡¸ ºÁ¸¡Ä «Ç×¸Ç¢ø ÒûÇ¢Â¡ÉÐ ¸¼ì Ì õ ¦¾¡¨Ä§Å¡ «øÄÐ þÂì¸ò¾¢ý ¾¢¨º§Â¡ Á¡ÚÀð¼¡ø ÒûÇ¢Â¢ý ¾¢¨º§Å¸Óõ Á¡ÚÀÎ¸¢ÈÐ.

±É§Å ¾¢¨º§Å¸õ Á¡ÚÀÎõ§À¡Ð ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸¡Äþ¨¼¦ÅÇ¢Â¢ø ÒûÇ¢Â¢ý º¡º¡¢ ¾¢¨º§Å¸õ «øÄÐ ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸½ò¾¢ø «¾ý ¾¢¨º§Å¸õ ¬¸¢ÂÅü¨È Ì ¸¡½§Å ñ Êö¾¡¸¢ÈÐ.

4.2.3.2 º¡º¡¢ ¾¢¨º§Å¸õ (Average velocity)

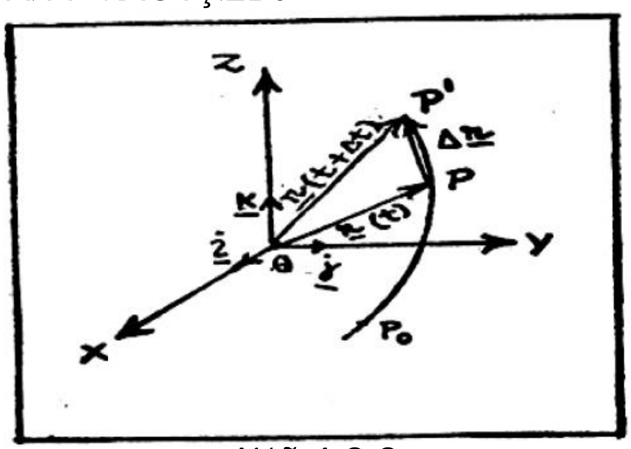
´ÕÒûÇ¢ ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸¡Äþ¨¼¦ÅÇ¢Â¢ø ¿¢¸úò¾¢Î õ ¦Á¡ò¾ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢ì Ì õ «ó ¸¡Ä þ¨¼¦ÅÇ¢ «ÇÅ¢ü Ì õ ¯ûÇ Å¢¸¢¾§Á «ôÒûÇ¢Â¢ý º¡º¡¢ ¾¢¨º§Å¸Á¡ Ì õ. þÐ ¦Á¡ò¾ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢Â¢ý ¾¢¨º ¨Âô ¦ÀüÈ¢Õì Ì õ.

4.2.3.3 ¦¿¡Êô¦À¡Ø¾¢ø ÒûÇ¢Â¢ý ¾¢¨º§Å¸õ (Instantaneous velocity)

ÀÁó¾¦ÅÇ¢Â¢ø Ð¸û þÂí Ì õ A B ±ýÛõ Å¨Ç×ôÀ¡¨¾Â¢ø, t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø, Ð¸û $P(x,y,z)$ ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø, À¼õ (4.2.3) ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ûÇ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «¾ý þÕôÀ¢¼ò¨¾.

$$\underline{OP} = \underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

±ýÛõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ.



A¼õ 4-2-3

¦¾¡¼ì¸§¿Ãò¾¢ø (t=0) Ð¸û À¡¨¾Â¢ø P_0 ±ýÛõ ¿¢¨ÄÂ¡É ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ, t-±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø, $\underline{P}$' ±ýÛõ ÒûÇ¢ «¨ÁÔõ§À¡Ð, Ð¸û À¡¨¾Â¢ø ¸¼ó¾ ¦¾¡¨Ä¨Å $\widehat{P_0P} = s = s(t)$ ±ýÛõ Å¢ø «ÇÅ¢ Î ¸¢ÈÐ.

« Î òÐÅÕõ $\triangle t$ ±ýÛõ Á¢¸îº¢È¢Â §¿Ãò¾¢ø, Ð¸û À¡¨¾Â¢ø P-ì Ì «Õ¸¢Ö ûÇ $P'(x+\triangle x,\ y+\triangle y,\ z+\triangle z)$ ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø «¨ÁÅ¾¡¸¢ø $\underline{PP'} = \triangle \underline{r}$ ±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø ¾¢¨ºÂ¢ Óì§¸¡½ Å¢¾¢ôÀÊ À¼õ (4.2.3)Ä¢ÕóÐ

$$
\begin{aligned}
\underline{PP'} &= \underline{OP'} - \underline{OP} \\
&= \underline{r}(t+\triangle t) - \underline{r}(t) \\
&= x(t+\triangle t)\underline{i} + y(t+\triangle t)\underline{j} + z(t+\triangle t)\underline{k} - x(t)\underline{i} - y(t)\underline{j} - z(t)\underline{k} \\
&= \left\{x(t+\triangle t) - x(t)\right\}\underline{i} + \left\{y(t+\triangle t) - y(t)\right\}\underline{j} + \left\{z(t+\triangle t) - z(t)\right\}\underline{k} \\
&= \triangle x\underline{i} + \triangle y\underline{j} + \triangle z\underline{k}
\end{aligned}
$$

¬ Ì õ.

PP' ±ý Ûõ ¿¡½¢ý ¿¦Çõ $\triangle \underline{r}$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢-þ ý ± ñ Á¾¢ôÀ¡ Ì õ. «¾ý ± ñ Á¾¢ô¨À $\triangle r$ ±É ì¦¸¡û¸.

$\triangle \underline{r}(t)$ ±ýÀÐ $\triangle t$ ±Ûõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸û ¦ÀüÈ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢Â¡¾Ä¢ý, «Ð ¾¢¨ºÂ¢ $\underline{r}$ ý ± ñ Á¾¢ôÒ Á¡üÈò¾¡§Ä¡ «øÄÐ $\underline{r}$ ý ¾¢¨ºÁ¡üÈò¾¡§Ä¡ «øÄÐ þùÅ¢Ã ñ Êý Á¡üÈò¾¡§Ä¡ ¿¢¸Æì Ü Î õ. ¬¸§Å, $\triangle t$ ±Ûõ Á¢¸ì Ì Ú¸¢Â ¸¡Äò¾¢ø ¿¢¸úó¾ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢ = $\triangle \underline{r}$ µÃÄ Ì §¿Ãò¾¢ø «øÄÐ ´Õ Å¢É¡ÊÂ¢ø

¿¢¸úó¾ þ¼ô ¦ÀÂ÷î º¢} $= \dfrac{\triangle \underline{r}}{\triangle t}$

þÐ§Å Ð¸Ç¢ý ºÃ¡º¡¢ ¾¢¨º§Å¸õ $= \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

þ í Ì «¾¡ÅÐ Ð¸Ç¢ý ºÃ¡º¡¢ ¾¢¨º§Å¸õ $\triangle \underline{r}$ ±ýÀÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡¸×õ $\triangle t$ ±ýÀÐ µ÷ ± ñ ½¢Â¡¸×õ ¯ûÇ¾¡ø ºÃ¡º¡¢ ¾¢¨º§Å¸õ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ì õ. §ÁÖõ $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ±ýÀÐ Ð¸Ç¢ý ºÃ¡º¡¢§Å¸õ ±É Óý É§Á ÜÈôÀð¼Ð. þ í Ì $\triangle s, \triangle t$ ±ýÀ¨Å ± ñ ½¢¸Ç¡¾Ä¡ø $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ±ýÀÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Ä¢Â¡ Ì õ.

$\triangle t$ ±Ûõ §¿Ãò¨¾î º¢È¢¾¡ì¸¢ì ¦¸¡ñ§¼ ¦ºýÈ¡ø þÚ¾¢Â¡¸ $\triangle t$ â îº¢Âò¨¾ « Ï Ì õ§À¡Ð Å¨¸Ñ ñ ¸½¢¾ Å¨ÃÂ¨ÈôÀÊ, ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø, À¡¨¾Â¢ø P ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ $= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\underline{r}}{dt}$ ¦À¡ÐÅ¡¸ Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ v ±Ûõ ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ì È¢ì¸ôÀÎ õ. ±É§Å, $\underline{v} = \dfrac{d\underline{r}}{dt}$ $\Delta r \simeq \Delta s$ ¬É¾¡ø, $\dfrac{\Delta \underline{r}}{\Delta s}$ ý ± ñ Á¾¢ôÒ ´ýÈ¡ Ì õ.

$\underline{P'}$ ±ý Ûõ ÒûÇ¢ $\underline{P}$ ³ « Ï Ì õ§À¡Ð, $\underline{PP'}$ ±ý Ûõ ¿¡ ñ , $\underline{P}$ Â¢ø þÂ í Ì õ À¡¨¾ì Ì ò ¦¾¡Î§¸¡¼¡¸ «¨ÁÔõ. ±É§Å $\dfrac{\Delta \underline{r}}{\Delta s}$ ±ýÀÐ þÚ¾¢Â¡¸ ¦¾¡Î§¸¡ðÊø «¨ÁÔõ µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ì õ (unit tangent vector) t ±ýÀÐ $\underline{P}$ ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø, þÂ í Ì õ À¡¨¾ì Ì Å¨ÃÔõ ¦¾¡Î§¸¡ðÊø µÃÄ Ì ò ¾¢¨ºÂ¢

±É¢ø, $\underset{x \to \infty}{\text{±ø¨Ä}} \dfrac{\Delta \underline{r}}{\Delta s} = \underline{t}$ ¬ Ì õ.

±É§Å $\dfrac{d\underline{r}}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{±ø¨Ä}} \dfrac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$

$$= \text{±ø¨Ä}_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle \underline{r}}{\triangle s}\times\frac{\triangle s}{\triangle t}$$

$$= \left(\text{±ø¨Ä}_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t}\right)\left(\text{±ø¨Ä}_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle \underline{r}}{\triangle s}\right)$$

$$= \frac{ds}{dt}\underline{t}$$

$$\therefore \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\underline{t}$$

$\frac{d\underline{r}}{dt},\frac{ds}{dt}$ ±ýÀ¨Å Ó¨È§Â, t ±ý Ûõ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¸½ò¾¢ø Ð¸Ç¢ý "¾¢¨º§Å¸õ" "§Å¸õ" ¬¸¢ÂÅü¨È Å¨ÃÂÚì¸¢ýÈÉ. §ÁÖõ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý ± ñ Á¾¢ô§À Ð¸Ç¢ý §Å¸Á¡Å¾¡ø $\frac{d\underline{r}}{dt},\frac{ds}{dt}$ ±ýÀ¨Å¸¨Ç Ó¨È§Â $\underline{v}, v$ ±É ìÌÈ¢ô§À¡Á¡¸¢ø.

$$\underline{v} = v\underline{t}$$

±ýÈ ºÁýÀ¡Î ¸¢¨¼ì Ìõ. §ÁÖõ, ¾¢¨º§Å¸õ, t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, À¡¨¾ì Ì Å¨ÃÔõ ¦¾¡Î§¸¡ðÊø «¨ÁÅ¨¾Ôõ «È¢¾ø§Å ñ Îõ.

4.2.4 ¦¾ì¸¡ðÊý ¬Âì ÜÚ¸Ç¢ø Ð¸û ´ýÈ¢ý §Å¸õ, ¾¢¨º§Å¸õ ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ Ï ¾ø.

t ±ý Ûõ ¸½ò¾¢ø P ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢Ä¨ÁÔõ Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ Å¨ÃÂ¨ÈÂ¢ýÀÊ,

$$\underline{v} = \text{±ø¨Ä}_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle \underline{r}}{\triangle t}$$

$$= \text{±ø¨Ä}_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle x\underline{i} + \triangle y\underline{j} + \triangle z\underline{k}}{\triangle t}$$

$$= \frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} + \frac{dz}{dt}\underline{k}$$

$$= v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$$

¬ Ìõ. $\underline{v_x} = v_x\underline{i}; \underline{v_y} = v_y\underline{j}; \underline{v_z} = v_z\underline{k}$ ±ýÀ¨Å x,y,z «îÍì¸Ç¢ø ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý ¾¢¨ºÂ¢ô À¸¢÷×¸Ç¡ Ìõ.

$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$ ±ýÀ¨Å Ð¸Ç¢ý §Å¸ò¾¢ý À¸¢÷×¸Ç¡ Ìõ.

v_x, v_y, v_z ¦¾¡¢Ôõ§À¡Ð Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý "± ñ Á¾¢ôÒ" "¾¢¨º" ¬¸¢ÂÅü¨Èô À¢ýÅÕÁ¡Ú ¸¡½Ä¡õ.

$$v^2 = \underline{v}.\underline{v}$$

$$= {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$$

$$\therefore v = +\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

¾¢¨º§Å¸õ ¦ºÂøÀÎõ §¸¡Î, x,y,z «îÍì¸Ù¼ý $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ±ý Ûõ §¸¡½í¸¨Çò ¾¡í Ì¦ÁÉ¢ø

$$\cos^{-}{}_x = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}}$$

$$\cos^{-}{}_y = \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}}$$

$$\cos^{-}{}_z = \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}}$$

±ý Ûõ ¾¢¨ºì¸¢¼ì¨¸¸¨Çì ¸¡½ÓÊÔõ.

±É§Å ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý "±ñ Á¾¢ôÒ" "¾¢¨º" ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡½ÓÊÔõ.

ÌÈ¢ôÒ:- (i) $\underline{v} = \underline{v(t)} = v\underline{t} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$ ±ýÈ¡Å¾¡ø,

$$\underline{t} = \frac{v_x}{v}\underline{i} + \frac{v_y}{v}\underline{j} + \frac{v_z}{v}\underline{k}$$
$$= \cos^{-}{}_x\underline{i} + \cos^{-}{}_y\underline{j} + \cos^{-}{}_z\underline{k}$$

¬Ìõ.

(ii)Ð¸Ç¢ý §Å¸õ (v ¬ÉÐ) ¦¾¡¢Ô¦ÁÉ¢ø Ð¸û À¡¨¾Â¢ø, t §¿Ãò¾¢ø ¸¼ìÌõ ¦¾¡¨Ä¨Åì ¸¡½ÓÊÔõ.

$$\frac{ds}{dt} = v$$
$$s = \int v dt + c$$

C Â¢ý Á¾¢ô¨À ¦¾¡¼ì¸ ¿¢Àó¾¨É¸Ç¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ ¸¡½Ä¡õ.

(iii) t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ $(\underline{v})$ ¦¾¡¢Ô¦ÁÉ¢ø, «ô¦À¡ØÐ «òÐ¸Ç¢ý þÕôÀ¢¼ò¨¾ Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ.

$$\underline{v} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$$ ±ýÀÐ ¦¾¡¢ÔÁ¡¾Ä¡ø

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \frac{dx}{dt} = v_y; \frac{dx}{dt} = v_z$$ ¬Ìõ.

$$\therefore x = \int v_x dt + c_1; y = \int v_y dt + c_2; z = \int v_z dt + c_3$$

c_1, c_2, c_3 ±ý Ûõ Á¡È¢Ä¢¸Ç¢ý Á¾¢ôÒ¸¨Çò ¦¾¡¼ì¸ ¿¢Àó¾¨É¸Ç¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ.

(iv) Ð¸û ´Õ §¿÷ §¸¡ðÊÂì¸ò¨¾ô ¦ÀüÈ¢Õì Ì¦ÁÉ¢ø «¾ý§Å¸Óõ, ¾¢¨º§Å¸Óõ ºÁÁ¡Ìõ. Ð¸Ç¢ý þÂì¸õ §¿÷§¸¡ðÊÂì¸ò¨¾ò ¾Å¢÷òÐ §Å¦Èó¾ô À¡¨¾Â¢¸ «¨Áó¾¡ÖÁõ §Å¸Óõ, ¾¢¨º§Å¸Óõ ´ýÈ¡¸¡. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸ ´Õ Ð¸û Åð¼¦Á¡ý¨È ´Õ ºÃ¡¸ Å¨ÃÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «¾ý þÂì¸ò¾¢ý ¾¢¨º «¾¡ÅÐ Åð¼ò¾¢ý ¦¾¡Î§¸¡Êý ¾¢¨º Á¡¢¾¢Â¢Ä¢ÕìÌÁ ÓÊÔÁ ÓÊ¡Ð Á¡ÚÀÎõ. (¬¸§Å «òÐ¸Ç¢ý §Å¸õ Á¡È¡¾ÐôÀ¢Ûõ ¾¢¨º§Å¸õ Á¡È¢ì ¦¸¡ñ §¼Â¢Õì Ìõ)

4.2.5 º¡¡¢Âì¸õ Å¨ÃÂ¨È (Relative motion)

µö×, þÂì¸õ ±ýÀ¨Å º¡÷¨À ¯½÷òÐõ ¦º¡ü¸Ç¡ Ìõ. ¾É¢ þÂì¸§Á¡ «øÄÐ º¡÷À¢Ä¡ò ¾¢¨º§Å¸§Á¡ Â¡¦¾ýÚ ¸¡ñ ÀÐ þÃÄ¡¾ ¸¡¡¢Âõ. ±È§Å ¿¨¼Ó¨ÈÂ¢ø ¿¢¨ÄÂ¡É¦¾Éì ¸Õ¾ôÀÎõ ´Õ Íð¼¨Áô¨Àô ¦À¡ÚòÐò¾¡ý ´Õ ¦À¡ÕÙ µöÅ¡ÔûÇ¾¡ «øÄÐ þÂí Ì¸¢ýÈ¾¡ ±É «È¢Â ÓÊÔõ. «ùÅ¡§È ¦À¡ÕÙ ´ýÈ¢ÉÐ ¾¢¨º§Å¸Á¡ÉÐ «îÍð¼¨Áô¨Àî º¡÷ó¾ ¾¢¨º§Å¸õ «øÄÐ º¡÷ ¾¢¨º§Å¸õ ±Éì ÜÈôÀÎõ.

4.2.5.1. º¡÷¾¢¨º§Å¸õ (Relative velocity)

¾¢¨ºÂ¢Ä¡Â¢Ûõ, «ÇÅ¢Ä¡Â¢Ûõ «øÄÐ þùÅ¢Ã ñÊÄ¡Â¢Ûõ þÕòûÇ¢¸Ùì Ì þ¨¼Â¢ÖûÇ ¦¾¡¨Ä× Á¡È¢É¡ø, þÕòûÇ¢¸Ùì Ìõ ´ýÚì ¦¸¡ýÈ¡É º¡¡¢Âì¸õ ¯ñ Î.

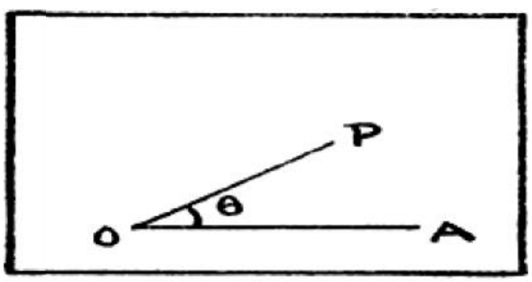
A ±ýÛõ òûÇ¢¨Âì ÌÈ¢òÐ, Áü¦È¡Õ BÂ¢ý ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý AÂ¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¾¢üÌî ºÁÛõ ±¾¢ÕÁ¡ÔûÇ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾î §º÷òÐ ¯ñ¼¡Ìõ ¾¢¨ºÂ¢ìÜ Î¾Ä¡¸ ¦ÀÈôÀÎõ

«¾¡ÅÐ, A ³ì ÌÈ¢òÐ B Â¢ý º¡÷¾¢¨º §Å¸Á¡ÉÐ B Â¢ý ¯ñ ¨ÁÂ¡É ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý A Â¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¾¢üÌ ºÁÛõ ±¾¢ÕÁ¡ÔûÇ ´Õ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾î ÜðÎÅ¾¡ø ¸¢¨¼ì¸ôÀÎõ.

±É§Å, A³ì ÌÈ¢òÐ BÂ¢ý º¡÷¾¢¨º §Å¸õ $= \underline{V_B} - \underline{V_A}$ «ùÅ¡§È, B ³ì ÌÈ¢òÐ AÂ¢ý º¡÷¾¢¨º §Å¸õ $= \underline{V_A} - \underline{V_B}$ ¬Ìõ.

4.2.6 §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ (Angular velocity)

¾Ç¦Á¡ýÈ¢ø O ±ýÀÐ ²§¾Û¦Á¡Õ ¿¢¨ÄÂ¡É òûÇ¢Â¡¸×õ OA ±ýÀÐ O ÅÆ¢ Å¨Ãó¾ ¿¢¨ÄÂ¡É §¿÷§¸¡¼¡¸×Á¢Õó¾¡ø,



À¼õ 4-2-4

«ò¾Çò¾¢Ä¢Âí Ìõ P±ýÛõ òûÇ¢, À¼õ (4.2.4)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, OÅ¢ø ¾¡í Ìõ $A\hat{O}P$ ±ýÛõ §¸¡½ò¾¢ý «¾¢¸¡¢ì Ìõ Å£¾Á¡ÉÐ, O ¨Åô ÀüÈ¢, þÂí Ì¸¢ýÈ P Â¢ý §¸¡½§Å¸õ ±ÉôÀÎõ.

42.6.1 º£Ã¡É §¸¡½§Å¸õ

±òÐ¨ ÉÎ º¢È¢Â §¿Ãí¸Ç¡Â¢Ûõ, ºÁ§¿Ãí¸Ç¢ø OP¬ÉÐ «¾ý §À¡ì¸¢§Ä§Â ºÁ§¸¡½ í¸¨Çì ¸¼ó¾¡ø, §¸¡½§Å¸õ º£Ã¡É¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. «ùÅ¢¾î º£Ã¡É§Å¸õ ´Õ §¿Ã«Ä¸¢ø, OP ¬ø Å¢¨ÇÅ¢ì¸ôÀð¼ §¸¡½ò¾¢ø ¯ûÇ ¬¨ÃÂý ¸Ç¡ø (Radian) «Çì¸ôÀÎõ.

4.2.6.2 §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ : (Average angular velocity)

t §¿Ãò¾¢ø OP ±ýÀÐ O ஜைô ÀüÈ¢ θ ¬¨ÃÂý¸û ¾¢ÕõÀð Î õ. « Î òÐÅÕõ Δ t §¿Ãò¾¢ø, OP ±ýÀது Δθ ±ý Ûõ §¸¡½ «Ç× (¬¨ÃÂÉ¢ø) ¸¼ôÀ¾¡¸¢ø, ºÃ¡º¡¢ §¸¡½ §Å¸õ = $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

4.2.6.3 ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸½ò¾¢ø §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ (Instantaneous angular velocity)

Δt Â¢ý Á¾¢ôÒ Ì ¨Èóது கொ¡ ñ §¼ ¦ºýÚ, þÚ¾¢Â¡¸ «¾ý Á¾¢ôÒ â î º¢Âò ¨¾ « ¨¼Ôõ§À¡Ð, = $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ இý þÚ¾¢Â¡É Á¾¢ôÒ O ³ô ÀüÈ¢, P - Â¢ý §¸¡½ §Å¸ò ¨¾ì ¦¸¡Î ì Ì õ.

±É§Å, t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, p Â¢ý §¸¡½§Å¸õ

$$= \frac{d^{-}}{dt} \quad ±ø¨Ä_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta^{-}}{\Delta t}$$

¦À¡ÐÅ¡¸ §¸¡½ §Å¸ò ¨¾ Ì È¢ì ¸ ω ±ý Ûõ ¸¢§Ãì ¸ ±ØòÐ ÀÂýÀ Î ò¾ôÀ Î õ. ±É§Å, t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, P Â¢ý §¸¡½§Å¸õ.

$$\mu = \frac{d^{-}}{dt}$$

±ý Ûõ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å ¨ÃÂÚì ¸ôÀ Î õ.

4.2.7. §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ §¿÷§¸¡ð Î ò ¾¢¨º§Å¸õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¯È×; (Relationship between angular velocity and linear velocity)

þÂ í Ì õ ÒûÇ¢Â¢ý À¡¨¾ ¦¾¡¢Ôõ§À¡Ð §¸¡½§Å¸ò ¨¾ §¿÷§¸¡ð Î §Å¸õ ãÄÁ¡¸ «È¢Å¢ì ¸Ä¡õ.

4.2.7.1 þÂ í Ì õ ÒûÇ¢ ´ýÚ Åð¼¦Á¡ý ¨Èî º¡É§Å¸òÐ¼ý Å ¨Ãó¾¡ø, «ùÅð¼ ¨ÁÂõ ÀüÈ¢ «¾ý §¸¡½§Å¸Á¡ÉÐ, «¾ý§Å¸ò ¨¾ «ùÅð¼ ¬ ¨ÃÂ¡ø Å Ì òÐÅÕõ ®×ì Ì î ºÁÁ¡ Ì õ.

´Õ Ð¸û O ³ ¨ÁÂÁ¡¸×õ r ³ ¬ÃÁ¡¸×õ ¦¸¡ ñ ¼ Åð¼¦Á¡ý ¨Èô À¼õ (4.2.5)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, v ±ý Ûõ º£¡É §Å¸òÐ¼ý Å ¨ÃÂð Î õ. t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä P ¬¸×õ, $A\hat{O}P = {}^{-}$ ¬¨ÃÂÛÁ¡¸×õ $\widehat{AB} = s$ ¬¸×õ þÕì ¸ð Î õ. $\widehat{PQ} = \Delta s$ « Î òÐÅÕõ Δt §¿Ãò¾¢ø, «òÐ¸û «Ç×ûÇ Á¢¸ îº¢È¢Â Åð¼ Å¢ø ¨Äì ¸¼ôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

$P\hat{O}P = \Delta^{-}$ ¬¸¢ø Åð¼ò¾¢ø ¬ Ì õ.

$$\Delta s = r.\Delta^{-}$$

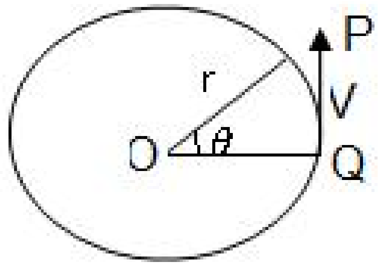
$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta^{-}}{\Delta t}$$

$$V = ±ø¨Ä_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = ±ø¨Ä_{\Delta t \to 0} r\frac{\Delta^{-}}{\Delta t}$$

V = §¿÷§¸¡ð Î §Å¸õ

V $= r\mu$ ¬ Ì õ   ω = §¸¡ ½ ¾¢¨º§Å¸õ
r = ¬Ãõ

$\therefore \mu = \dfrac{V}{r}$



À¼õ 4-2-5

4.2.8 Å¨ÃÂ¨È Ó Î ì ¸õ (§Å¸ÅÇ÷î º¢ò ¾¸×) (Acceleration)

þÂ í Ì ¸¢ ýÈ ´Õ Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸ Á¡ÚÀ¡ðÊý Å¾õ «òÐ¸Ç¢ý "Ó Î ì ¸õ" «øÄÐ "§Å¸ÅÇ÷î º¢ò¾¸×" ±ÉôÀÎ õ.

¾¢¨º§Å¸ Á¡üÈõ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡Å¾¡ø «¾ý Å¢¸¢¾Óõ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡ Ì õ. ¬¸§Å Ó Î ì ¸õ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡¸¢ÈÐ.

ÒûÇ¢ þÂ í Ìõ ¾¢¨ºì Ì ±¾¢Ã¡¸ Ó Î ì ¸õ þÕì Ì ¦ÁÉ¢ø «¨¾ "±¾¢÷Ó Î ì ¸õ" (Deceleration) ±É ì Ü ÚÅÐ ÅÆì ¸õ.

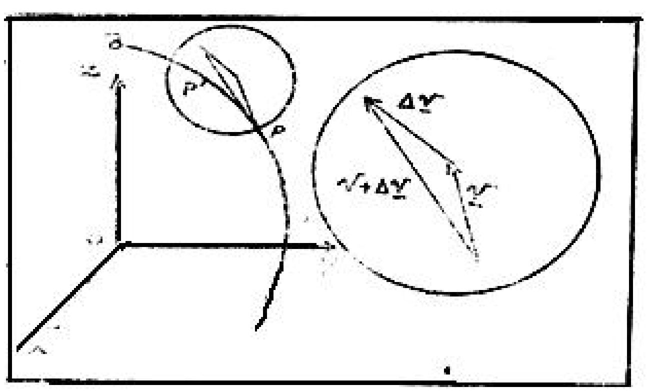
4.2.8. 1. º£Ã¡É Ó Î ì ¸õ (Uniform acceleration)

þÂ í Ìõ ÒûÇ¢ ´ýÈ¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø ±òÐ¨É î º¢È¢Â¾¡É º¡§¿Ã í¸Ç¢ø, º¡§Å¸Á¡üÈõ ´§Ã¾¢¨ºÂ¢ø ²üÀÎ Á¡Â¢ý, «ôÒûÇ¢ º£Ã¡É Ó Î ì ¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇÐ ±ÉôÀÎ õ.

Ó Î ì ¸õ º£Ã¡É¾¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð, Ó Î ì ¸Á¡ÉÐ µÃÄ Ì §¿Ãò¾¢ø ÒûÇ¢Â¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø ²üÀÎ õ §Å¸Á¡üÈò¾¡ø «ÇÅ¢¼ôÀÎ õ.

4.2.8.2.´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸½ò¾¢ø Ð¸Ç¢ý Ó Î ì ¸õ (Instantaneous acceleration of a particle.)

´Õ Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ º¡¸¡Ä «Ç×¸Ç¢ø º¡§Å¸ Á¡üÈõ ²üÀ¼¡Å¢ÊÛõ «øÄÐ §Å¸Á¡üÈõ ´§Ã¾¢¨ºÂ¢ø ¿¢¸Æ¡Å¢ÊÛõ, Ó Î ì ¸õ Á¡ÚÀ¼ìÜÊÂÐ. ¬¸§Å Ó Î ì ¸õ Á¡ÚÀÎ õ§À¡Ð, ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ §¿Ãò¾¢ø, «¾ý Ó Î ì ¸ò¨¾ Å¨¸Ñ ñ ¸½¢¾ò¨¾ô (Differential calculus) ÀÂýÀÎ ò¾¢ì ¸¡½Ä¡õ.



À¼õ 4-2-6

Ó Î ì ¸ò ¨ ¾ $\underline{a}$ ±É ì Ì È¢ò¾¡ ø,

$$\underline{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta \underline{\upsilon}}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\underline{\upsilon}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}$$

¬ Ì õ. Ó Î ì ¸ò¾¢ý ¾¢¨ º¡ É Ð, ¾¢¨ º§Å ¸õ, Ð ¸Ç¢ý ¿¢¨ Äò¾¢¨ ºÂ¢ ¬ ¸¢Â ¨ Å ¦ ºÂøÀ Î õ ¾¢ ¨ º ¸ Ù ì Ì §ÅÚÀðÎÕì Ì õ ±ýÀÐ Ì È¢ôÀ¢¼ò¾ì ¸ Ð.

4.2.8.3. Ó Î ì ¸ò¾¢ý ($\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$) ¾¢¨ º ¸Ç¢ø ÜÚ ¸ ¨ Ç ì ¸ ¡ Ï ¾ø (Components of acceleration along ($\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$)directions)

t ±ý Û õ §¿Ãò¾¢ $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ ±ýÀÐ Ð ¸Ç¢ý ¿¢¨ Äò¾¢¨ ºÂ¢Â¡Å¾¡ø,

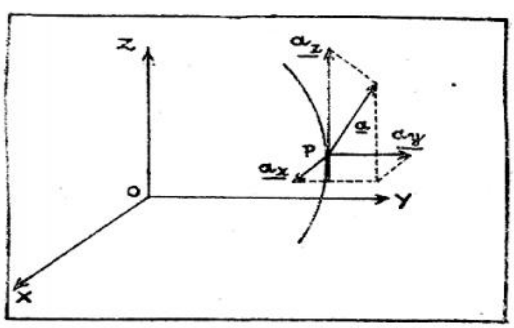
$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}\right\}$$

$$= \frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} + \frac{dz}{dt}\underline{k}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\underline{i} + \frac{d^2y}{dt}\underline{j} + \frac{d^2z}{dt}\underline{k}$$

$$= \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} + \ddot{z}\underline{k}$$ ¬ Ì õ.

($\underline{i}$, j, $\underline{k}$) ±ýÀ ¨ Å ¿¢¨ ÄÂ¡É ¾¢¨ ºÂ¢ ¸Ç¡Å¾¡ø, $\frac{d\underline{i}}{dt} = \frac{d\underline{j}}{dt} = \frac{d\underline{k}}{dt} = 0$ ¬ Ì õ.



À¼õ 4-2-7

À¼õ (4.2.7) ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, Ó Î ì ¸ò¾¢ý ¾¢¨ ºÂ¢ô À¢¡¢× ¸ û $\underline{a_x}, \underline{a_y}, \underline{a_z}$ ±ýÈ¡ø

$$\underline{a} = \underline{a_x} + \underline{a_y} + \underline{a_z}$$

$$= a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}$$ ¬ Ì õ.

$$\therefore a_x = \frac{d^2x}{dt} = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt} = \ddot{y}$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt} = \ddot{z}$$

¬ Ì õ. þ ¨ Å ¸ §Ç x, y, z « î Í ì ¸ Ç¢ø Ó Î ì ¸ ò¾¢ ý ± ñ ½¢ô À¸¢÷× ¸ û ¬ Ì õ.

4.2.8.4. Ó Î ì ¸ ò¾¢ ý ± ñ Á¾¢ôÒ, ¦ºÂøÀ Î õ ¾¢ ¨ º ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È Å ¨ ÃÂÚò¾ø.

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$

$$a^2 = \underline{a}.\underline{a} = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2$$

± É §Å $a = +\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$

Ó Î ì ¸ õ ¦ºÂøÀ Î õ §¸ ¡ Î , x, y, z « î Í ì ¸ Ù ¼ ý , Ó ¨ È§Â $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ± ý Û õ §¸ ¡ ½ í ¸ ¨ Çò ¾¡ í ¸¢ É ¡ ø « ì §¸ ¡ðÊ ý ¾¢ ¨ º ì ¸¢¼ì ¨ ¸ ¸ û .

$$\cos\alpha_x = \frac{a_x}{a}; \cos\alpha_y = \frac{a_y}{a}; \cos\alpha_z = \frac{a_z}{a}$$

± ý Û õ ºÁ ý À Î ¸ Ç¡ø Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ.

(Ì È¢ôÒ (1) t ± ý Û õ ¸ ½ò¾¢ø, Ó Î ì ¸ò¾¢ ý ¾¢ ¨ º, Ð ¸ û þÂ í கும் ப¡ ¨ ¾Â¢ø, P ± ý Û õ ÒûÇ¢ì Ì ¡¢Â ¿¢ ¨ ÄÂ¢ò¾¢ ¨ ºÂ¢ ý §À¡ì ¸¢§Ä¡ « øÄÐ $\underline{P}$ யிø þÂ í Ì õ À¡ ¨ ¾ì Ì Å ¨ ÃÔõ ¦¾¡ Î §¸ ¡ð Î ¾¢ ¨ ºÂ¢§Ä¡ þÕì ¸ §Å ñ ÊÂ¾¢øலை.

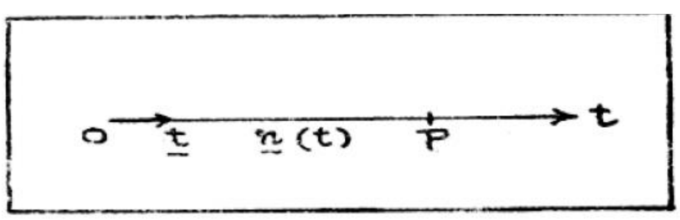
(2) ¬ É ¡ø §¿÷§¸ ¡ðÊÂì ¸ò ¨ ¾ô ¦ÀüÚûÇ Ð ¸ û ´ ýÈ¢ ý ¾¢ ¨ º§Å ¸ õ, Ó Î ì நம் ஆகியன Å Ð ¸ Ç¢ ý §¿÷§¸ ¡ð Î ô À¡ ¨ ¾ ¨ Â Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ $\underline{k}$ ± ý Û õ ¿¢ ¨ Äயான ஓரலகுò¾¢ ¨ ºÂ¢ ý þ É ¾¢ ¨ ºÂ¢§Ä§Â « ¨ ÁÔõ. ² ¦ É É¢ø, t ± ý Û õ §¿Ãò¾ில்,

$\underline{r} = r\underline{t}$ எனிø,

$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\underline{t}$ ± ý È¡ Ì õ.

§ÁÖõ $\underline{a} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{dt}\underline{t}\right\} = \frac{d^2r}{dt^2}\underline{t}$ ¬ Ì õ.

¬ ¸§Å ¾¢ ¨ º§Å ¸ õ, Ó Î ì ¸ õ-¬ ¸¢Â ¨ Å Ð ¸ Ç¢ ý §¿÷ §¸ ¡ð Î ô À¡ ¨ ¾Â¢§Ä§Â « ¨ Á¸¢ ýÈ É .



A¼õ 4-2-7

(3) Ð¸Çý ÓÎì¸õ ¦¾¡Ô¦ÁÉø, «¾ý ¾¨º§Å¸õ ¦¾¡¨¸ÂÎ ¦ºöÅ¾¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \qquad \therefore v_x = \int a_x dt + c_1$$

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y \qquad \therefore v_y = \int a_y dt + c_3$$

$$\frac{dv_z}{dt} = a_z \qquad \therefore v_z = \int a_z dt + c_6$$

c_1, c_2, c_3 என்Û õ ¦¾¡¨¸Âð Î Á¡È¢Ä¢¸û (Constants of integration) ¦¾¡¼ì¸ நிபந்தனைகÇ¡ø ¾£÷Á¡É¢ì¸ôÀÎõ.

§ÁÖõ,

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \therefore x = \int v_x dt + c_4$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \qquad y = \int v_y dt + c_5$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \qquad z = \int v_z dt + c_6$$

$$\frac{ds}{dt} = v \qquad s = \int v\, dt + c_7$$

¬¸§Å Ð¸Çý ¿¢¨Äì Ì¡Â «îÍò ¦¾¡¨Ä×¸Ùõ, «Ð À¡¨¾Âø ¸¼ó¾ ¦¾¡¨Ä¨ÅÔõ Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊ¸¢ÈÐ.

(4) §¿÷§கோட்டியக்¸ò¨¾ô ¦ÀüÈ Ð¸û ´ýÈ¢ý ÓÎì¸õ Á¡È¢Ä¢Â¡¸ þÕìÌ ¦ÁÉில், துகளிýன் þÕôÀ¢¼ò¨¾ ±Ç¢¾¡¸ Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ. ± Î òÐì¸¡ð டாக,

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \quad \text{ஒரு Á¡È¢Ä¢}$$

$$\therefore v_x = \int a_x dt + c_1 = a_x t + c_1$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\therefore x = \int v_x dt + c_2$$

$$= \int (a_x t + c_1) dt + c_2$$

$$= a_x \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

4.2.9 Á¡¾¢ì ¸½ì Ì ¸û

4.2.9.1 t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸û þÕì Ìõ þ¼ò¾¢üÌ¡Â ¿¢¨Äò¾¨ºÂ¢

$r(t) = 2\sin 5t\, \underline{j} + (5 + 2\cos 5t)\, \underline{i}$ Á¢.Á¢ ±É¢ø

(i) t=3 Å¢É¡Ê¸Ç¡¸ þÕì Ì õ§À¡Ð Ð¸Çý ¾¨º§Å¸ò¨¾Ôõ,

(ii) t=0 Ä¢ÕóÐ t=3 Å¢É¡Ê Å¨Ã Ð¸û ¸¼ó¾ ¦¾¡¨Ä¨ÅÔõ ¸¡ñ¸.

(i) $r(t) = 2\sin 5t\,\underline{j} + (5 + 2\cos 5t)\underline{i}$ Á¦.Á¦

±É§Å

$$\underline{v} = \frac{d}{dt}\{\underline{r}(t)\} = r(t) = -10\sin 5t\underline{i} + 10\cos 5t\,\underline{j}$$

$$v_x = -10\sin 5t; v_y = 10\cos 5t$$

¬¾Ä¡ø $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\left(-10\sin 5t\right)^2 + \left(10\cos 5t\right)^2}$

= 10 Á¦/Å¦

t=0 Å¦. ¯ûÇ§À¡Ð

$$r(t) = (5 + 2\cos 0)\underline{i} + 2\sin 0\,\underline{j} = 7\underline{i} + 0\,\underline{j}$$

t=3 Å¦É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð

$$\underline{v} = -10\sin 15\underline{i} + 10\cos 15\,\underline{j}$$

$$= -\left(10\sin 15\times 57.3^0\right)\underline{i} + \left(10\cos 15\times 57.3^0\right)\underline{j}$$

$$= -10\sin 140^0\,\underline{i} + 10\cos 140^0\,\underline{j}$$

$$= -6.43\underline{i} + 7.66\,\underline{j}$$

$$v_x = -6.43;\ \ v_y = -7.66$$

$$\tan^{-} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{10\cos 140^0}{-10\sin 140^0} = -\cot 140^0 = \cot 40^0 = \tan 50^0$$

$$\therefore {}^{-} = 50^0$$

(ii) $s = \int v dt + c$

$$= \int 10 dt + c$$

$$s = 10t + c$$

t=0 ±ý Ûõ §¿Ãò¾¦ø s=0 ±ý À¾¡ø 0=0+c ∴ c=0 ∴ s=10t ∴ t=3 Å¦É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð s=30000 Á¦.Á¦.

4.2.9.2 t ±ý Ûõ Å¦É¡ÊÂ¦ø Ð¸û ´ýÈ¦ý þÕôÀ¦¼ò¾¦ü Ì¡¦Â ¿¦¨Äò¾¦¨ºÂ¦ $r(t) = (4t - t^3)\underline{i} + (3-2t)\underline{j} - 3t^2\underline{k}$ Á¦.Á¦. ±É¦ø, §¿Ãõ 1 Å¦É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð Ð¸Ç¦ý þÕôÀ¦¼ò¨¾Ôõ, «ô¦À¡ØÐ «¾ý ¾¦¨º§Å¸ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.

þí Ì $x(t) = 4t - t^3; y(t) = 3 - 2t; z(t) = -3t^2$

t=1 ±ýÈ¡ø,x=3; y=1; z=-3

$$\left|\underline{OP}\right| = \left|\underline{r}(t)\right| = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$$ Á¦.Á¦.

«ô¦À¡ØÐ $\underline{OP}$ Â¦ý ¾¦¨º Ì¸¦¼Ì ¨¸¸û

$\cos\sim = \frac{3}{\sqrt{19}}; \cos \quad = \frac{1}{\sqrt{19}}; \cos ¥ = \frac{3}{\sqrt{19}}$ ¬ Ì õ.

Ð ¸ Ç¦ ý ¾¦ ¨ º§Å ¸ õ $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = -\left\{(4-3t^2)\underline{i} - 2\underline{j} - 6\underline{k}\right\}$ ¦ º.Á¦./Å¦.

$\left|v\right|_{t=1} = \underline{i} - 2\underline{j} - 6\underline{k}$ ¦ º.Á¦./Å¦.

¾¦ ¨ º§Å ¸ õ ¦ ºÂøÀ Î õ §¸¡ðÊ ý ¾¦ ¨ º ì ¸¦¼ì ¨ ¸ ¸ û Ó ¨ È§Â

$\cos\_{x} = \frac{1}{\sqrt{41}}; \cos\_{y} = \frac{-2}{\sqrt{41}}; \cos\_{z} = \frac{-6}{\sqrt{41}}$ ¬ Ì õ.

4.2.9.3 ¸¦úì ¸ ¡ Ï õ ¿¦ ¨ Äò¾¦ ¨ ºÂ¦ ¸ ¨ ÇÔ ¨ ¼Â ÒûÇ¦ ¸ Ç¦ ý ¾¦ ¨ º§Å ¸ í ¸ û, Ó Î ì ¸ í ¸ û ¬ ¸¦ÂÅü ¨ È §¿Ãõ t=1Å¦ ¯ ûÇ§À¡Ð ¸ ¡ ñ ¸ .
(§¿Ãõ t Å¦Ê ¡Ê ¨ ÂÔõ, ¦¿ Î ì ¨ ¸, ¸¦¼ì ¨ ¸ ¸ Ç¦ø t ¬ ÉÐ ¬ ¨ ÃÂ ý ¸ ¨ ÇÔõ Ì È¦ì ¸¦ÈÐ),

$(i) \quad \underline{r}(t) = 4\cos t\underline{i} + 2\sin t\underline{j} + t^2\underline{k}$

$(ii) \quad \underline{r}(t) = (t-\sin t)\underline{i} + (1-\cos t)\underline{j} + 4\sin\frac{t}{2}\underline{k}$

$(iii) \quad \underline{r}(t) = 4t\underline{i} + 8\underline{j} + 2t^2\underline{k}$

$(i) \quad \underline{r}(t) = 4\cos t\underline{i} + 2\sin t\underline{j} + t^2\underline{k}$

$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = -4\sin t\underline{i} + 4\cos t\underline{j} + 2t\underline{k}$

$v = \left|\underline{v}\right| = \left(16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 4t^2\right)$

$= \sqrt{16+4t^2}$

$\left|\underline{v}\right|_{t=1} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{0.20}$ Á¦./Å¦.

$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = -4\cos t\underline{i} - \sin t\underline{j} + 2\underline{k}$

$\left|\underline{a}\right| = \sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t + 4}$

$\left|\underline{a}\right|_{t=1} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{0.20}$ Á¦./Å¦.

$r(t) = (t-\sin t)\underline{i} + (1-\cos t)\underline{j} + 4\sin\frac{t}{2}\underline{k}$

$(ii) \quad \underline{v} = \dot{\underline{r}} = (1-\cos t)\underline{i} + \sin t\underline{j} + 4\cos\frac{t}{2}.\frac{1}{2}\underline{k}$

$= (1-\cos t)\underline{i} + \sin t\underline{j} + 2\cos\frac{t}{2}\underline{k}$

$\left|\underline{v}\right| = \sqrt{1+\cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t + 4\cos^2\frac{t}{2}}$

$= \sqrt{2(1-\cos t) + 4\cos^2\frac{t}{2}}$

$\left|\underline{v}\right|_{t=1} = 2$ 0.02 Á¦/Å¦

$$\underline{a} = \ddot{r} = \sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} - \sin\frac{t}{2}\underline{k}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2\frac{t}{2}}$$

$$= \sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}$$

$|\underline{a}|_{t=1} =$ 0.01109 Á¢/Å¢^{2}

$(iii)\ r(t) = 4t\underline{i} + 8\underline{j} + 2t^2\underline{k}$

$\underline{v} = \underline{r} = 4\underline{i} + 4t\underline{k}$

$\underline{a} = \ddot{r} = 4\underline{k}$

$|\underline{v}| = \sqrt{16+16t^2} = 4\sqrt{1+t^2}$ $\{(10^{-2})$மீ/வி$\}$.

$|v|_{t=1} = 4\sqrt{2}$ $\{(10^{-2})$மீ/வி$\}$ = $\sqrt{0.32}$ Á¢/Å¢

$|\underline{a}| = \sqrt{4^2} =$ 0.04 Á¢/Å¢^{2}

4.2.9.4. $\underline{v_\circ} = v_\circ$⎿ ± ý Û õ Ó ¸ ôÒ ¾¢ ¨ º§Å ¸ ò ¨ ¾ (Initial velocity) Ô ¨ ¼Â ±È¢ ¦À¡Õ û (Projectile) ´ ý È¢ ý þÂ í Ì Å ¨ Ã $\underline{r}(t) = \{v_\circ t\cos¯\,\underline{i} + (v_\circ t\sin¯ - 4.9t^2)\underline{j}\}$ Á¢ ±É ì ¦ ¸ ¡ ñ Î $v_\circ = \frac{4000}{3}$ Á¢/ Å¢., $¯ = 30^\circ$ ±É¢ø, ±È¢¦À¡ÕÇ¢ ý §Å ¸ õ, ¦ º øÖ õ ¾¢ ¨ º ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È, §¿Ãõ 1 Å¢ ± ý Ú û Ç§À¡Ð ¸ ¡ ñ ¸ .

$$r(t) = v_0 t\cos¯\,\underline{i} + (v_0 t\sin¯ - 4.9t^2)\,\underline{j}$$

$$\underline{v} = \dot{r} = v_0 t\cos¯\,\underline{i} + (v_0\sin¯ - 9.8t)\,\underline{j}$$

$$\underline{v} = \frac{4000}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{i} + \left(\frac{4000}{3}.\frac{1}{2} - 9.8\right)\underline{j}$$

$$¯ = 30$$

$$t = 1 = \frac{2000}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1970.6}{3}\underline{j}$$

$|\underline{v}| = \sqrt{\left(\frac{2000}{3}\right)^2 + \left(\frac{1970.6}{3}\right)^2} = 1179$ Á¢/ Å¢

4.2.9.5 §¿Ãõ t Å¢Éாடியாக ¯ û Ç§À¡Ð, ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø, þÂ í Ì õ Ð ¸ û ´ ý Ú þÕ ì Ì Á¢1_த்¾¢ன் அச் Í·த் தொ ¨ Ä× ¸ û Ó ¨ È§Â,

x= 48t ; $y = \frac{1}{64}(4-t^2)^2$; $z = 4t^2$ $\{(10^{-2})$மீ/வி$\}$ ±É¢ø t=8 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ û Ç§À¡Ð «¾ý §Åகத் ¨தயும், ைஐ þÂ í Ì õ ¾¢ ¨ º ¨ Â Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ µÃÄ ì ò¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ ÂÔõ ¸ ¡ ñ ¸ .

$$\underline{r}(t) = 48t\underline{i} + \frac{1}{64}(4-t^2)^2\,\underline{j} + 4t^2\underline{k}$$

$$\underline{v} = \dot{r} = 48\underline{i} + \frac{1}{64}t(4-t^2)\,\underline{j} + 8t\underline{k}$$

$$|\underline{v}|_{t=8} = \sqrt{48\underline{i} + 30\,\underline{j} + 64\underline{k}}$$

$$|\underline{v}|_{t=8} = \sqrt{48^2 + 30^2 + 64^2} = 85.44\left\{\left(10^{-2}\right)\text{மீ/வி}\right\} \quad \left\{\left(10^{-2}\right)\text{மீ/வி}\right\}$$

$$\underline{v} = |\underline{v}|\,t = 85.44\left[\frac{48}{85.44}\underline{i} + \frac{30}{85.44}\,\underline{j} + \frac{64}{85.44}\underline{k}\right] \quad \left\{\left(10^{-2}\right)\text{மீ/வி}\right\}$$

±É§Å §¿Ãõ 8 ÅÉ¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð Ð¸û þÂí Ìõ ¾¨ºÂø «¨ÁÔõ µÃÄ Ìò¾¨ºÂÂ¡ÉÐ $\underline{t} = \frac{48}{85.44}\underline{i} + \frac{30}{85.44}\,\underline{j} + \frac{64}{85.44}\underline{k}$ ¬ Ìõ.

4.2.9.6. ¯ÕûÅ¨Ç (Cycloid) À¡¨¾Âø ¦ºøÖõ Ð¸û ´ýÚ t §¿Ãò¾ø $\underline{r} = 5\left(t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)\underline{i} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 3t\right)\underline{j}$ Á ±ý Ûõ ¿¨Äò¾¨ºÂ¨Âô ¦ÀüÚûÇÐ. $\underline{t}$ ±ýÀÐ À¡¨¾Âý ¦¾¡Î§¸¡ðÊÄ¨ÁÔõ µÃÄÌò ¾¨ºÂÂ¡Ì ¦ÁÉø, ஃÎºÁÂí¸Çø $\underline{t} = \underline{i}$ ±ýÈÕìÌ ¦ÁÉì ¸¡ ñ ¸. «ó¾ §¿Ãí¸ÇÄ $\underline{v}$ ý Á¾ôÒì¸¨ÇÔõ ¸¡ ñ ¸.

$$\underline{r}(t) = 5\left(t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)\underline{i} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 3t\right)\underline{j}$$

$$\underline{v} = \underline{\dot{r}} = 5\left(1 - \cos 3t\right)\underline{i} + \left(5\sin 3t\right)\underline{j}$$

$$= 10\sin^2\frac{3t}{2}\underline{i} + 10\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{3t}{2}\,\underline{j}$$

$$= 10\sin\frac{3t}{2}\left(\sin\frac{3t}{2}\underline{i} + \cos\frac{3t}{2}\,\underline{j}\right)$$

$$= 10\sin\frac{3t}{2}\,\underline{j}$$

$$\underline{t} = \sin\frac{3t}{2}\underline{i} + \cos\frac{3t}{2}\,\underline{j}$$

$\underline{i} = \underline{t}$ என்றாÕì¸ §Å ண்டுமாகில்,

$sin\frac{3t}{2} = 1$ «øÄÐ $\frac{3t}{2} = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k = 0,1,2\ldots\ldots$

$$t = \frac{2}{3}\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right) = (4k+1)\frac{\pi}{3}, k = 0,1,2,\ldots\ldots$$

$t = \frac{\pi}{3}$ எýÈ¡ø $(4k+1)\frac{\pi}{3}, k = 0,1,2,\ldots\ldots$

$v = 10\ i$ Á/Å.

4.2.10 ÀÂüº

4.2.10.1 (x,y)- ¾Çò¾ÄÂ í Ì õ ´Õ Ð¸û t ±ý Ûõ §¿Ãò¾ø $x=4t^2$; $y=6t$ ±ý ÛÁ¼ò¾Á ¨ÁÕ¦ÁÉø t=1 ÅÉ¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð, «¾ý ¾¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.
[Å¨¼ 10 36.9^0]

4.2.10.2 þÂ í Ì Ð¸û ´ýÈý þÕôÀ¼õ (t ÅÉ¡Ê §¿Ãò¾ø)
$\underline{r} = 1.36t^3\underline{i} + 3.62t\,\underline{j} + 2.37^2\underline{k}$ Á.Á. ±Éø, §¿Ãõ $t = 0.5$ ÅÉ¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð Ð¸Çý §Å¸ò¨¾Ôõ «¾ý þÂ í Ì õ ¾¨Â Å¨ÃÂÚì Ì õ µÃÄ Ìò ¦¾¡ Î §¸¡ Î ¾¨ºÂ¨Â $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ Ó¨ÈÂø ¸¡ ñ¸.($360t^3$ i + 3620t j + $2370t^2$ k Á.Á.)
[Å¨¼ : §Å¸õ =4.44 Á./Å.
$\underline{r} = -0.228\underline{i} + 0.815\underline{j} + 0.533\underline{k}$]

4.2.10.3 ´Õ §¿÷§¸¡ðÊÂì¸ò¨¾ô ¦ÀüÈ Ð¸û ´ýÈý þÕôÀ¼ò¨¾ $\underline{r}(t) = 0.5t^2\underline{i} + 5\underline{j}$ ±ý Ûõ ¿¨Äò¾¨ºÂ Å¨ÃÂÚì¸ÈÐ. §¿Ãõ t = 0,1,4 ±ý Ûõ ÅÉ¡Ê¸Çø $\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}$ ¬¸ÂÅü¨È Å¨ÃÀ¼õ ãÄõ ÅÇì¸ì¸¡ð Î¸.

4.2.10.4 Ð¸û þÂ í Ì õ À¡¨¾Âø, t ±ý Ûõ ÅÉ¡Ê §¿Ãò¾ø «¾ý ¿¨Ä¨Â

$$\underline{r}(t) = (2t^2 - 4t)\underline{i} + 2\left\{(t-1)^2\right\} + 4(t-1)\underline{j}$$

±ý Ûõ ¿¨Äò¾¨ºÂ Å¨ÃÂÚì¸ÈÐ. Ð¸Çý ¾¨º§Å¸õ, ÓÎì¸õ ¬¸ÂÅü¨È t=1 ÅÉ¡Ê, t=3 ÅÉ¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð ¸¡ñ¸.

$\underline{v}|_{t-1} = 8\angle 90^\circ$ Á. / Å.

$\underline{a}|_{t-1} = 4\sqrt{2}\angle 45^\circ$ Á. / Å

$\underline{v}|_{t-1} = 4\sqrt{5}\angle 63.43^\circ$ Á. / Å

$\underline{a}|_{t-1} = 4\sqrt{2}\angle 45^\circ$ Á. / Å

4.2.10.5 Óó¨¾Â ¸½ì¸ø (3.12.4- ÅÐ ¸½ì¸ø) Ð¸Çý ºÚÁ §Å¸ Á¾ô¨ÀÔõ, «Ð ²üÀÎõ §¿Ãõ, þ¼õ, ¦ºÂøÀÎò¾¨º ¬¸ÂÅü¨ÈÔõ ¸¡ñ¸.
[ÌÈôÒ $v^2 = 16(5 - 6t + 2t^2)$

ºÚÁ §Å¸õ= $2\sqrt{2}$ þù§Å¸õ §¿Ãõ $\frac{3}{2}$ ÅÉ¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð, $\underline{r} = \frac{3}{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}\right)$

±ý Ûõ ¿¨ÄÂø $\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}\right)$ ±ý Ûõ µÃÄ Ìò ¾¨ºÂ¨Â §¿¡ì¸î ¦ºÂøÀÎ¸ÈÐ.

4.2.10.6. t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø(Å¢É¡ÊÂ¢ø) þÂí Ìõ Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä¨Â $\underline{r} = \left\{(t+1)^2\,\underline{i} + (t+1)^{-2}\,\underline{j}\right\}$ Á¢.Á¡. ±ý Ûõ ¿¢¨Äò¾¢¨ ºÂ¢ Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸¢ø, «¾ý þÂí Ì Å¨Ã ´Õ ¦ºùÅ¸ «¾¢ÀÃÅ¨Ç× (Rectangular hyperbola) ±É ì¸¡ ñ ¸. §¿Ãõ t=0 Å¢É¡Ê $t=\frac{1}{2}$ Å¢É¡Ê ±ýÚûÇ ºÁÂí ¸Ç¢ø, Ð¸Ç¢ø ¾¢¨º§Å¸õ, Ó Î ì¸õ ¬¸¢ÂÅü¨ÈÔõ ¸¡ ñ ¸.

Å¢¨¼: xy=1, t=0 Å¢É¡Ê

$$\underline{v} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\underline{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\underline{j}}{\sqrt{2}}\right) \text{Á¡. / Å¢.}$$

$$\underline{a} = 2\sqrt{10}\left(\frac{\underline{i}}{\sqrt{10}} - \frac{3\underline{j}}{\sqrt{10}}\right) \text{Á¡. / Å¢}^2$$

$$t = 0.5 \text{ Å¢}$$

$$\underline{v} = 2\sqrt{2}\left(\frac{81\underline{i}}{82.50} - \frac{16\underline{j}}{82.50}\right) \text{Á¡. / Å¢.}$$

$$\underline{a} = 2.325\left(0.8602\underline{i} + 0.5097\underline{j}\right) \text{Á¡. / Å¢}^2$$

4.2.10.7 þÂí Ìõ Ð¸û ´ýÈ¢ý À¡¨¾¨Â, t Å¢É¡Ê §¿Ãò¾¢ø x = 1000 (l-e^{-t})¦º.Á¡.; y = 1000t/1+t ¦º.Á¡. ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î ¸û Å¨ÃÂÚì Ì ¦ÁÉ¢ø «¾ý ¿¢¨Â, ¾¢¨º§Å¸õ. Ó Î ì¸õ ¬¸¢ÂÅü¨È t=0, t=1Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð ¸¡ ñ ¸.

(Å¢¨¼: t=0 ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø

$\underline{r} = 0$; $\underline{v} = 10\sqrt{2}\,\underline{|315^\circ}$ Á¡/ Å¢.

$\underline{a} = 10\sqrt{5}\,\underline{|153.8^\circ}$ Á¡/ Å¢^{2}.

$\underline{r} = 6.321\underline{i} + 5\underline{j}$ Á¡.

6321 i + 5000 j Á¢.Á¡.

$\underline{v} = 4.45\,\underline{|124.2^\circ}$ Á¡/ Å¢.

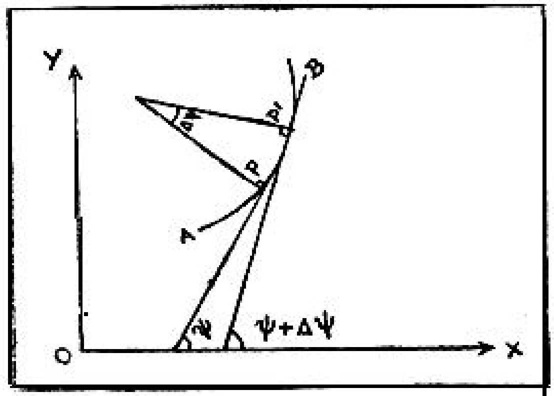
$\underline{a} = 4.45\,\underline{|304.2^\circ}$ Á¡/ Å¢^{2}.)

4.2.11. ´Õ ¾Çò¾¢ø Å¨Ç§¸¡ðÊÄ¢ÂÂí Ìõ Ð¸Ç¢ý Ó Î ì¸ò¨¾ ¦¾¡ Î Å¨Ã ¾¢¨ºÂ¢Öõ ¦º í Ìò¾¢ ¾¢¨ºÂ¢Öõ ¸¡½ ø.

(To find expression for the acceleration of a particle moving in a plane curve along the tangential and normal directions)

ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø Ð¸Ç¢ý þÂì¸õ Å¨Ç§¸¡ðÊ¨ÄÁÔÁ¡¸¢ø ¾¢¨º§Åõ, Ó Î ì¸õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ÜÚ¸û (components) ²§¾Ûõ ã ýÚ ¿¢¨ÄÂ¡ÉÐõ ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡É « ¨ÁÔõ $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ ±ý Ûõ ¾¢¨º¸Ç¢ø ¦ÀÈôÀð¼É. º¢Äº¡Âí ¸Ç¢ø ÌÈ¢ôÀ¡¸ Ð¸Ç¢ýÀ¡¨¾ ´Õ ¾Çò¾¢Ä¨ÁÔõ§À¡Ð, þÂí Ìõ

Ð¸Ç¢ý Ó Î ì¸ò¨¾ò ¦¾¡ Î Å ¨Ã ¾¢¨ºÂ¢Öõ ¸¡ Ï ¾ø. ¸½¢ôÒ Ó¨È§Â ±Ç¢¾¡ì¸ ì Ü Î õ.



À¼õ 4-2-8

(X,Y)- ¾Çò¾¢ø À¼õ (2.9)-ø ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú, AB ±ý Ûõ Å¨Ç×ô À¡¨¾Â¢ø, Ð¸û ´ýÚ þÂí¸ð Î õ. t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸û ABÂ¢ø P ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. Å¨Ç×ôÀ¡¨¾Â¢ý ´ù¦Å¡ÕÒûÇ¢Â¢Öõ ¦¾¡ Î Å ¨Ã ¾¢¨º ¨ÂÔõ, «¾ü Ì î ¦ºí Ìò¾¡É ¾¢¨º¨ÂÔõ þ¨ ½ì¸Ä¡õ. ±É§Å P ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø Å¨Ç×ôÀ¡¨¾ì Ì Å¨ÃÔõ ¦¾¡ Î Å ¨Ã ¾¢¨ºயில் ($\underline{t}$) ±ý Ûõ µÃÄ Ìò¾¢¨ºÂ¢¨ÂÔõ «¾ü Ì ¦ºí Ìò¾¡É ¾¢¨ºÂ¢ø $\underline{n}$ ±ý Ûõ µÃÄ Ìò¾¢¨ºÂ¢¨ÂÔõ ÌÈ¢ì¸ ¦¾¡ Î Å ¨Ã, ¦ºí ÌòÐò ¾¢¨º¸û, À¡¨¾Â¢Ä¨ÁÔõ ÒûÇ¢¸Ç¢ý þÕôÀ¢¼ò¾¢ü Ì ²üÈÅ¡Ú Á¡Èò¾¨Å.

$(t+\Delta t)$ ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, Ð¸û Pì Ì «Õ¸¢ÖûÇ P' ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «í Ì ¦¾¡ Î Å ¨Ã ¦ºí ÌòÐò ¾¢¨º¸Ç¢ø Å¨ÃÂôÀ Îõ µÃÄ Ìò¾¢¨ºÂ¢¸Ç¡ÅÉ.

$\underline{t}',\underline{n}'$ ±ýÀ¨Å Óý É§Ã ±Î ò¾ $\underline{t},\underline{n}$ ±ýÀ¨Å ¦ºÂøÀÎõ ¾¢¨º¸Ù ì Ì Á¡ÚÀð Î ûÇÉ. «¾¡ÅÐ þùÅ¡ò ¾¢¨ºÂ¢¸û ±ñ Á¾¢ôÀ¡ø ¿¢¨ÄÂ¡É ´ü¨È Á¾¢ô¨Àô ¦ÀüÈ Á¡È¢Ä¢¸Ç¡¸ þÕó¾§À¡¾¢Öõ, «ÅüÈ¢ý ¾¢¨º¸û Á¡ÚÅ¾¡ø $\underline{t},\underline{n}$ ±ýÀ¨Å ¾¢¨ºÁ¡È¢¸Ç¡ Ìõ. ¬¾Ä¡ø $\frac{d\underline{t}}{dt},\frac{d\underline{n}}{dt}$ ±ý Ûõ «ÅüÈ¢ý Å¨¸ì¦¸Øì¸û þÕì¸¢ýÈÉ.

Ð¸û t=0 ±ý Ûõ ¦¾¡¼ì¸ §¿Ãò¾¢ø P_0 ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢Ä¢ÕóÐ þÂí Ì ¦ÁÉ¢ø, «Ð À¡¨¾Â¢ø t ¸½ò¾¢ø, P-³ «¨¼Ôõ§À¡Ð $\widehat{P_0P}=\Delta s$ ±ý Ûõ ¦¾¡¨Ä¨Å ì ¸¼ó¾¡¸×õ $(t+\Delta t)$ ±ý Ûõ ¸½ò¾¢ø $\underline{P}$ ì Ì «Õ¸¢ø, À¡¨¾Â¢ø $PP'=\Delta s$ என்றுள்ள P' ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø «¨ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

«ô¦À¡ØÐ, Δt ±ý Ûõ Á¢¸îº¢È¢Â §¿Ãò¾¢ø, Ð¸û À¡¨¾Â¢ø ¸¼ó¾ ¦¾¡¨Ä× Δs ¬ Ìõ. P ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø Ð¸û $\underline{V}$ ±ý Ûõ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø ¦ºøÅ¾¡¸¢ø, «Ð À¡¨¾ì Ì $\underline{P}$ Â¢ø Å¨ÃÔõ ¦¾¡ Î§¸¡ðÊø «¨ÁÔõ. ±É§Å $\underline{V}=v\underline{t}$ ¬ Ìõ

«Ð §À¡Ä§Å Ð¸û $\underline{P'}$ ±ý ÛÁ¢¼ò¨¾ ±öÐõ§À¡Ð «¾ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ $\underline{V}+\Delta\underline{v}$ ±É ì¦¸¡ ñ ¼¡ø, «Ð×õ P'-ø Å¨ÃÂôÀ Îõ ¦¾¡Î§¸¡ðÊø ¦ºÂøÀÎõ. ¬¾Ä¡ø $\underline{V}+\Delta\underline{V}=(\underline{V}+\Delta\underline{V})\underline{t}'$ $\underline{V}+\Delta\underline{v}=(V+\Delta\underline{v})t'$ ¬ Ìõ.

P,P' ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ç¢ø, À¡¨¾ìÌ Å¨ÃÂôÀ Îõ ¦¾¡Î§¸¡Î¸û x «îÍ¼ý ·, · +Δ· ±ý Ûõ §¸¡½í¸¨Ç «¨ÁôÀ¾¡É¡ø, $(\underline{t},\underline{t}')$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢¸ Ùì¸¢¨¼ÂÄ¨ÁÔõ §¸¡½õ Δ· ¬ Ìõ. §ÁÖõ $\underline{n},\underline{n}'$ ¾¢¨ºÂ¢¸¨Ç ¿¦ðÎ¸. «¨Å¸û C ±ý Ûõ þ¼ò¾¢ø ¦ÅðÊì ¦¸¡ûÇðÎõ. C Â¢ø $\underline{n},\underline{n}'$ ±ýÀ¨Å¸ Ùõ Δ· ±ý Ûõ §¸¡½ò¨¾ «¨ÁìÌõ. C ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¡ÉÐ Å¨Ç×¨ÁÂÂõ (Centre of curvature) ±ÉôÀÎõ. C,P-¸ Ùìì þ¨¼ÂÄ¨ÁÔõ ¦¾¡¨Ä× Å¨ÇÂ¡Ãõ (Radius of curvature) ±ÉôÀÎõ. «Ð ρ ±ý Ûõ ¸¢§Ãì¸ ±Øò¾¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ. À¼õ 2.9 Ä¢ÕóÐ $\Delta s = ° \Delta·$ ±É «È¢ÂÄ¡õ.

$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t} = ° \frac{\Delta·}{\Delta t}$$

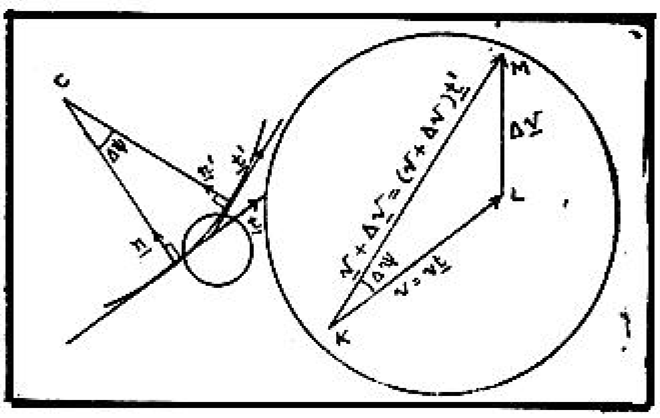
Ð¸Ç¢ý §Å¸Á¡ÉÐ

$$v = \text{±ø¨Ä}_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= ° \text{±ø¨Ä}_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta·}{\Delta t}$$

$$= ° \frac{\Delta·}{dt}$$

$$\underline{v} = v\underline{t} = ° \frac{d·}{dt}\underline{t}$$



À¼õ 4-2-9

À¼õ (4.2.9)ø ¸¡ðÊÔûÇÀÊ Δt §¿Ãò¾¢ø $\Delta\underline{v}$ ±ý Ûõ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý Á¡üÈõ P ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎõ $\underline{v}$ ±ý Ûõ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý "±ñ Á¾¢ôÒ" Á¢Ì¾ôÀ¡ðÊÉ¡Öõ (Increase in the magnitude of the velocity at P) «¾ý ¾¢¨ºÂ¢ý Á¡üÈò¾¡Öõ ²üÀð Î þÕôÀ¾¡ø, «Ð ´Õ ¾¢¨ºÂ¢ ¬ Ìõ. ±É§Å $\underline{v}+\Delta\underline{v}$ ±ý Ûõ ¾¢¨º§Å¸õ, P' ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø Å¨ÃÂôÀ Îõ ¦¾¡Î§¸¡ðÎ ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀÎõ. ±É§Å $\underline{v}+\Delta\underline{v}=(v+\Delta v)\underline{t}'$ ¬ Ìõ. þí Ì $\Delta\underline{v}$ ±ýÀÐ Ð¸û

PÂ¢Ä¢ÕóĐ P' ±ý Ûõ ÒûÇ¢¨Â « ¨¼Ôõ§À¡Ð ²üÀð¼ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý Á¡üÈò¨¾ « È¢Å¢ì ¸¢ýÈ¾¡ø $\underline{v}=v\underline{t}$. $\underline{v}+\triangle\underline{v}=(v+\triangle v)\underline{t}'.\triangle\underline{v}$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Ç À¼õ 4.2.9-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú KLM ±ý Ûõ Óì§¸¡½ò¾¢ý Àì¸ í¸Ç¡É KL, KM, LM, ±ýÀ¨Å ÌÈ¢ôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

Ó Î ì¸ò¾¢ý Å¨ÃÂ¨ÈÂ¢ýÀÊ

$$
\begin{aligned}
\underline{a} &= \underset{\Delta t\to 0}{\text{±ø¨Ä}}\frac{\Delta\underline{v}}{\Delta t}\\
&= \underset{\Delta t\to 0}{\text{±ø¨Ä}}\frac{(v+\Delta v)\underline{t}'-v\underline{t}}{\Delta t}\\
&= \underset{\Delta t\to 0}{\text{±ø¨Ä}}\frac{(v+\Delta v)\cos\Delta\cdot\ \underline{t}+(v+\Delta v)\sin\Delta\cdot\ \underline{n}-v\underline{t}}{\Delta t}\\
&= \underset{\Delta t\to 0}{\text{±ø¨Ä}}\frac{(v+\Delta v)\underline{t}+(v+\Delta v)\Delta\cdot\ \underline{n}-v\underline{t}}{\Delta t}\\
&= \underset{\Delta t\to 0}{\text{±ø¨Ä}}\frac{\Delta v}{\Delta t}\underline{t}+v\frac{\Delta\cdot}{\Delta t}\underline{n}\\
&= \frac{dv}{dt}\underline{t}+v\frac{d\cdot}{dt}\underline{n}\\
&= \frac{dv}{dt}\underline{t}+v.\frac{v}{\circ}\underline{n}\\
&= \frac{dv}{dt}\underline{t}+\frac{v^2}{\circ}\underline{n}
\end{aligned}
$$

¬ Ìõ. Δ· ±ýÀÐ º¢È¢Â¦¾¡Õ ¬ ¨ÃÂÇ¨Å Ì ÌÈ¢ôÀ¾¡ø, Ññ ± ñ ½¢Â¢ý Ó¾øÅ¡¢¨ºì §¸¡¨Å¸ Ùì Ìò ¾¢Õò¾Á¡¸ $\cos\Delta\cdot=1$, $\sin\Delta\cdot=\Delta\cdot$ ±É ì ¦¸¡ûÇôÀð¼É.

$\underline{a}=\underline{a_t}+\underline{a_n}=a_t\underline{t}+a_n\underline{n}$ ±É ì¦¸¡ ñ ¼¡ø Å¨Ç§¸¡ðÊÄ¢Â í Ìõ, Ð¸Ç¢ý Ó Î ì¸ò¾¢ý ÜÚ¸û ¦¾¡Î Å¨Ã ¾¢¨ºÂ¢Öõ «ò¾¢¨ºì Ì Î ¦ºí ÌòÐò ¾¢¨ºÂ¢Öõ, Ó¨È§Â

$$\underline{a_t}=\frac{dv}{dt}\underline{t}$$

$\underline{a_n}=\frac{v^2}{\circ}\underline{n}$ ¬ Ìõ.

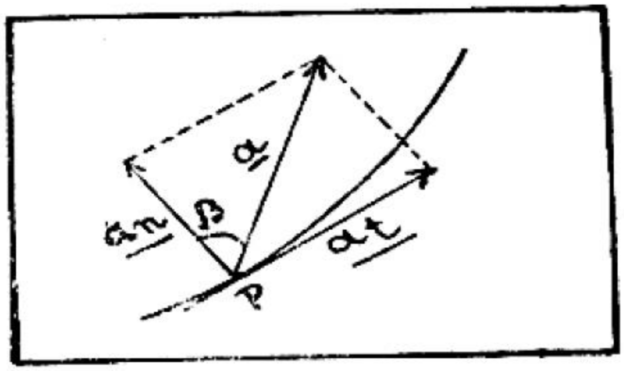
þ¨Å À¼õ (4.2.9) ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÉ.

(ÌÈ¢ôÒ (1) Å¨Ç×ôÀ¡¨¾Â¢ø þÂí Ìõ Ð¸Ç¢ý Ó Î ì¸õ À¡¨¾Â¢ý ¦¾¡Î §¸¡ðÊø ¦ºÂøÀÎ Å¾¢ø ¨Ä. «¾ý $\underline{a_t}$ ±ý Ûõ ´ÕÀÌ¾¢§Â ¦¾¡Î §¸¡ðÊø « ¨Á¸¢ÈÐ.

(2) $\underline{a_n}$ ±ý Ûõ À¸¢÷× Å¨Ç×ÁÂò¨¾ §¿¡ì¸¢§Â ¦ºÂøÀÎõ.

(3) ¾¢¨ºÂ¢ Ññ ¸½¢¾ Ó¨ÈôÀÊÔõ a-Â¢ý ¦¾¡Î §¸¡Î,

¦ºí ÌòÐì§¸¡ðÎ ô À¸¢÷×¸ ¨Ç Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ.



À¼õ 4-2-10

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(v\underline{t}\right)$$
$$= \frac{dv}{dt}\underline{t} + v\frac{d\underline{t}}{dt}$$

$\underline{t},\underline{t}'$ ±ýÀ¨Å¸Ç¢ý எண்மதிப்பு ´ýÈ¡Å¾¡Öõ «¨Å¸Ù ìÌ þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ §¸¡½õ $\Delta\cdot$ ¬É¾¡Öõ $\underline{t},\underline{t}'$ ¸Ùì Ì ÓûÇ Á¡üÈò¨¾ «È¢Å¾ü Ì À¼õ. (2.11)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú $\underline{t},\underline{t}'$ ±ý Ûõ µÃÄ Ìò¾¢¨ºÂ¢¸ ¨Ç, µ÷ þÕºÁÀì¸ Óì§¸¡½ò¾¢ý Àì¸ í¸Ç¡¸ì ¦¸¡û¸ $\Delta\underline{t}$ ±ýÀÐ $\underline{t},\underline{t}'$ ¸Ç¢ý Á¡üÈò¨¾ì ÌÈ¢ôÀ¾¡¸¢ø ¾¢¨ºÂ¢ Óì§¸¡½ Å¢¾¢ôÀÊ,

$$\Delta\underline{t} = \underline{t}' - \underline{t}$$
$$\left|\Delta\underline{t}\right| = 2\sin\frac{\Delta\cdot}{2}$$
$$= \text{±ø¨Ä}_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta t}{\Delta\cdot}\right| = \text{±ø¨Ä}_{\frac{\Delta\cdot}{2}\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\cdot}{2}}{\frac{\Delta\cdot}{2}}\right| = 1$$

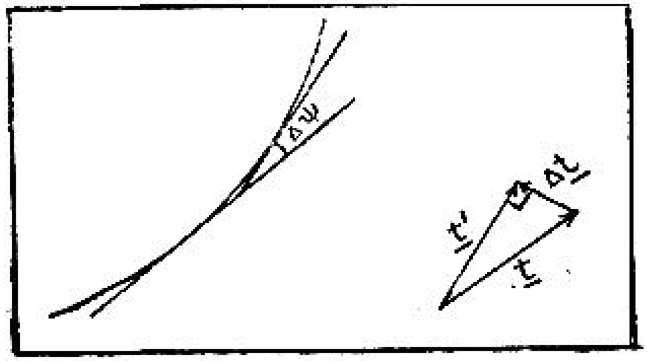
¬ Ìõ.

$\Delta\cdot$ âîº¢Âò¨¾ « Ï Ìõ§À¡Ð, $\Delta\underline{t}$ ¦ºÂøÀÎõ¾¢¨º, $\underline{t}$Â¢ý ¾¢¨ºì Ì ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ. «ò¾¢¨º¨Â $\underline{n}$ ±ý Ûõ µÃÄ Ìò¾¢¨º¢ ÌÈ¢ôÀ¾É¡ø.

$$\frac{d\underline{t}}{d\cdot} = \text{±ø¨Ä}_{\Delta\cdot\to 0}\frac{\Delta\underline{t}}{\Delta\cdot} = 1\left(\underline{n}\right)$$

¬ Ìõ.

±É§Å $\frac{d\underline{t}}{d\cdot}$ ±ýÀÐ $\underline{t}$ ÍÆÖõ ¾¢¨ºÂ¢ø $\underline{t}$ ìÌî ¦ºí Ìò¾¡¸ ¯ûÇ µÃÄ Ìò ¾¢¨ºÂ¢Â¡¸¢ÈÐ. þÐ§Å Å¨Ç×ôÀ¡¨¾Â¢ø ¦ºí ÌòÐ ¾¢¨ºÂ¢Ä¨ÁÔõ $\underline{n}$ ±ý Ûõ ¾¨ÄÂ¡Â ¦ºí ÌòÐ µÃÄ Ìò ¾¢¨ºÂ¡ Ìõ (Unit Principal normal)



A¼õ 4-2-11

$$\frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{dt}{d\cdot}.\frac{d\cdot}{dt}$$

$$= \frac{d\cdot}{dt}\underline{n}$$

$$= \frac{v}{\circ}\underline{n}$$

$$\underline{a} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\underline{t} + v\left(\frac{v}{\circ}\right)\underline{n}$$

$$= \frac{dv}{dt}\underline{t} + \frac{v^2}{\circ}\underline{n}$$

¬ Ì õ

(4) $\underline{b}$ ±ý Ûõ µÃÄ Ì þÕ¨Áî ¦ºí§¸¡ðÎ ¾¢¨ºÂ¢Â¡ÉÐ (Unit binormal) $\underline{t},\underline{n}$ ¸Ù ì Ì î ¦ºí Ìò¾¡¸×õ, «¾ý§À¡ì Ì $\underline{t},\underline{n},\underline{b}$ ±ýÀ¨Å ´Õ ÅÄôÒÈ Ì È¢ôÀ¢ð¼î Í Ó¨È¨Â ²üÀ¾¡¸×õ ±Î ì¸ôÀÎ õ. «ô¦À¡ØÐ $\underline{t},\underline{n},\underline{b}$ ±ý Ûõ Áü¦È¡Õ Íð¼¨ÁôÒ Ó¨ÈÔõ ¸¢¨¼ì Ì õ.

(5) $\underline{a_t},\underline{a_n}$ ±ýÀÅüÈ¢ý ¦¾¡ ÌÀÂý (Å¨Ç×) ÓÎ ì¸õ $\underline{a}$ ¬ Ìõ. $\underline{a}$ ¬ ÉÐ, $\underline{a_n}$ ¯¼ý ±ý Ûõ §¸¡½ò¨¾ ¾¡í ÌÅ¾¡¸¢ø $\underline{a}$ ý "±ñ Á¾¢ôÒ", "¦ºÂøÀÎ õ ¾¢¨º" ¬ ¸¢ÂÅü¨È.

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v}{\circ}\right)^2}$$

$$\tan \quad = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{v^2}{p}}$$

±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î ¸û Å¨ÃÂÚì¸¢ýÈÉ.

(6) Ð¸û ´Õ §¿÷§¸¡ðÊÂì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇ§À¡Ð $d\cdot = 0$ ¬ Ìõ. ±É§Å

$$\frac{v}{\circ} = \frac{d\cdot}{dt} = 0$$

«¾¡ÅÐ $\circ \to \infty$ ¬ Ìõ

$$\therefore \underline{a_n} = \frac{v^2}{\circ}\underline{n} = 0$$ ¬ Ìõ.

¬¾Ä¡ø $\underline{a} = \underline{a_t} + \underline{a_n}$

$= \underline{a_t}$ ¬ Ìõ.

±É§Å §¿÷ §¸¡ðÊÂì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇ Ð¸Ç¢ý ÓÎì¸õ ÁðÎ§Á «¾ý §¿÷§¸¡ðÎô À¡¨¾Â¢§Ä§Â «¨Á¸¢ÈÐ.

(6a) ´ÕÐ¸û ¾Çò¾¢ø þÂí Ì Å¾¡¸¢ø «¾ý ¦¾ì§¸¡ðÊý ÓÎì¸ì ÜÚ¸ Ùì Ìõ ¯ûÇ ¦¾¡¼÷Ò¸ ¨Ç À¢ý ÅÕÁ¡Ú Å¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

a_x, a_y ±ýÀ¨Å x,y ¾¢¨º¸Ç¢ø ÓÎì¸ò¾¢ý À¸¢÷×¸û. a_t, a_n ±ýÀ¨Å ¦¾¡Î Å¨Ã ¦ºí§¸¡ðÎ ¾¢¨º¸Ç¢ø ÓÎì¸ò¾¢ý பகிர்×¸Ç¡ Ìõ. t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, ´Õ ¾Ç Å¨Ç×ôÀ¡¨¾Â¢ø þÂí Ìõ Ð¸Ç¢ý ÓÎì¸ò¾¢ý þùÅ¢¾ À¸¢÷×¸û.

À¼õ 4.2.12-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨ÁÂðÎõ. «ô§À¡Ð

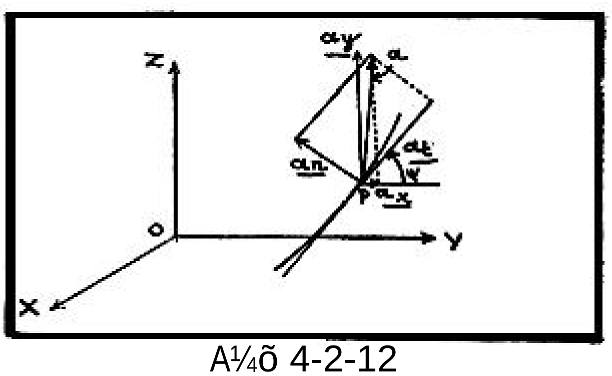
$$a_x = a_t \cos\cdot - a_n \sin\cdot$$

$$a_y = a_t \sin\cdot + a_n \cos\cdot, \qquad \tan\cdot = \frac{dy}{dx}$$

$$a_t = a_x \cos\cdot + a_y \sin\cdot$$

$$a_n = a_y \cos\cdot - a_t \sin\cdot$$

¬ Ìõ.



À¼õ 4-2-12

(7) Ð¸û ´ýÚ Åð¼ò¾¢ÄÂí Ì Å¾¡¸¢ø, «¾ý ÓÎì¸ò¨¾ò ¦¾¡Î Å¨Ã, ¨ÁÂò¨¾ §¿¡ì¸¢Â ¾¢¨º¸Ç¢ø ÜÚ¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸Ä¡õ.

þí Ì $s = r\bar{\ }$

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\bar{\ }}{dt}$$

$$\therefore \underline{a_t} = \frac{dv}{dt}\underline{t}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\right)\underline{t}$$

$$= \ddot{r}\,\underline{t}$$

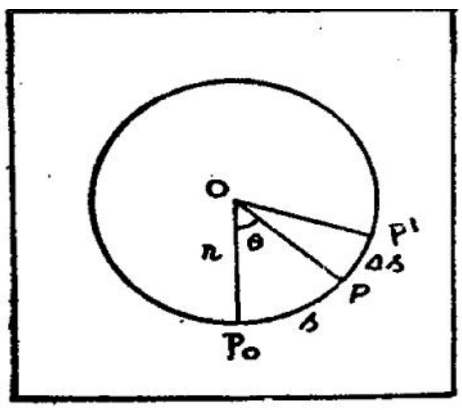
$$\underline{a_n} = \frac{v^2}{\circ}\underline{n}$$

$$= \frac{r^2 \dot{\,}^2}{r}\underline{n}$$

$$= r\dot{\,}^2\underline{n}$$

$$\therefore \underline{a} = \underline{a_t} + \underline{a_n} = \ddot{r}\,\underline{t} + r\dot{\,}^2\underline{n}$$

±É§Å ¦¾¡ÎÅ¨Ãò ¾¢¨ºÂ¢ø ÓÎì¸ò¾¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ $= r\ddot{}$ ±ýÚõ, Åð¼¨ÁÂò¨¾ §¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø ÓÎì¸ò¾¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ $= r\dot{}^2$ ±ýÚõ ¬Ìõ.



À¼õ 4-2-14

(8) Ð¸û º¢Ã¡É §Å¸òÐ¼ý Åð¼ò¨¾ Å¨Ãó¾¡ø v Á¡È¡Ð. ±É§Å $\frac{dv}{dt} = 0$ ¬Ìõ. «ô¦À¡ØÐ ¦¾¡ÎÅ¨Ã ÓÎì¸õ âîº¢ÂÁ¡¸¢ÈÐ. Ð¸û Åð¼¨ÁÂò¨¾ §¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø Áð Îõ¾¡ý ÓÎì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇÐ. ±É§Å ´Õ Ð¸Ç¡ÉÐ ¬¨Ã r ±ýÚ¨¼Â Åð¼õ ´ý¨È Á¡È¡¾ v ±ýÛõ §Å¸òÐ¼ý Å¨Ãó¾¡ø ±ó§¿Ãò¾¢Öõ «¾ý ÓÎì¸õ Åð¼¨ÁÂò¨¾ §¿¡ì¸¢§Â, $\frac{v^2}{r}$ ±ýÛõ «ÇÅ¢ø þÕìÌõ.

4.2.12 Á¡¾¢¡¢ì ¸½ìÌ¸û

4.2.12.1 þÂíÌõ Ð¸û t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø Å¨ÇÅ¨ÃÂ¢ø þÕìÌÁ¢¼ò¨¾ $\underline{r} = 6t^2\underline{i} - 4t\underline{j} + 3\underline{k}$ Á¢. ±ýÛõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. $\underline{v}, \underline{t}, \underline{a_t}, \underline{a_n}$, ° ¬¸¢ÂÅü¨È t=0.25 Å¢ொளÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð ¸¡ñ¸.

$\underline{r} = 6t^2\underline{i} - 4t\underline{j} + 3\underline{k}$

$\underline{v} = \dfrac{dr}{dt} = 12t\underline{i} - 4\underline{j}$

$|\underline{v}|_{t=0.25} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$

$|\underline{v}|_{t=0.25} = \sqrt{9+16} = 5$ Á./Å

$\underline{t} = \dfrac{v}{|\underline{v}|} = 0.6\underline{i} - 0.8\underline{j}$

$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = 12\underline{i}$

$a_t = \underline{a}.\underline{t} = 12\underline{i}.\left(0.6\underline{i} - 0.8\underline{j}\right) = 7.2$ Á./ Å^2

$\underline{a_t} = 7.2\underline{t} = 7.2\left(0.6\underline{i} - 0.8\underline{j}\right) = 4.32\underline{i} - 5.76\underline{j}$

$\underline{a_n} = \underline{a} - \underline{a_t} = 12\underline{i} - \left(4.32\underline{i} - 5.76\underline{j}\right) = 7.68\underline{i} + 5.76\underline{j}$

$|\underline{a_n}| = \sqrt{(7.68)^2 + (5.76)^2} = 9.8$ Á./Å^2

$° = \dfrac{v^2}{|a_n|} = \dfrac{25}{9.8} = 2.6$ ม. 2600 Á.Á.

4.2.12.2 Å¡ôÀÃôÒî ÍÕÇ ´ ýÈý À¡¨¾Âø þÂí Ìõ Ð¸û, t §¿Ãò¾ø $\underline{r} = 4\cos 2t\underline{i} + 4\sin 2t\underline{j} + 6t\underline{k}$ ±ý Ûõ ¿¨Äò¾¨ºÂ¨Âô ¦ÀüÈÕì Ì ¦ÁÉø, §¿Ãõ 1,57 ÅÉ¡Ê ±ý ÚûÇ§À¡Ð $\underline{v}, \underline{t}, \underline{a_t}, \underline{a_n}, °$ ¬¸ÂÅü¨Èì ¸¡ ñ ¸.

$\underline{r} = 4\cos 2t\underline{i} + 4\sin 2t\underline{j} + 6t\underline{k}$ Á.

$\dot{\underline{r}} = -8\sin 2t\underline{i} + 8\cos 2t\underline{j} + 6\underline{k}$ Á./Å.

$\ddot{\underline{r}} = -16\cos 2t\underline{i} - 16\sin 2t\underline{j}$ Á./Å^2

$|\underline{v}|_{t=1.57} = -\left(8\sin 3.14\right)\underline{i} + \left(8\cos 3.14\right)\underline{j} + 6\underline{k} = 8\underline{j} + 6\underline{k}$

$|\underline{v}|_{t=1.57} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ Á./Å

$\underline{t} = \dfrac{v}{|\underline{v}|} = 0.8\underline{j} + 0.6\underline{k}$

$|\underline{a}|_{t=1.57} = |\ddot{\underline{r}}|_{t=1.57} = -16\underline{i}$ Á./Å^2

$\underline{a_t} = \underline{a}.\underline{t} = \left(-16\underline{i}\right).\left(0.8\underline{j} + 0.6\underline{k}\right) = 0$

$\underline{a_n} = \underline{a} - \underline{a_t} = -16\underline{i} - 0 = -16\underline{i}$

$|\underline{a_n}| = 16$ Á./Å^2

$° = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{100}{16} = 6.25$ Á. 6250 Á.Á.

4.2.12.3 ´Õ Ð¸û µöÅ¢Ä¢ÕóÐ ÐÅí¸¢ 10¦º.Á¦. ¬¨ÃÔûÇ Åð¼ò¾¢ø §¿Ãò¾¢ý §¿÷Å¢¸¢¾ò¨¾ô ¦ÀüÈ §Å¸ò¾¢ø þÂí Ì¸¢ÈÐ. «Ð Åð¼ò¨¾ ´ÕÓ¨È ÍüÈ 2Å¢É¡Ê¸û ±Î òÐì¦¸¡ûÅ¾¡É¡ø ã ýÚÅÐ Å¢É¡Êì Ì ô À¢È Ì «òÐ¸Ç¢ý ¦¾¡ Î Å ¨Ã Ó Î ì ¸õ, ¨ÁÂõ §¿¡ì ¸¢Â Ó Î ì ¸õ, ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒì ¸ ¨Çì ¸¡ ñ ¸.

v = kt

$\underline{v} = kt\underline{I},\ \underline{I}$ ±ýÀÐ ¦¾¡ Î Å ¨Ãò¾¢ ¨ º ¨ Â Å ¨ÃÂÚì Ì õ µÃÄ Ìò¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ Ì õ.

$a_t = \frac{dv}{dt} = k$

$s = \int ktdt = \frac{k}{2}t^2 + c,\ t = 0$ ±ý Úû Ç§À¡Ð, s=0. $\therefore c = 0$ ±É§Å $s = \frac{k}{2}t^2$

§¿Ãõ 2 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð $s - 2® \times 10 = \frac{k}{2} \times 4$

$\therefore k = 10®$

$\therefore v = 10®t$ ¦º.Á¦./ Å¢.

$\therefore a_t = k = 10® = 31.4$ ¦º.Á¦./ Å¢^{2}. = 0.314 Á¦./ Å¢^{2}.

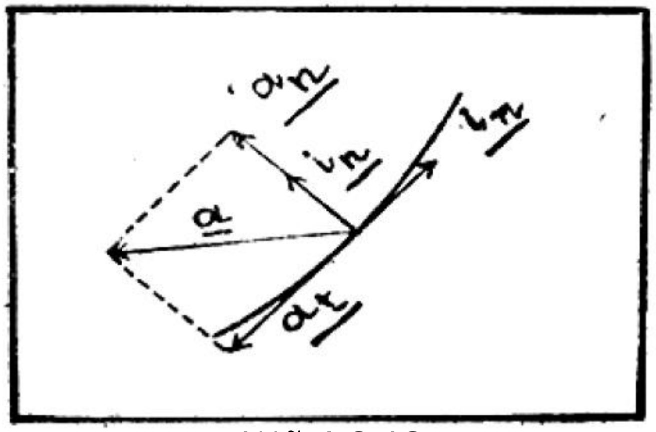
$\left|\underline{a_n}\right| = \frac{n^2}{°} = \frac{100®^2 \times 4}{10} = 40®^2 = 0.887$ Á¦./ Å¢^{2}.

4.2.12.4 Ò¨¸Å ñ Ê ´ýÚ Å¨Ç×ôÀ¡ ¨¾Â¢ø Å¨ÇÅ¨Ã 1000Á¦ ¯ûÇ þ¼ò¾¢ø Á½¢ì Ì 144¸¢.Á¦ §Å¸ò¾¢ø ¦ºýÚ ¦¸¡ñ ÊÕì Ì õ §¿Ãò¾¢ø, ¾¢Ë¦ÃÉ À¢§Ãì Ì ¸û §À¡¼ôÀð Î Ò¨¸Å ñ ÊÂ¡ÉÐ ºÃ¡ÈÅ¾ò¾¢ø ¦ÁøÄ þÂí Ì¸¢ÈÐ. 6 Å¢É¡Ê¸Ùì Ì ô À¢È Ì Ò¨¸Å ñ ÊÂ¢ý §Å¸Á¡ÉÐ, Á½¢ì Ì 96¸¢.Á¦ ¬¸ì Ì ¨Èó¾¡ø À¢§Ãì Ì ¸û §À¡¼ôÀð¼ ¾Õ½ò¾¢ø Ò¨¸Å ñ ÊÂ¢ý Ó Î ì ¸ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.

§Å¸õ Á½¢ì Ì 144¸¢.Á¦ ±É¢ø Å¢É¡Êì Ì §Å¸õ 40Á¦ ¬ Ì õ. «Ð§À¡Ä§Å §Å¸õ Á½¢ì Ì 96¸¢.Á¦ ±É¢ø Å¢É¡Êì Ì 80/3Á¦ ¬ Ì õ. Ò¨¸Å ñ Ê ºÃ¡É Å¾ò¾¢ø (constant rate) ¦ÁøÄî ¦ºøÅ¾¡ø

a_t = ºÃ¡º¡¢ Ó Î ì ¸õ = $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{80}{3} - 40}{6} = -2.2$ Á¦./ Å¢^{2}

$a_n = \frac{v^2}{°} = \frac{40 \times 40}{1000} = 1.6$ Å¢/Á¦^{2}



À¼õ 4-2-13

¦¾¡ Î Å ¨Ã Ó Î ì ¸õ, Ð ¸ û þÂ í Ì õ ¾¢ ¨ º ì Ì ±¾¢÷¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂøÀ Î Å¾¡ø, À¼ò¾¢ø (4.2.13) ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, $\underline{a_n}, \underline{a_t}$ ± ý À ¨ Å ¸ û $\underline{a}$ ± ý Û õ Å¢ ¨ Ç× Ó Î ì ¸ ò ¨ ¾ Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ. Å¢ ¨ Ç× Ó Î ì ¸ õ ¦ º í Ì òÐ (Normal) ¾¢ ¨ ºÔ¼ ý β ± ý Û õ §¸ ¡ ½ ò ¨ ¾ « ¨ Áò¾¡ø,

$$\tan \quad = \left|\frac{a_t}{a_n}\right| = \frac{2.2}{1.6} = 1.375$$

± É §Å $\quad = 53^{\circ}598'$ ¬ Ì õ.

$$a = \frac{a_n}{\cos} = \frac{1.6}{\cos 53°58'} = \frac{1.6}{0.5901} = 2.27 \text{Á¦./Å¢}^2$$

± É §Å ô ¨ ¸ Å ñ ÊÂ¢ ý Å¢ ¨ Ç× Ó Î ì ¸ò¾¢ ý ± ñ Á¾¢ôÒ 2.27 Á¦./Å¢². ¬ Ì õ. « Ð ¦ º í Ì òÐò ¾¢ ¨ ºÔ¼ ý $53^{\circ}58'$ ± ý Û õ §¸ ¡ ½ ò ¨ ¾ « ¨ Áó¾Å ñ ½ õ À¼õ 4.2.13-ø ¸¡ðÊÂ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂøÀ Î õ.

4.2.12.5 ¦¿ Î ï º¡ ¨ Ä ´ ý Ú Å ¨ ÇÔÁ¢¼ò¾¢ø, Á ½ ¢ì Ì 108 ¸¢.Á¦. §Å ¸ò¾¢ø ¦ºøÖõ µ÷ ¯óÐÅ ñ ÊÂ¢ ý ¨ ÁÂ§¿¡ì ¸¢Â Ó Î ì ¸ õ 3 Á¦./Å¢². ± ý È « Ç× ì Ì Å¢ Ì ¾¢ôÀ¼¡ÁÄ¢Õ ì ¸ ²üÈ¾¡ É Á¢ ¸ î º¢È¢Â Å ¨ ÇÂ¡ ¨ ÃÂ¢ ý ¿¦Çò ¨ ¾ì ¸ ¡ ñ ¸.

$$° = \frac{v^2}{a_n} = \frac{108\times108\times10^3\times10^3}{60\times60\times60\times60\times3} = 300 \text{ Á¦.}$$

4.2.12.6 ¦¿ Î ï º¡ ¨ Ä ´ ý Ú Å ¨ ÇÔÁ¢¼õ 200Á¦ ¿¦ÇÓ û Ç Å ¨ ÇÂ¡ ¨ Ã ¨ Âô ¦ÀüÚ û ÇÐ. « ùÅ¢¼ò¾¢ ý ÅÆ¢§Â ´ Õ §ÀÕóÐÅ ñ Ê Á ½ ¢ì Ì 72 ¸¢.Á¦ §Å ¸ò¾¢ø ¦ º ý È¡ø ¯óÐÅ ñ ÊÂ¢ ý ¨ ÁÂ§¿¡ì ¸¢Â Ó Î ì ¸ ò ¨ ¾ì ¸ ¡ ñ ¸. « ¨ ¾ô§À¡ø þÕÁ¼í Ì û Ç Ó Î ì ¸ ò ¨ ¾ ¯óÐÅ ñ Ê ¨ ÁÂ§¿¡ì ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ÀÈ §Å ñ Î Á¡ ¸¢ø « ¾ý§Å ¸õ ±ùÅÇ× þÕ ì ¸ §Å ñ Î ¦Á ýÀ ¨ ¾Ôõ ¸ ¡ ñ ¸.

þ í Ì $° = 200$ Á¦. $v = \frac{72\times1000}{60\times60} = 20$ Á¦.

± É §Å $a_n = \frac{v^2}{°} = \frac{20\times20}{200} = 2$ Á¦./ Å¢²

$A_n = 2a_n = 4$ Á/Å^2 ±É¢ø

$\therefore v = 20\sqrt{2}$ Á/Å^2 « øÄÐ $72\sqrt{2}$ ¸¢.Á./ Á½¢

4.2.12.7 ¬ ¸¡ÂÅ¢Á¡Éõ ´ ý ¨Èô À¡¢§º¡¾ ¨É ì Ì ¯ðÀ Î òÐõ§À¡Ð, «¾ý ¨ÁÂ§¿¡ì ¢Â Ó Î ì ¸õ 8gÁ/ Å¢^{2} (g = 9.8 Á/Å¢^{2}) ±ýÈ¢Õì ¸ Å¢ÕõÀôÀð¼Ð. Å¢Á¡É¢ Á½¢ì Ì 2520 ¸¢.Á §Å¸ò¾¢ø ¦ºøÖÅ¾¡¸¢ø Å¢Á¡Éõ þÂí Ìõ Åð¼ôÀ¡¨¾Â¢ý Å ¨ÇÅ¡¨Ã ¨Âì ¸¡ ñ ¸.

þ í Ì $v = \frac{2520 \times 1000}{60 \times 60} = 700$ Á./Å¢

$a_n = 8g = 8 \times 9.8 = 78.4$ Á./Å¢^{2}

$° = \frac{v^2}{a_n} = \frac{700 \times 700}{78.4} = 6250$ Á.

4.2.13 §¿÷§¸¡ðÊÂì ¸Å¢Âø (Rectilinear kinematics)

ÀÃó¾¦ÅÇ¢Â¢ø Å ¨ÇÅ ¨ÃÂ¢Ä¢Â í Ìõ Ð¸Ç¢ý þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢, ¾¢ ¨º§Å¸õ Ó Î ì ¸õ, ¬¸¢ÂÅü¨È Å ¨ÃÂÚì Ìõ ¾¢ ¨ºÂ¢¸û ¦Åù§ÅÈ¡É ¾¢ ¨º¸ ¨Ç ¦À¡ÐÅ¡¸ô ¦ÀÈò¾ì ¸ ¨ÅÂ¡ Ìõ. ¬É¡ø Ð¸Ç¢ý þÂì ¸õ ´Õ §¿÷ì§¸¡ðÊÄ¢Õì Ì§Á¦ÂÉ¢ø ÌÈ¢ôÀ¡¸ x «î º¢ø « ¨ÁÔ¦ÁÉ¢ø Ð¸Ç¢ý ¿¢ ¨Ä ¨Â «È¢Å¢ì Ìõ. ¿¢ ¨Äò¾¢ ¨ºÂ¢, «¾ý ¾¢ ¨º§Å¸õ, Ó Î ì ¸õ ¬¸¢Â ¨Å Ó ¨È§Â $\underline{r} = x\underline{i}, \underline{v} = \dot{x}\underline{i} = \pm v\underline{i}, \underline{a} = \ddot{x}\underline{i} = \pm a\underline{i}$ ¬ Ìõ.

þ í Ì v,a ±ýÀ ¨Å ± ñ Á¾¢ôÒ¸ ¨Ç Áð Î§Á ¦ÀüÈ¢Õô¾¡ø « ¨Å¸û Á¢ ¨¸ ± ñ ¸ ¨Çì Ì ÈÈ¢ì ¸¢ýÈÉ, ¬É¡ø tø, x ý Å ¨¸ì¦¸Øì ¸¡É $\dot{x}, \ddot{x}$ ±ýÀ ¨Å¸û Á¢ ¨¸Â¡¸§Å¡ «øÄÐ Ì ¨ÈÅ¡¸§Å¡ þÕì ¸ìÜ Îõ. ¬¸§Å¾¡ý ¾¢ ¨º§Å¸õ, Ó Î ì ¸õ ¬¸¢ÂÅü¨È «È¢Å¢ì Ìõ§À¡Ð " + " «øÄÐ " - " ÌÈ¢Â¡ÉÐ v,a¸ Ù¼ý À¢ ¨½ì ¸ôÀð Î ûÇÐ.

§¿÷ì§¸¡ðÊÂì ¸ò ¨¾ô ¦ÀüÚûÇ Ð¸ Ù ì Ì $(\dot{x}, v), (\ddot{x}, a)$ ¸ Ù ì Ì ¯ûÇ §ÅÚÀ¡ Î ¸û ÌÈ¢¸ ¨Çô ¦À¡ÚòÐûÇ¾¡ø ¦À¡ÐÅ¡¸, Ì ¨Èò¾ü ÌÈ¢ ("-") ¾Å¢÷ì ¸ôÀ Î õ. Ð¸û x «î º¢ý Á¢ ¨¸ò¾¢ ¨ºÂ¢ø þÂí Ì¦ÁÉ¢ø v,a ±ýÀ ¨Å¸û Á¢ ¨¸ì ¸½¢Âí ¸Ç¡¸×õ «Ð x«î º¢ý Ì ¨È ¾¢ ¨ºÂ¢Ä¢Âí Ìõ§À¡Ð «Åü ¨Èì Ì ¨Èì ¸½¢Âí ¸¡¸×õ ¦¸¡ûÇôÀ Î õ.

¯§ÁÖõ §¿÷ì§¸¡ðÊÂì ¸ò¾¢ø ¾¢ ¨º¡ÉÐ Å ¨ÇÅ ¨Ã þÂì ¸ò¾¢ø ¯ûÇ ¨¾ô§À¡ø «ùÅÇ× º¢Èô¦À ¨Çô ¦ÀÈ¡¾¡ø ¾¢ ¨º¢Â¢î ºÁýÀ¡ Î ¸û ¾Å¢÷ì ¸ôÀð Î ± ñ ½¢î ºÁýÀ¡ Î ¸û Å¡Â¢Ä¡¸§Å §¿÷¸§¸¡ðÊÂì ¸õ Å ¨ÃÂÚì ¸ôÀ Î õ. ±É§Å

$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$ ±ýÚõ

Ñ ñ ¸ ½¢¾Â º í ¸¢Ä¢ò¦¾¡¼÷ Å ¨¸ì¦¸Ø Å¢¾¢ôÀÊ

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v = v\frac{dv}{dx}$

±ýÚõ ¯ûÇ ± ñ ½¢î ºÁýÀ¡ Î ¸ ¨Ç §¿÷§¸¡ðÊÂì ¸ò¾¢ü Ì ô ÀÂýÀ Î ò¾ôÀ Î õ.

þõ ã ýÚ ºÁýÀ¡Î¸Ç¢Öõ v,a ±ýÀ¨Å¸¨Çò §¾¨Åì Ì ²üÈÅ¡È t «øÄ¡¾ x ý º¡÷ÀÄÉ¡ì ¸Õ¾¢ ¦¾¡¨¸Â¢¼ø (integration) Ó¨È¨Âì ¦¸¡ñÎ §¿÷§¸¡ðÊÂì¸ì¸ ½ìÌ¸Ùì Ìò ¾¢÷× ¸¡½Ä¡õ.
¿¨¼Ó¨ÈÂ¢ø ¦¾¡¼ì¸ §¿Ãò¨¾ $t_\circ$ ±ýÚõ «ó§¿Ãò¾¢ø x,v,a¸Ç¢ý Á¾¢ôÒ¸¨Ç Ó¨È§Â $x_\circ, v_\circ, a_\circ$ ±ýÚõ ÌÈ¢ôÀÐ ÅÆì¸õ.

±É§Å §¿÷ì§¸¡ðÊÂì¸ò¨¾ô ¦ÀüÈ Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä¨Â «È¢Â À¢ýÅÕõ ºÁýÀ¡Î¸û ¯¾×¸¢ýÈÉ. «¨Å¸û

$$dx = v(t)dt \quad \text{«øÄÐ} \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \quad \text{«øÄÐ} \quad \int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$$

$$dv = a(t)dt \quad \text{«øÄÐ} \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$dt = \frac{dv}{a(v)} \quad \text{«øÄÐ} \quad \int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dv}{a(v)}$$

$$vdv = a(x)dx \quad \text{«øÄÐ} \quad \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx$$

$$dx = \frac{vdv}{a(v)} \quad \text{«øÄÐ} \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{a(v)}$$

¬Ìõ.
(ÌÈ¢ôÒ §¿÷ì§¸¡ðÊÄ¢Âí Ì¸¢ýÈ Ð¸û º¡É Ó Îì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇ§À¡Ð §ÁüÜÈ¢Â ¦¾¡¨¸Â¢¼ø ºÁýÀ¡Î¸û ±Ç¢¾¡É «¨Áô¨Å¦ÀÚõ.)

4.2.13.1 [´Õ §¿÷§¸¡ðÊø º¡É Ó Îì¸òÐ¼ý þÂíÌõ Ð¸Ç¢ý þÂì¸Å¢Âø ºÁýÀ¡Î¸û]

´Õ §¿÷§¸¡ðÊÄ¢Âí Ìõ Ð¸¡ÉÐ t=0 ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø ¦¾¡¼ì¸ô ÒûÇ¢Â¢ø ¾¢¨º§Å¸õ u_o ¯¼ý ÒÈôÀðÎò ¾ÉÐ þÂì¸Å¢¨º¢§Ä§Â f ±ýÛõ ´Õ º¡É Ó Îì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇ¾¡Ì¸. t ±ýÛõ §¿ÃÓÊÅ¢ø «¾ý ¾¢¨º§Å¸õ v ¬¸×õ «Ð ÒÈôÀð¼ þ¼ò¾¢ÄâÕóÐ ¦ºýÈ ¦¾¡¨Ä× s ¬¸×ÁÔó¾¡ø

$$v = v_0 + ft$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} ft^2$$

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2fs$$

±ýÛõ þÂì¸î ºÁýÀ¡Î¸¨Çô À¢ýÅÕÁ¡Ú ¦ÀÈÄ¡õ.

t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø §¿÷ì§¸¡ðÊÄ¢ÂíÌõ Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ, Ó Îì¸õ ¬¸¢Â¨Å Ó¨È§Â

$$\frac{ds}{dt} = v; \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = f$$ ¬ Ì õ.

þ í Ì $\frac{dv}{dt} = f$ ± ý À ¨ ¾ ¦¾¡ ¨ ¸Â¢ Î õ§À¡Ð

$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_{0}^{t} f dt$$

$$v - v_0 = f \int_{0}^{t} dt = ft$$

« øÄÐ $v = v_0 + ft$ ¬ Ì õ.

« ùÅ¡§È $\frac{ds}{dt} = v = v_0 + ft$ ± ý À ¨ ¾ ¦¾¡ ¨ ¸Â¢ Î õ§À¡Ð

$$\int_{0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (v_0 + ft) dt$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} ft^2$$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ $\frac{vdv}{ds} = f$ ± ý À¾¢ ý ¦¾¡ ¨ ¸ ¨ Â ì ¸ ¡ Ï õ§À¡Ð

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{0}^{s} fds$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{{v_0}^2}{2} = fs$$ ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î ¸¢ ¨ ¼ì ¸¢ÈÐ,

$$v^2 = {v_0}^2 + 2fs$$

þ õ ã ý Úõ §¿÷ì§¸¡ðÊÂÄ¢Â í Ì õ Ð ¸Ç¢ ý þÂ ì ¸Å¢Âø ºÁ ý À¡ Î ¸ Ç¡ Ì õ. þÂ í Ì õ Ð ¸ û t=0 ± ý Û õ §¿Ãò¾¢ø µöÅ¢Ä¢ÕóÐ ÒÈôÀð¼¡ø þ î ºÁ ý À¡ Î ¸ û Ó ¨ È§Â $v = ft, s = \frac{1}{2} ft^2, v^2 = 2fs$ ± ý È¡ Ì õ.

4.2.13.2 ¾¡ É ¡ ¸§Å ÒÅ¢ ¨ Â§¿¡ ì ¸¢ Å¢Øõ ¦À¡Õû ¸Ç¢ ý Ó Î ì ¸ õ (Acceleration of freely falling bodies towards the earth)

´Õ ¦À¡ÕÇ¡ É Ð ¦ÅüÈ¢¼ò¾¢ø ÒÅ¢ ¨ Â§¿¡ ì ¸¢ Å¢ØõÀÊ î ¦ºö¾¡ø « Ð ÒÅ¢Â¢ ý µ¡¢¼ò¾¢ø ±ô¦À¡ØÐõ ´§Ã « Ç× û Ç¾¡ É ´Õ Ó Î ì¸òÐ¼ý þÂ í Ì ¦ÁÉ À¡¢§º¡¾ ¨ É ¸Ç¢ ý Å¡ÂÄ¡ ¸ «È¢Â Ó Ê ¸¢ÈÐ. þ ùÅ¢¾ Ó Î ì ¸ õ «ô¦À¡ÕÇ¢ ý ¨ Ç ô ÒÅ¢Â¡ É Ð ¾ ý ¨ ÉÂ¨ Â ¨ ¾ §¿¡ ì ¸¢ ®÷ôÀ¾¡ø ²üÀ Î Å¾¡ Ì õ, ± É §Å þÐ ÒÅ¢Â¢÷ôÒ Å¢ ¨ º Â¡ø ²üÀ Î õ Ó Î ì ¸ õ (Acceleration due to gravity) ± É ì Ü È ôÀ Î õ. þ ùÅ¢¾ Ó Î ì ¸ õ "g "± ý Û õ ±Øò¾¡ø Ì È¢ì ¸ôÀ Î õ.

g Â¢ ý Á¾¢ôÒ ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ þ¼ò¾¢ø ±ô¦À¡ØÙ ì Ì õ ´§Ã « Ç× û Ç¾¡ ¸ þÕ ì ¸¢ÈÐ. ¬ É ¡ø « ¾ ý Á¾¢ôÒ ÒÅ¢Â¢ ý §ÁüÀÃôÀ¢ø þ¼ò¾¢ü¸¢¼õ ºÈ¢Ð « ÇÅ¢ø Á¡ÚÀ Î õ. ÒÅ¢Â¢ ý ¿ Î Å ¨ Ã (Equator)ì Ì « Õ ¸¢ø « ¾ ý Á¾¢ôÒ Á¢ ¸ì Ì ¨ ÈÅ¡ ¸ ×õ ÐÕÅ í ¸ Ù ì Ì (poles) « Õ§¸ Á¢ ¸Á¢ ¸ « ¾¢ ¸Á¡ ¸ ×õ þÕ ì ¸¢ÈÐ.

¦À¡ÐÅ¡¸ gÂ¢ý Á¾¢ôÒ ¦Áð¡¢ì “C.G.S” Ó¨ÈÂ¢ø 981 ¦º.Á£/Å¢^{2} ±ýÚõ “M.K.S.” Ó¨ÈÂ¢ø 9.81.Á£ Å¢^{2} ±ýÚõ À¢¡¢ð¼ý “F.P.S” Ó¨ÈÂ¢ø 32.2«/ Å¢^{2} ±ýÚõ ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

4.2.13.3 ÒÅ¢Â£ôÀ¢ý ¸£ú§¿¡ì¸¢Âì Ìò¾¢Âì¸õ (vertical motion under gravity)

´Õ ¦À¡Õû $v_\circ$ ±ýÛõ §Å¸ò¾¢ø §¿Ã¡¸ì ¸£ú§¿¡ì¸¢ ±È¢ÂôÀð¼¡ø þÂì¸Å¢Âø ºÁýÀ¡Î¸û

$$v = v_0 - gt$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = {v_0}^2 - 2gs$$

±ýÈ¡Ìõ.

´Õ ¦À¡Õ¨Çò ¾¡É¡¸§Å ¸£ú§¿¡ì¸¢ Å¢ØõÀÊ ´ØÅ¢ð¼¡ø þÂì¸ þÂø ºÁýÀ¡Î¸û.

$$v = gt$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

$v^2 = 2gs$ ±ýÈ¡Ìõ.

4.2.13.4 ÒÅ¢Â£ôÀ¢ý ¾¢¨ºìÌ ±¾¢Ã¡É §Áø§¿¡ì¸¢Â Ìòо¢¨ºÂ¢Âì¸õ (vertical motion against gravity)

´Õ ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ §Áø§¿¡ì¸¢Â ¿¢¨Äì ÌòÐ ¾¢¨ºÂ¢ $v_\circ$ ±ýÛõ §Å¸ò¾¢ø ±È¢ÂôÀð¼¡ø,

$$v = v_0 - gt$$

$$s = {v_0}^t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = {v_0}^2 - 2gs$$

±ýÛõ þÂì¸Å¢Âø ºÁýÀ¡Î¸û ¸¢¨¼ì¸¢ýÈÉ.

þùÅ¢Âì¸ò¾¢ø ¦À¡Õ¨Çô ÒÅ¢Â£ôÒì ¸Å÷î¢º Å¢¨º ¸£ú§¿¡ì¸¢ þØôÀ¾¡ø $t = \frac{v_\circ}{g}$ ±ýÛõ§À¡Ð ¦À¡Õû «ì¸ ½ò¾¢ø µöÅ¢Ä¢Õì¸¢ÈÐ. À¢È Ì «Ð ÒÅ¢Â£ôÒ Ó Îì¸ò¾¡ø Åó¾ ÅÆ¢§Â ÒÅ¢¨Â §¿¡ì¸¢ò ¾¢ÕõÒ¸¢ÈÐ.

§ÁÖõ ¦À¡Õû Ì È¢ôÀ¢ð¼ h ±ýÛõ ¯ÂÃò¨¾ «¨¼Ôõ §¿Ãõ $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ ±ýÛõ ºÁýÀ¡¼¨¼ò ¾£÷× ¸¡ Ï õ§À¡Ð ¸¢¨¼ì¸ôÀÎõ, þîºÁýÀ¡Î tø þÕÀÊÂ¡¸ ¯ûÇ¾¡ø þ¾üÌ þÕÁ¢¨¸Â¡É Á¾¢ôÒûÇ ãÄí¸û ¯ûÇÉ. Ì¨Èó¾ ãÄõ «ô¦À¡ÕÇ¡ÉÐ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¯ÂÃò¨¾ §Áø §¿¡ì¸¢ þÂí Ìõ§À¡Ð «¨¼Â ±ÎòÐì¦¸¡ ñ¼ §¿Ãò¨¾Ôõ ÜÊÂ «øÄÐ ¦À¡¢Â ãÄõ

¸¦ú§¿¡ì¸¦ þÂíÌõ§À¡Ð «ù×ÂÃò¨¾ «¨¼Â ±ÎòÐì¦¸¡ñ¼ §¿Ãò¨¾Ôõ ¾Õ¸¢ýÈÉ.

§Áø§¿¡ì¸¦ ±È¢ó¾ ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ Á¢¸¯Â÷ó¾ ÒûÇ¢¨Â ±öÐõ§À¡Ð ÓÊ× §Å¸õ âîº¢ÂÁ¡Ìõ ±ýÀ¾¡ø «Ð ¦ºýÈ Á¢¸ô¦À¡¢Â ¦ºíÌòÐò¦¾¡¨Ä× $\frac{v_0^2}{2g}$ ¬Ìõ.

4.2.14 Á¡¾¢¡¢ì ¸½ì¸Ì ¸û

4.2.14.1 ´Õ §¿÷§¸¡ðÊÄ¢Âí Ìõ Ð¸û ´ýÚ t ÅÉ¡ÊÂ¢ø 0 ±ýÛõ ÐÅì¸ôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ $s=t^3-6t^2+15t+40$ ±ýÛõ ¦¾¡¨Ä¨Åô¦ÀüÚûÇ¾¡¸¢ø (a) «¾ý§Å¸õ ±ó§¿Ãí¸Ç¢ø âîº¢ÂÁ¡Ìõ, (b) 5 Å¢É¡Ê¸Ç¢ø ¸¼ó¾ ¦¾¡¨Å× (c) t=5 Å¢É¡ÊÂ¡¸¯ûÇ§À¡Ð «¾ý Ó Îì¸õ ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ñ¸.

þíÌ $s=t^3-6t^2+15t+40\left\{\left[10^{-2}\right]\text{Á¦}\right\}$

$$s=\frac{ds}{dt}=3t^2-12t+15\left\{\left[10^{-2}\right]\text{Á¦}\right\}$$

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=6t-12\left\{\left[10^{-2}\right]\text{Á¦}\right\}$$

v=0 ±ýÈ¢Õì¸

$3t^2-12t+15=0$ ¬Ìõ

$t=-1$ «øÄÐ t=5 Å¢ ±ýÚûÇ§À¡Ð §Å¸õ âîº¢ÂÁ¡Ìõ,

$$s_5=|s|_{t=5}=125-6\times25+15\times5+40=-60\left\{\left[10^{-2}\right]\text{Á¦}\right\}$$

$$s_0=|s|_{t=0}=40\ \left\{\left[10^{-2}\right]\text{Á¦}\right\}$$

±É§Å 5 Å¢É¡Ê¸Ç¢ø ¦ºýÈ ¦¾¡¨Ä×

$s_5=s_o=-100$ ¦º.Á¦ ¬Ìõ

$$|a|_{t=5}=6\times5-12=18\left\{\left[10^{-2}\right]\text{Á¦}/\text{Å¢}\right\}$$

4.2.14.2 ´Õ Ð¸û x «îº¢ø $v=\frac{x^2}{2}$ ±ýÛõ §Å¸ò¾¢ø þÂíÌ¸¢ÈÐ. §¿Ãõ t=0 Å¢É¡Ê ±ýÚûÇ§À¡Ð «Ð x=1Á¦ ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ÖûÇÐ. «Ð x=2000 Á¢.Á¦ ±ýÛÁ¢¼ò¨¾ «¨¼Â ±ÎòÐì¦¸¡ûÙõ §¿Ãò¨¾Ôõ «ùÅ¢¼ò¾¢ø «¾ý Ó Îì¸ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸

$$\frac{dx}{dt}=v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^t dt=\to\int_t^2\frac{2}{x^2}dx$$

$$t=2\left(\frac{-1}{x}\right)=1\text{Å¢}$$

$$a = \frac{vdv}{dx}$$

$$= \frac{x^2}{2} \times x = \frac{x^3}{2}$$

$$a\big|_{x=2} = \frac{8}{2} = 4$$ Á£/ Å¢²

4.2.14.3 ´Õ Ð¸û x« îº¢ø $v = 0.6x + 0.9$ மீ./வி ±ýÛõ ¿¢Â¾¢ìÌðÀðÎ þÂíÌ¸¢ÈÐ. «Ð ¦¾¡¼ì¸ôÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â þÂíÌõ§À¡Ð «¾ý ÓÎì¸õ Â¡Ð? ¦¾¡¼ì¸ôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ x=4.05 மீ. ±ýÈ ¦¾¡¨ÄÅ¢Ä¨ÁÔõ ÒûÇ¢ìÌî ¦ºøÄ, «Ð ±ÎòÐì¦¸¡ûÙõ §¿Ãõ Â¡Ð?

þíÌ

$$v = 0.6x + 0.9$$ Á£/Å¢

$$a = \frac{vdv}{dx} = (0.6x + 0.9)(0.6)$$

$$= 0.36x + 0.54$$

$$a\big|_{x=0} = 0.54$$ Á£/Å¢²

¬Ìõ.

§ÁÖõ

$$\frac{dx}{dt} = v = 0.6x + 0.9$$

$$\therefore \int_0^t dt = \int_0^{4.05} \frac{dx}{0.6 + 0.9}$$

$$t = \frac{1}{0.6}\left[\log_e(0.6x + 0.9)\right]_0^{4.05}$$

$$= \frac{5}{3}\log_e\left(\frac{11}{3}\right)$$ வி

4.2.14.4 ÅÇ¢Á ñ¼Äò¾¢ý ÅÆ¢Â¡¸ Å¢Øõ Ð¸û, $a = g\left(1 - k^2v^2\right)$ ±ýÛõ ÓÎì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇÐ. t = 0 ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø s = 0 ±ýÚûÇ þ¼ò¾¢ø, Ð¸û µöÅ¢Ä¢ÕóÐ þÂíÌÅ¾¡¸¢ø

(i) t §¿Ãò¾¢ü Ìô À¢ÈÌ «¾ý §Å¸õ

$$v = \frac{1}{k}\tanh\left(\frac{gt}{k}\right)$$ ±ýÚõ

(ii) Ð¸û s ¦¾¡¨ÄÅ¢ÖûÇ§À¡Ð sìÌõ, vìÌõ ¯ûÇ ¯È×

$$v^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 - e^{-2k^2gs}\right)$$ ±ýÚõ ¿¢Ú×¸

(iii)Ð¸Ç¦ý ±ø¨Ä «øÄÐ þÚ¾¦§Å¸õ (limiting velocity) Â¡Ð?

$$\frac{dv}{dt} = a = g\left(1-k^2v^2\right)$$

$$\int_{t=0}^{t} g\,dt = \int_0^v \frac{dv}{1-k^2v^2}$$

$$gt = \frac{1}{k^2}\int_0^v \frac{dv}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 - v^2}$$

$$= \frac{1}{k^2}\cdot\frac{k}{2}\left[\log\left(\frac{\frac{1}{k}+v}{\frac{1}{k}-v}\right)\right]_0^v$$

$$= \frac{1}{2k}\log\left(\frac{\frac{1}{k}+v}{\frac{1}{k}-v}\right)$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{k}+v}{\frac{1}{k}-v} = e^{2kgt}$$

$$v = \frac{1}{k}\left\{\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1}\right\}$$

$$v = \frac{1}{k}\tanh\left(2kgt\right)$$ ¬ Ìõ.

$$\frac{vdv}{ds} = a = g\left(1-k^2v^2\right)$$

$$\int_0^v \frac{vdv}{1-k^2v^2} = gs$$

$$\log\left(1-k^2v^2\right) = -2k^2g.s$$

«¾¡ÅÐ $1-k^2v^2 = e^{-2k^2g.s}$

«øÄÐ $v^2 = \frac{1}{k^2}\left(1-e^{-2k^2g.s}\right)$ ¬ Ìõ.

§¿Ãõ, $t\to\infty$ ±ýÈ¡ Ìõ §À¡Ð Ð¸û ¦ÀÚõ §Å¸õ ±ø¨Ä §Å¸õ ±ÉôÀÎõ. ±É§Å Ð¸Ç¦ý þÚ¾¦Â¡É §Å¸Á¡ÉÐ

$$v_{\text{±ø¨Ä}} = \text{±ø¨Ä}_{t\to 0}\frac{1}{k}\left\{\frac{e^{2kgt-1}}{e^{2kgt+1}}\right\}$$

$$\frac{1}{k}\ \text{±ø¨Ä}_{t\to 0}\left\{\frac{1-e^{-2kgt}}{1+e^{-2kgt}}\right\}$$

$$=\frac{1}{k}\times 1$$

$$=\frac{1}{k}$$

4.2.14.5 ÒÅ¢¨Â§¿¡ì¸¢ Å¢Øõ Ð¸Ç¢ý Ó Î ì¸ò¨¾ «Ð ÒÅ¢Â¢ý ¨ÁÂò¾¢Ä¢ÕóÐ ±ý Ûõ ¦¾¡¨ÄÅ¢Ö ûÇ§À¡Ð

$a=-\frac{gR^2}{r^2}$,±ý Ûõ ºÁýÀ¡Î Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ.

þí Ì g,R ±ýÀ¨Å ÒÅ¢ôÀÃôÀ¢ý §Áø ÒÅ¢Â÷ôÒ Ó Î ì¸Óõ ÒÅ¢Â¢ý ¬¨ÃÔÁ¡ Ìõ. ÒÅ¢ôÀÃôÀ¢Ä¢ÕóÐ Ð¸û ±ó¾§Å¸òÐ¼ý ¿¢¨Äì Ì ò¾¡¸ §Áø§¿¡ì¸¢ ±È¢ÂôÀð¼¡ø «Ð ÒÅ¢¨Âò ¾¢ÕõÀ¢ Åó¾¨¼Â¡Ð ±É ì¸¡ñ¸.
(þó¾ §Å¸õ ¾ôÀ¢ µÎõ §Å¸õ(escape velocity)±ÉôÀÎõ)

$$\frac{vdv}{dr}=a=\frac{-gR^2}{r^2}$$

$$\int_{v_0}^{o} vdv=-gR^2\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{-v_0{}^2}{2}=gR^2\left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty$$

$$v_0{}^2=2gR$$

$v_\circ =$ ¾ôÀ¢ µÎõ §Å¸õ $\sqrt{2gR}$ ¬ Ìõ

4.2.15. ÀÂ¢üº¢

4.2.15.1 Ð¸û ´ýÚ x «îº¢ø ¦¾¡¼ì¸ôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ $v=\frac{4}{3(1+x)}$ Á¢.Á¡.Å¢ ±ý Ûõ ¿¢Â¾¢ôÀÊ þÂí Ì ¸¢ÈÐ. «Ð x = 60 Á¢.Á¡ ¯ûÇ þ¼ò¨¾ «¨¼Å¾ü Ì ±Î òÐì ¦¸¡û Ùõ §¿Ãõ Â¡Ð? xý ±ó¾ Á¾¢ôÀ¢ü Ì Ð¸Ç¢ý Ó Î ì¸õ (-0.06) Á¡/Å¢^{2} ±ýÈ¢Õì Ì õ?

(Å¢¨¼ 18 Å¢É¡Ê¸û, $-\frac{1}{3}$Á¢.Á¡.)

4.2.15.2 ¾¨¼ ° §¼ §¿÷§¸¡ðÊÂì¸ò¨¾ô ¦ÀüÈ Ð¸û (motion in a resisting medium) ´ýÈ¢ý Ó Î ì¸õ (a Á¢.Á¡/Å¢^{2}) «¾ý §Å¸ò¾¢ý (vÁ¢.Á¡/Å¢) Å¡Â¢Ä¡¸, $a=5-2v$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. Ð¸û µöÅ¢Ä¢ÕóÐ Å¢ØÅ¾¡É¡ø «Ð ±ó§¿Ãò¾¢ø 0.015 Á¡/Å¢ ±ý Ûõ §Å¸ò¨¾ô ¦ÀÚõ?

Å¢¨¼ $\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{5}{2}\right)$ Å¢

4.2.15.3 x « î º¢ø þÂ í Ì õ Ð¸ û ´ ýÈ¢ ý Ó Î ì¸ ò ¨ ¾ $m = 1.8t - 0.9t^2$ ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î Å ¨ ÃÂÚ ì¸ ¢ÈÐ. §¿Ãõ t=0Å¢ ¬ ¸ ¯ û Ç§À¡Ð Ð¸ û x= 0.3Á ¯ û Ç þ¼ò¾¢ø µöÅ¢Ö û ÇÐ. t =1Å¢ ± ý Ú û Ç§À¡Ð « ¾ ý §Å ¸ ò ¨ ¾ì ¸ ¡ ñ ¸ .

(Å¢ ¨ ¼;0.6Á./Å¢)

4.2.15.4 t=0 ± ý Û õ §¿Ãò¾¢ø Ð¸ û ´ ýÚ x « î º¢ø x= 20 ¦ º.Á ± ý Û Á¢¼ò¾¢Ä¢ÕóÐ þÂ í Ì ¸ ¢ÈÐ. Ð¸ Ç¢ ý §Å ¸ ò ¨ ¾ v=0.05 x^2 (Á./Å¢) ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î Å ¨ ÃÂÚôÀ¾¡ É ¡ ø

(i) Ð¸ Ç¢ ý ¦ ¾¡¼ì ¸ ¿¢ ¨ Ä Ó Î ì¸ õ

(ii) t= 15 Å¢ ¬ ¸ ¯ û Ç§À¡Ð Ð¸ û þÕ ì Ì Á¢¼õ ¬ ¸ ¢ÂÅü ¨ Èì ¸ ¡ ñ ¸

(Å¢ ¨ ¼:0.5 $\left\{\left[10^{-2}\right]$Á / Å¢$^2\right\}$; 4Á)

4.2.15.5 x « î º¢ø þÂ í ¸ ¢ Î õ Ð¸ û ´ ýÈ¢ ý Ó Î ì¸ ò ¨ ¾ $a = (4.5 - 1.5x)$ Á/Å¢^{2}(Á./Å¢^{2}) ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î Å ¨ ÃÂÚôÀ¾¡ ¸ ¢ø

(i) x = 0.9 Á ± ý Ú û Ç§À¡Ð Ð¸ Ç¢ ý §Å ¸ õ Â¡Ð?

(ii) x = 0 Å¢Ä¢ÕóÐ x = 0.9 Á ± ý Û Á¢¼ò¾¢ü Ì î ¦ ºøÄ Ð¸ û ± Î òÐì ¦ ¸ ¡ ñ ¼ §¿Ãõ Â¡Ð?

(iii) x= 3Á ± ý Û Á¢¼ò¾¢ø Ð¸ Ç¢ ý §Å ¸ õ Â¡Ð?

(iv) Ð¸ Ç¢ ý þÂì ¸ ò ¨ ¾ Å¢Çì Ì ¸

Å¢ ¨ ¼ (i) 2.774 Á/Å¢

(ii) 0.475 Å¢

(iii) 4.743Á/Å¢

(iv) 0.6769 Å¢

(v) Ð¸ û ´ Õ ¾É¢ þ ¨ ºÂ¢Âì ¸ ò ¨ ¾ô (simple harmonic motion) ¦ ÀüÚ û ÇÐ)

4.2.15.6 x « î º¢ø Á¢ ¨ ¸ ò¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ ¾¡¼ì ¸ ôÒ û Ç¢Â¢ø µöÅ¢Ä¢ÕóÐ ´ Õ Ð¸ û þÂ í ¸ ¢ t ± ý Û õ §¿Ãò¾¢ø $v = 4\sqrt{t}$ ¦ º.Á/ Å¢ ± ýÈ §Å ¸ ò¾¢ø ¦ ºø ¸ ¢ÈÐ.

(i) t=9 Å¢. Â¡ ¸ ¯ û Ç§À¡Ð Ð¸ Ç¢ ý ¿¢ ¨ Ä ¨ Â ì ¸ ¡ ñ ¸

(ii) x=576 ¦ º.Á ± ý Ú û Ç§À¡Ð Ð¸ Ç¢ ý Ó Î ì¸ ò ¨ ¾ì ¸ ¡ ñ ¸

(Å¢ ¨ ¼ (i) 72 $\left\{\left[10^{-2}\right]$மீ/வி$^2\right\}$ (ii) $\frac{1}{3}\left\{\left[10^{-2}\right]$Á / Å¢$^2\right\}$)

4.2.15.7 x « î º¢ø ¦ ¾¡¼ì ¸ ôÒ û Ç¢Â¢ø µöÅ¢Ä¢ÕóÐ þÂ í Ì õ Ð¸ Ç¢ ý §Å ¸ ò ¨ ¾ $v = 4\sqrt{x}$ ¦ º.Á/Å¢ ± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î Å ¨ ÃÂÚ ì¸ ¢ÈÐ.

(i) x=900 ¦ º.Á ± ý Ú û Ç þ¼ò¾¢ø Ð¸ Ç¢ ý Ó Î ì¸ õ Â¡Ð?

(ii) x=900 ¦ º.Á ± ý Û Á¢¼ò ¨ ¾ « ¨ ¼Â ± Î òÐì ¦ ¸ ¡ ñ ¼ §¿Ãõ Â¡Ð?

(Å¢ ¨ ¼ (i) 8 ¦ º.Á Å¢ (ii)15 Å¢)

4.2.15.8 x « î º¢ø ¦¾¡¼ì ¸ôÒûÇ¢Â¢ø µöÅ¢Ä¢ÕóÐ þÂí Ì õ Ð ¸Ç¢ý Ó Î ì ¸Á¡ ÉÐ $a=\left(10-\frac{1}{3}x\right)$ Á/Å¢^{2} ± ý Û õ ºÁ ý À¡ð¼¡ø Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î ¸¢èÐ.

(i) §Å ¸ õ Å¢É ¡Ê ì Ì 15Á ¬ ¸ ¯ ûÇ§À¡Ð Ð ¸ û ± Î òÐ ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼ §¿Ãõ Â¡Ð?

(ii)1 Å¢É ¡Ê ì Ì ô À¢È Ì Ð ¸ û ¦¾¡¼ì ¸ôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ ±ó¾ò ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢Ä¢Õ ì Ì õ?

(Å¢ ¨ ¼ (i) $3\log_e^2$ Å¢ (ii) 12.99 Á)

4.2.16. ÀÂ¢üº¢

4.2.16.1 Ð ¸Ç¢ý §Å ¸ õ ($V=20t^2-100t+50$) (Á ð¼¡¢ø) ± ý È ¡ ø, (t- Å¢É ¡ÊÂ¢ø) Ó Î ì ¸ õ â î º¢ÂÁ¡ Ì õ ¾Õ ½ ò¾¢ø, §Å ¸ ò ¨ ¾ Å¾¢ôÀ¢ Î ¸ .(Å¢ ¨ ¼ V=-75m/s)

4.2.16.2 s « î º¢ø þÂí Ì õ Ð ¸ û ´ ýÈ¢ý ¾¢ ¨ º§Å ¸ õ $V=2+5t^{3/2}$ (s Áð¼¡¢ø, t Å¢É ¡ÊÂ¢ø) t=4 Å¢É ¡Ê ¬ ¸ ¯ ûÇ§À¡Ð,þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢, ¾¢ ¨ º§Å ¸ õ ÁüÚõ Ó Î ì ¸ õ - ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È ì ¸ ¡ ñ ¸ (Å¢ ¨ ¼:s=72m;V=42m/s;G=15m /s^2)

4.2.16.3 80 ¸¢.Á/Á ½¢ ÅóÐ ¦ ¸ ¡ ñ ÊÕ ì Ì õ §Á¡ð¼¡÷Å ñ Ê 30Á. ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢ø ¿¢ý Ú Å¢ Î ¸¢èÐ. « §¾ Á¡È¡¾ Ó Î ì ¸ò¾¢ø §Á¡ð¼÷Å ñ ÊÂ¢ý §Å ¸ õ 120 ¸¢.Á/Á ½¢ ± ý È ¡ ø, §Á¡ð¼¡÷ Å ñ Ê ¿¢üÀ¾ü Ì Ó ý , ¦¾¡ ¨ Ä× ¸¼ó¾Ð ± ý É ± ý Ú ¸ ¡ ñ ¸ (Å¢ ¨ ¼ s=67.5 Á.)

4.2.16.4 Ð ¸ û ´ ý Ú Å ¨ Ç×ôÀ¡ ¨ ¾Â¢ø ¦ º øÅ ¨ ¾ $V_x=(50-16t)$ Á/Å¢É ¡Ê $y=(100t-4t^2)$ ± ý À ¨ Å Å ¨ ÃÔÚ ì ¸¢ý È É . t=0 ± ý Û õ§À¡Ð x=0 ¬ ¸¢èÐ ± É ì ¦ ¸ ¡ Î ì ¸ôÀð Î ûÇÐ y=0 ± ý Ú ûÇ§À¡Ð, « òÐ ¸Ç¢ý ¾¢ ¨ º§Å ¸ õ, ÁüÚõ Ó Î ì ¸ õ ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È ì ¸ ¡ ñ ¸ . (Å¢ ¨ ¼ V = 50 Á/Å¢É ¡Ê, a =17.89Á/Å¢É ¡Ê^2)

4.2.16.5 0.4 Á ¬ ÃÓ ûÇ Åð¼ò¾¢ø ´ Õ Ð ¸ û þÂí Ì ¸¢èÐ. Ð ¸ û 0.6Á/Å¢É ¡Ê ± ý È Á¡È¡¾ §Å ¸ò¾¢ø þÂí ÌÅ¾¡ ¸¢ø, « òÐ ¸Ç¢ý Ó Î ì ¸ò¾¢ý ÀÕÁ ¨ É ì ¸ ¡ ñ ¸ (Å¢ ¨ ¼ Ó Î ì ¸ õ =0.9 Á/Å¢É ¡È^2)

4.2.16.6 §Á¡ð¼¡÷ ´ ý Ú 240Á ¬ ÃÓ ûÇ Åð¼ôÀ¡ ¨ ¾Â¢ø þÂí Ì ¸¢èÐ. §Å ¸ õ 75 ¸¢.Á/Á ½¢ ± ý Ú ûÇ§À¡Ð « ¾ý ¦Á¡ò¾ Ó Î ì ¸ò¾¢ý ÀÕÁ ý 3 Á/Å¢É ¡Ê^2 ± ý È ¡ ø §Á¡ð¼¡¢ý §Å ¸ õ ±ó¾Å¢ ¸¢¾ò¾¢ø Á¡Ú ¸¢èÐ ± ý À ¨ ¾ ¾¢÷Á¡É¢ì ¸×õ. (Å¢ ¨ ¼: $a_t = \pm 2.39$ Á/Å¢É ¡Ê^2)

4.3. Ð¸Ç¢ý Å¢¨ºÂ¢Âø (Kinetics of a particle)

(Å¨Ç§¸¡Î, §¿÷§¸¡ðÊÂì¸õ)

4.3.1 Óý Û¨Ã

Å¢¨ºÂ¢Âø ±ýÀÐ þÂì¸Å¢¨ºÂ¢ÂÄ¢ý þÃñ¼¡ÅÐ ÀÌ¾¢Â¡Ìõ. þÐ Ð¸û¸û «øÄÐ ¦À¡Õû¸û ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý þÂì¸õ, þÂì¸ò¾¢üÌ ¸¡Ã½Á¡É Å¢¨º¸û, ¬üÈø, ¯ó¾õ ±ýÀÅü¨Èò ¦¾¡¼÷ÒÀÎò¾¢ì ÜÚ¸¢ÈÐ.

þùÅò¾¢Â¡Âò¾¢ø Ð¸Ç¢ý Å¢¨ºÂ¢Â¨ÄôÀüÈ¢ ÜÈôÀÎõ. Ð¸Ùì̧¡¢Â Å¢¨ºÂ¢ÂÄ¢ý «ÈôÀ¨¼ì¸ÕòÐ¸¨Ç, Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢, ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ±ýÀ¨Å¸Ç¢ý Å¢¨ºÂ¢Â¨Äô ÀüÈ¢ «È¢Â ÀÂýÀÎò¾ôÀÎõ.

Å¢¨ºÂ¢ÂÄ¢ø þÃñÎ Å¨¸Â¡É «ÊôÀ¨¼ ÀÌ¾¢¸Ç¢ý ¨É¸Ùìì¾÷×¸¡½§Å ñÊÛûÇÐ.

Ó¾Ä¡õ ÀÌ¾¢Â¢ø ´Õ Ð¸û, «øÄÐ ´Õ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû «øÄÐ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû¸Ç¢ý ´Õ¦¾¡ÌôÀ¢ý ¬¸¢¨Å ´ù¦Å¡ýÈ¢ý þÂì¸Óõ (Motion) ÓüÈ¢Öõ ¦¾¡¢óÐûÇ¾¡Ìõ. Ð¸û «øÄÐ ¦À¡Õû «øÄÐ ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¦¾¡ÌôÀ¢ø ¬¸¢ÂÅüÈ¢ø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸¨Çô ÀüÈ¢Â Å¢ÅÃí¸û ¸½ì¸¢¼ôÀð Îò¾÷Á¡É¢ì¸ §Å ñÊÅÕ¸¢ÈÐ.

þÃñ¼¡õ ÀÌ¾¢Â¢ø, Ð¸û «øÄÐ ¦À¡Õû «øÄÐ ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¦¾¡ÌôÀ¢ø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸û «¨ÉòÐõ ¦¾¡¢Ô¦ÁÉì¦¸¡ñÎ, «òÐ¸û «øÄÐ ¦À¡Õû «øÄÐ ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¦¾¡ÌôÀ¢ø þÂì¸õ ±ùÅ¡Ú Å¢¨ÇÅ¢ì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ ±ýÀ¨¾ì¸¡½§Å ñÊÂ¾¡¸¢ÈÐ.

Ó¾Ä¡ÅÐ ÀÌ¾¢¨Éì ¸¡ñÀÐ ±Ç¢¾¡Ìõ. ¬É¡ø Ó¾ø ÀÌ¾¢¨ÂÅ¢ý §¿÷Á¡È¡É þÃñ¼¡Å¾ø º¢ì¸ø¸¨Çò ¾Å¢÷òÐ ¾÷× ¸¡ñÀÐ, º¢Ä ±Ç¢¾¡É ¿¢¨Ä¸ÇÕÅ¢ÖõÜ¼(even in simple cases) ¸½¢¾Å¢Âø Ñ½ì¸ò¾¢üÌ «ôÀ¡üÀð¼¾¡Ìõ. ±É§Å þÂì¸Å¢¨ºÂ¢ÂÄ¢ø þÃñ¼¡ÅÐ ÀÌ¾¢¨É§Â º¢ÈôÒô ¦ÀüÚûÇ¾¡Ìõ.

Å¢¨ºÂ¢Âø ÀÌ¾¢Â¢ø, Å¢¨º¨ÂôÀüÈ¢Â Å¨ÃÂ¨È, «ùÅ¢¨ºìÌõ Ð¸Ç¢ý þÂì¸ò¾¢üÌÓûÇ ¦¾¡¼÷Ò, «ùÅ¢¾¢ò ¦¾¡¼÷¨À «ÊôÀ¨¼Â¡¸ì¦¸¡ñÎ ÅÃÂ¨ÚôÀÐ ¬¸¢Â¨Å «¼íÌõ. þ¨Å¸û «¨ÉòÐõ ãýÚ Ó¾ý¨Á ¦ÁöÓ¨È¸Ç¢ý (axioms) ¬¾¡Ãí¸Ç¡¸ì ¦¸¡ñÎûÇÉ. þõ¦ÁöÓ¨È¸¨Ç §¿ÃÊ¡¸ ¿¢åÀ¢ì¸ ÓÊÂ¡ ±ùÅ¢¾ §º¡¾¨ÉÔõ ¸¢¨¼Â¡Ð. þùÅ¢¾ «È¢Å¢Âø ¸ÕòÐ¸¨Ç ¸Ä¢Ä¢§Â¡ ±ýÀÅ÷ ¸¢.À¢.1590¬õ ¬ñÊø§Â «È¢ó¾¢Õó¾¡÷ ±ýÈ¡Öõ, þÅü¨È Ó¨ÈÂ¡É ÅÊÅò¾¢ø ¸¢.À¢.1686¬õ ¬ñÎ ÓøÓ¾Ä¡¸ ¦ÅÇ¢Â¢ð¼ ¦ÀÕ¨Á ¿¢äð¼¨É§Â º¡Õõ. þõ¦ÁöÓ¨È¸§Ç ¿¢äð¼É¢ý þÂì¸Å¢Âø Å¢¾¢¸Ç¡Ìõ. þùÅ¢¾¢¸¨Ç Å¢Å¡¢ì¸ì Ì È¢ôÒ¸¡Ä ò¾ Å¨ÃÂ¨È¸¨Ç §¿¡ì¸ÌÅÐ Ó¨ÈÂ¡Ìõ.

4.3.2 ±¨¼Ôõ ¿¢¨ÈÔõ (Weight and mass)

4.3.2.1 ±¨¼ (Weight)

´Õ ¦À¡ÕÇ¢ÉÐ ÒÅ¢¨Â§¿¡ì¸¢ ¦ÅüÈ¢¼ò¾¢ø Å¢ØõÀÊ Å¢§º¡¾¨É ´ý¨È¦ºöÐ¡¢ø, «Ð ´Õº¡¢É Ó¼ì¸ò¾Ð¼ý þÂí¸¢¦¾¡¼ «È¢ÂÄ¡õ. þùÅ¡Ó¼ì¸õ ÒÅ¢÷ôÒ Å¢¨ºÂ¢É¡ø ²üÀÎ¸¢ÈÐ. ´Õ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼ ±ýÀÐ «ô¦À¡Õû ÒÅ¢¨Â§¿¡ì¸¢ þØì Ìõ Å¢¨ºÂ¢ý «Ç× ¬ Ìõ. ÒÅ¢Â¢÷ôÒ þÂì¸õ þ¼ò¾¢ü¸¢¨ ¼§Â Á¡ÚÀ¼Å¾¡ø, ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼Ôõ Á¡ÚÀ¼¸¢ÈÐ.

4.3.2.2 ¿¢¨È (Mass)

¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ ´Õ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼ w - ×õ, ÒÅ¢Â¢÷ôÒ Ó Î ì¸õ g - Ôõ §¿÷Å¢¸¢¾ò¾¢Ö ûÇÉ. ±É§Å «ô¦À¡Õ Ù ì Ì $\frac{w}{g}$ ±ýÀÐ ±ùÅ¢¼ò¾¢Öõ ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡ Ìõ. þùÅ¢¸¢¾§Á ±Î ò¾¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È (Mass) ±ÉôÀ Îõ. «Ð m ±ýÈ ±Øò¾¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀ Îõ. ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È, «¾ý ÀÕÁý, ¯ÕÅ «¨ÁôÒ §À¡ýÈÅü¨È º¡÷ó¾¢ÕôÀ¢Ûõ, ÀÃó¾ ¯Ä¸¢ø «Ð «¾ý þÕôÀ¢¼ò¾¢ý ¿¢¨Ä¨Âô ¦À¡Úò¾¾¡Â¢ø¨Ä. ¬¸§Å ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼ (w) þ¼ò¾¢ü¸¢¼õ Á¡ÚÀð¼ §À¡¾¢Öõ, «¾ý ¿¢¨È (m) Á¡È¡¾ Á¾¢ôÀÇÅ¡¸ þÕì Ìõ.

¦À¡Õû¸Ç¢ý ¿¢¨È¸¨Ç î º¡¾¡Ã½ ¾Ã¡Í (Common balance) ¦¸¡ñ Î ´ôÀ¢ð¼È¢ÂÄ¡õ. º¡¾¡Ã½ ¾Ã¡º¢ø ¿¢Úì Ìõ§À¡Ð, þÕ¦À¡Õû¸Ç¢ý ±¨¼¸¨Ç Áð Î§Á ´ôÀ¢ð¼§À¡¾¢Öõ, «¨Å¸û ´§Ãþ¼ò¾¢ø þÕôÀ¾¡ø, g - Â¢ý Á¾¢ôÒ þÃñ Êü Ìõ ´ýÈ¡¸ (same) þÕì¸¢ÈÐ. ¬¸§Å «ÅüÈ¢ý ¿¢¨È¸û º¡¾¡Ã½ ¾Ã¡º¢ø ´ôÀ¢¼ôÀð¼¾¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. §ÁÖõ º¡¾¡Ã½ò ¾Ã¡º¢ø ¿¢Úò¾¡ø, ´Õ¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È, ÀÃó¾ ¯Ä¸¢ø ±ùÅ¢¼ò¾¢Öõ ´ýÈ¡¸§Å (same) þÕì Ìõ.

4.3.3 ¿¢äð¼É¢ý þÂì¸ Å¢¾¢¸û

4.3.3.1 Ó¾ø Å¢¾¢ (¦Áöõ¨Á 1)

´ù¦Å¡Õ ¦À¡ÕÙõ Â¡§¾Û¦Á¡Õ ÒÈÅ¢¨ºÂ¡ø ¾¡ì¸ôÀð Î Ó Î ì¸ôÀð¼¡Ä¡ÂÈ¢ ¾ÉÐ µö× ¿¢¨ÄÂ¢§Ä§Â¡ «øÄÐ ´Õ §¿÷§¸¡ðÊÖûÇ º£¡É þÂì¸ ¿¢¨ÄÂ¢§Ä§Â¡ ¦¾¡¼÷ó¾¢Õì Ìõ.

Ó¾ø Å¢¾¢Â¢ý ÅÇì¸õ

±ó¾ô¦À¡ÕÙõ «Ð ¨Åì¸ôÀð¼ þ¼ò¾¢§Ä§Â µö× ¿¢¨ÄÂ¢Ä¢Õì Ìõ. ²¾¡ÅÐ ´Õ Å¢¨º «¾ý§Áø ¦ºÂøÀÎÁ¡¸¢ø, «Ð ¿¸Õõ. ±É§Å, ¦À¡ÕÇ¢ý µö×¿¢¨Ä¨Â Á¡üÚÅÐ «¾ý§Áø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º§ÂÂ¡Ìõ.

Ó¾øÅ¢¾¢Â¢ýÀÊ, ±ô¦À¡ÕÙõ ¾ý ¿¢¨Ä¨Âò ¾¡É¡¸§Å Á¡üÈ¢ì¦¸¡ûÇ ÓÊÂ¡¦¾ýÀÐ «È¢Âò¾¡ì¸¾¡ Ìõ. þùÅ¢¾ô ÀñÀ¡ÉÐ ¦À¡ÕÇ¢ý "¿¢¨ÄÁõ" «øÄÐ "º¼òÐÅõ" (inertia) ±ÉôÀ Îõ.

4.3.3.2 þÃñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ (¦Áöõ¨Á 2)

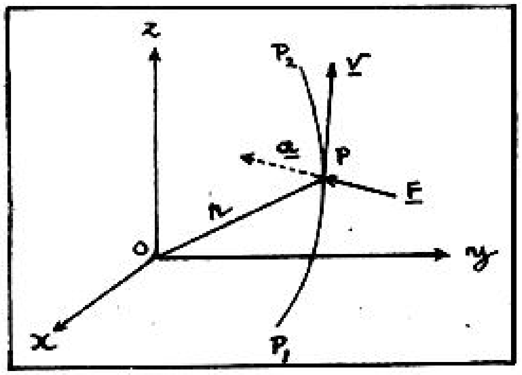
´Õ Ð¸Ç¢ý Ó Î ì¸¡ÉÐ «¾ý§Áø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨ºìÌ §¿÷Å¢¸¢¾ò¾¢Öõ, «ùÅ¢¨ºÂ¢ý ¾¢¨ºÂ¢§ÄÔõ þÕì Ìõ.

þÃñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢Â¢ý ÅÇì¸õ:

´Õ Ð¸Ç¢ý §Áø $\underline{F}$ ±ýÛõ Å¢¨º ¦ºÂøÀÎÅ¾¡É¡ø, «¾ý Å¢¨ÇÅ¡ø ²üÀÎõ Ó Î ì¸õ, (x,y,z) ±ýÛõ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼îÍ «¨Áô¢ø $\underline{a}$ ±É ì ¦¸¡ñ¼¡ø, þÃñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢Â¡ÉÐ $\underline{F} = m\underline{a}$ ±ýÈ¡ Ìõ.

þ í Ì ûÇ "m" ±ýÀÐ ´Õ ± ñ ½¢ Á¡È¢Ä¢Â¡ Ì õ (scalar constant). þÐ§Å þÂ ì ¸Å¢ ¨ ºÂ¢ÃÂ¢ ý «ÈôÀ ¨ ¼î ºÁ ýÀ¡¼¡ Ì õ. (Basic equation in Dynamics).

þ í Ì $\underline{a}$ ±ýÀÐ Ð¸Ç¢ø ¯ ñ ¼¡ Ì õ ¾É¢ Ó Î ì ¸Á¡ Ì õ. (Absolute acceleration).



À¼õ 4-3-1

$\underline{a},\underline{F}$ ±ý Û õ Ó Î ì ¸Óõ, Å¢ ¨ ºÔõ ´§Ã §¿÷ì§¸¡ðÊÄ ¨ Áó¾ §À¡¾¢Öõ, Ð¸û ²ü¸É§Å $\underline{V}$ ±ý Û õ ¾¢ ¨ º§Å¸òÐ¼ý $\underline{F}$ Å¢ ¨ ºì Ì §ÅÈ¡É ¾¢ ¨ ºÂ¢ø þÂ í Ì §ÁÂ¡É¡ø «¾ý À¡ ¨ ¾ ´Õ §¿÷ì§¸¡ðÊÄ ¨ ÁÂ¡Áø, P_1,P,P_2 ±ý Û õ Å ¨ Ç×ôÀ¡ ¨ ¾Â¢ø À¼õ (3.1)-ø ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú þÂ í Ì õ.

§ÁÖõ, $\underline{a},\underline{F}$ ±ýÀ ¨ Å ´§Ã¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂøÀ Î Å¾¡ø $\underline{F}=m\underline{a}$ ±ý Û õ ºÁýÀ¡ð ¨ ¼ $\underline{F}=m\underline{a}$ «øÄÐ $m=\dfrac{F}{a}$ ±ý Úõ ±Ø¾Ä¡õ.

m ±ýÀÐ Å¢ ¨ ºÂ¢ý ± ñ Á¾¢ôÒì Ì õ Å¢ ¨ Ç× Ó Î ì ¸ò¾¢ý ± ñ Á¾¢ôÒì Ì ÓûÇ Å¢¸¢¾ò ¨ ¾ «È¢Å¢ì Ì õ ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡¸¢ÈÐ. þÐ§Å ¾¡ý, Ð¸Ç¢ý ¿¢ ¨ È (mass) ±É ì ¦¸¡ûÇôÀ Î õ. þÐ Ð¸Ç¢ý º¼òÐÅò ¨ ¾ «ÇÅ¢ Î Å¾¡¸ ì ¸Õ¾ôÀ Î õ. ¦¸¡ Î ì ¸ôÀð¼ Ð¸ Ù ì Ì , þÐ ±ùÅ¢¼òÐ¾¢Öõ Á¡È¡ ± ñ ½¢Â¡ Ì õ.

m_1,m_2 ±ý Û õ ¿¢ ¨ È¸ ¨ Çô ¦ÀüÈ P_1,P_2 ±ý Û õ þÕ Ð¸û¸Ç¢ý§Áø, $\underline{F}$ ±ý Û õ Å¢ ¨ º ¾¡ì ¸ ð Î õ. «ô§À¡Ð «òÐ¸û¸Ç¢ý Ó Î ì ¸ í ¸Ç¢ý ± ñ Á¾¢ôÒ¸û

$$\underline{a_1}=\frac{F}{m_1};\underline{a_2}=\frac{F}{m_2}$$

¬ Ì õ. $m_1>m_2$ ±É¢ý $a_1<a_2$ ±ýÈ¡ Ì õ.

«¾¡ÅÐ, «¾¢¸ ¿¢ ¨ È ¨ Âô¦ÀüÈ Ð¸û «¾¢¸ î º¼òÐÅò ¨ ¾ ¦ÀüÚûÇ¾¡ ¸×õ, «¾ý ¸¡Ã½Á¡¸ «òÐ¸û¸Ç¢ø ¿¢¸Øõ Ó Î ì ¸õ, ÁüÈ Ð¸û¸Ç¢ø ¿¢¸Øõ Ó Î ì ¸ò ¨ ¾ì ¸¡ðÊÖõ Ì ¨ È×ÀðÊÕì Ì ¦ÁýÈ¡ ¸¢ÈÐ.

þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¢¾¢, Å¢ ¨ º ¨ Â «ÇÅ¢ Î Å¾üì Ì ¯¾×¸¢ÈÐ.

Å¢ ¨ ºì Ì ± ñ Á¾¢ôÒõ, ¾¢ ¨ ºÔõ ¯ ñ Î . ±É§Å «Ð ´Õ ¾¢ ¨ ºÂ¢Â¡ Ì õ. Å¢ ¨ º ¨ Â, µ÷ «õÒ §¿÷§¸¡ð¼¡ø Ì È¢ì ¸Ä¡õ. ´Õ Å¢ ¨ º ¨ Â ÓüÈ¢Öõ Å ¨ ÃÂÚì ¸ , «¾ý (1) ± ñ Á¾¢ôÒ (2) ¦ºÂøÀ Î õ ¾¢ ¨ º (3) ¦ºÂøÀ Î õ ÒûÇ¢ ¬ ¸¢Â ¨ Å §¾¨ ÅôÀ Î õ.

4.3.3.2.1 Å¢¨ºÂ¢ý «ÄÌ¸û.

º¡÷À¢Ä¡ «ÄÌ¸û (absolute units)

¿¢äð¼ý (Newton)

´Õ ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÔûÇ ¦À¡ÕÇ¢ø, ´Õ Å¢É¡ÊÂ¢§Ä, Å¢É¡Êì Ì ´Õ Ó Î ì¸ò¨¾ ¯ ñ ¼¡ì¸ìÜ ÊÂÐ ´Õ ¿¢äð¼ý ±ÉôÀÎõ.

¦Áð¡¢ì "M.K.S." Ó¨ÈÂ¢ø ¿¢äð¼ý ±ýÀ§¾ µÃÄÌ Å¢¨ºÂ¡ Ìõ.

1 ¿¢äð¼ý =1 ¸¢.¸¢. Á/ Å¢² ¬ Ìõ.

4.3.3.3 ¿¢äð¼É¢ý ã ýÈ¡ÅÐ Å¢¾¢ (¦Áöõ¨Á 3)

´ù¦Å¡Õ Å¢¨ºò¾¡ì¸¢ü Ìõ, ºÁÛõ ±¾¢ÕÁ¡É Áü¦È¡Õ Å¢¨ºò¾¡ì Ìõ ¯ ñ Î.

¿¢¨ÄÂ¢Âø ¸½ì Ì¸Ç¢ø þùÅ¢¾¢Â¡ÉÐ ¾¢ÕõÀò¾¢ÕõÀô ÀÂýÀÎò¾ô Àð ÎûÇÐ. þÂí Ìõ ¦À¡ÕÙ ì Ìõ þùÅ¢¾¢ ¦À¡ÕóÐõ.

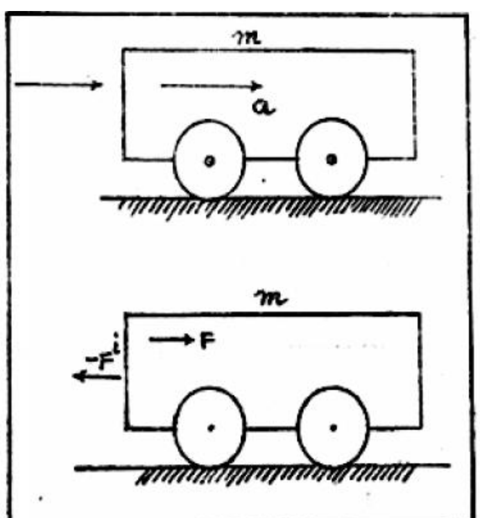
(i) ´Õ ÁÉ¢¾ý ´Õ À¡ÃÅ ñ Ê ´ ý ¨Èò¾ûÇ¢ $\underline{a}$ ±ý Ûõ Ó Î ì¸ÓûÇ µ÷ þÂì¸ò¨¾ô À¼õ [4.3.2 (a)]-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ²üÀÎòÐÅ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇ×õ. ¿¢äð¼É¢ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ, m ±ýÀÐ À¡ÃÅ ñ ÊÂ¢ý ¿¢¨È ±É¢ø, ÁÉ¢¾ý Å ñ ÊÂ¢ý §Áø ÀÂýÀÎòÐõ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ,

$$\underline{F} = m\underline{a} \quad ¬ Ìõ.$$

þÐ§Å ÁÉ¢¾ý Å ñ ÊÂ¢ý Á¢Ð ¦ºÂøÀÎò¾¢Â ¾¡ì¸Å¢¨ºÂ¡ Ìõ. ¿¢äð¼É¢ý ã ýÈ¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ, À¡ÃÅ ñ ÊÔõ, ÁÉ¢¾É¢ý §Áø $\underline{F}'$ ±ý Ûõ µ÷ ±¾¢÷¾¡ì¸ò¨¾ [4.3.2 (b) ³ô À¡÷ì¸].

$\underline{F}' = -F = m\underline{a}$ ±ýÚûÇÅ¡Ú Å¢¨ÇÅ¢ì¸¢ÈÐ.

$\underline{F}' = -m\underline{a}$ ±ýÀÐ º¼òÐÅÅ¢¨º (Inertia force) ±ÉôÀÎõ.Å ñ Ê, þÂì¸ò¾ü Ì Ì ¦¸¡ Î ì Ìõ ¾¨¼Â¡ø, «ùÅ¢¾ Å¢¨º¨Â ÁÉ¢¾ý ¯ ñ ¨ÁÂ¡¸§Å ¯½Õ¸¢È¡ý. $\underline{F}'$ ±ý Ûõ º¼òÐÅ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ ±¾¢÷¾¡ì¸Å¢¨º (reaction) ±ýÚ þ í Ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

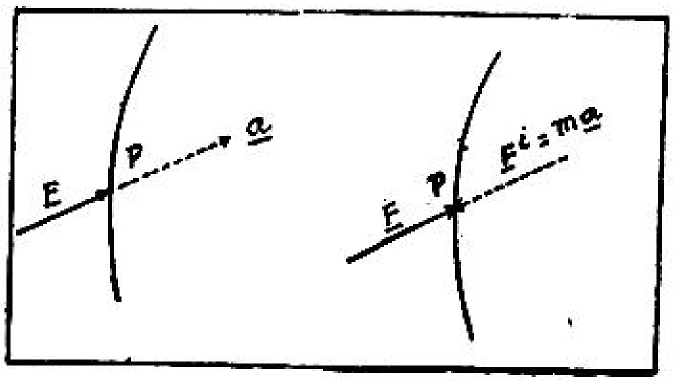


A¼õ 4-3-2 (a) & b

§ÁÖõ $\underline{F'} = -\underline{F}$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ðÊø, $\underline{F}$ ±ý Ûõ ¾¡ì¸Å¢¨º, $\underline{F'}$ ±ý Ûõ ±¾¢÷¾¡ì¸Å¢¨º ¬¸¢Â¨Å ±ô§À¡Ðõ ¦ÅùÅ§ÅÈ¡É ¦À¡Õû¸Ç¢ø (þí Ì À¡ÃÅ ñ È, ÁÉ¢¾ý) ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈÉ ±ýÀÐ ¸ÅÉ¢ì¸ò¾ì¸Ð.

4.3.4 ¾ÄõÀ¡ðÊý ¾òÐÅõ (D’ Alembert’s Principle)

þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø ¸½ì¸¨Ç, ¿¢¨ÄÂ¢Âø ¸½ì¸Ç¡¸ Á¡üÈ¢ ¾÷× ¸¡½ þò¾òÐÅõ ¯¾×¸¢ÈÐ. ÌÈ¢ôÀ¡¸ þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø ÀÌ¾¢Â¢ø, Ð¸Ç¢ý þÂì¸õ «È¢Âì ÜÊÂ ºó¾÷ôÀí¸Ç¢ø «¾ý§Åø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨Ç× Å¢¨º¨ÂÌ ¸¡ ñ À¾ü Ì þò¾òÐÅõ º¢Èô À¡¸ ¯¾×¸¢ÈÐ.



À¼õ 4-3-3 (a) A¼õ 4-3-3 (b)

பீர்ந்த்வெளியிட்ø P±Ûõ þ¼ò¾¢ø Ð¸û ´ýÈ¢ø F ±ý Ûõ Å¢¨º [படம் 4.3.3(a)] - ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦ºÂøÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. ¿¢äð¼É¢ý þÃ ñ ¼¡õ விதிப்படி, இÂ í Ì õ Ð¸Ç¢ý Ó Î ì¸Á¡ÉÐ,

$\underline{F} = m\underline{a}$ என் Ûõ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎ õ.

þ í ¾ ý À¡Ù ¨¼,

$\underline{F} - m\underline{a} = \underline{0}$,

«øÄÐ $\underline{F} + \underline{F^i} = 0$ ±É ±Ø¾Ä¡õ.

þ í Ì $\underline{F^i} = -m\underline{a}$ ±ýÀÐ º¼òÐÅ Å¢¨º ±ÉôÀÎ õ.

þùÅ¢¾Å¢¨º ±ô§À¡Ðõ Ð¸Ç¢ø ²üÀÎ õ Ó Î ì¸ò¾¢ý ±¾¢÷ò¾¢¨ºÂ¢ø «¨ÁÔõ. (À¼õ [4.3.3 (b)]- ³ô À¡÷ì¸)

$\underline{F} + \underline{F^i} = 0$ ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢î ºÁýÀ¡ð¼¡ø, Ð¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎõ $\underline{F}$ ±ý Ûõ Å¢¨º, º¼òÐÅ Å¢¨º $\underline{F^i}$ ±ýÀÅüÈ¢ý Å¢¨Ç× âî¸¢ÂÁ¡¸¢ÈÐ. «¾¡ÅÐ $\underline{F}$ õ º¼òÐÅ Å¢¨º $\underline{F^i}$ Ôõ §º÷óÐ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÖûÇÉ. þÐ§Å ¾ÄõÀ¡ðÊý ¦¸¡û¨¸Â¡ Ìõ.

þ í Ì º¼òÐÅÅ¢¨º Ð¸Ç¢ý§Áø ¦ºÂøÀÎÅ¾¢ø¨Ä ±ýÀÐ ÅÄ¢ÔÚò¾ò ¾ì¸Ð. þòÐ¸ Ù ì Ì ¾¡ì ì Ì Å¢¨º¨Â «Ç¢ì Ìõ ¦À¡ÕÇ¢ý §Áø¾¡ý ¯ ñ ¨ÁÂ¡¸ §Å ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. ±É¢Ûõ º¼òÐÅÅ¢¨º ì Ì î ºÁ¿¢¨Ä¨Â¡¸ ¿¢üÀ¨¾ ÉÅ¢¨º ´ýÚ Ð¸Ç¢ý §Áø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸ì ¸Õ¾¢É¡ø, Ð¸ Ù ì Ì ´ÕÅ¢¾ Ó Î ì¸Óõ ²üÀÎÅ¾¢ü¸¢ø¨Ä. «ô§À¡Ð Ð¸Ç¡ÉÐ «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ÄÂ¢ÕôÀ¾¡ø, þùÅ¢¾î ºÁ¿¢¨Ä, Ð¸Ç¢ý þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø ºÁ¿¢¨Ä (Dynamic equilibrium) ±É ì ÜÈôÀÎ õ.

$\underline{F} + \underline{F^i} = 0$ ±ýÀ¨¾, «ÅüÈ¢ý ± ñ ½¢ôÀ¸¢÷×¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì Ì õ§À¡Ð,

$$X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k} - m\frac{d^2x}{dt^2}\underline{i} - m\frac{d^2y}{dt^2}\underline{j} - m\frac{d^2z}{dt^2}\underline{k} = 0$$

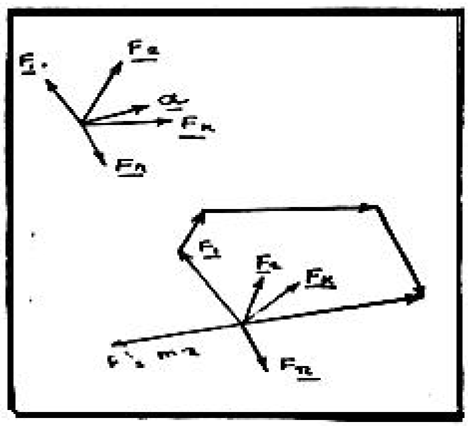
«¾¡ÅÐ,

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0; Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0; Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

¬ Ì õ. þ¨Å¸§Ç Ð¸Ç¢ý þÂì¸î ºÁýÀ¡Î¸Ç¡ Ì õ.

¾ÄõÀ¡ðÊý ¾òÐÅò¨¾ ´Õ Ð¸Ç¢ý§Áø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡Ì ¾¢ ´ýÈ¢ü Ì õ ÀÂýÀÎò¾Ä¡õ.

À¼õ (4.3.4)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú $\underline{F_1}, \underline{F_2}, ...\underline{F_n}$ ±ன்றும் Å¢¨º¸û, m ±ýÛõ ¿¢¨È¨Åô¦ÀüÚ, P ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ÖûÇ Ð¸Ç¢ø ¦ºÂøÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.



À¼õ 4-3-4

«ùÅ¢¨º¸û, Ð¸Ç¢ø $\underline{a}$ ±ýÛõ ´ÕÅ¢¨Ç× Ó Î ì¸ò¨¾ (Resultant acceleration), ²üÀÎòÐÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

«ô§À¡Ð

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} = m\underline{a}$$

«¾¡ÅÐ,

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} - m\underline{a} = 0$$

«øÄÐ, $\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} + \underline{F_i} = 0$ ¬ Ì õ.

þí Ì $\underline{F^i} = -m\underline{a}$ ±ýÀÐ º¼òÐÅÅ¢¨º ±ÉôÀÎõ. ¾ÄõÀ¡ðÊý ¦¸¡û¨¸Â¢ýÀÊ,

$\underline{F_1}, \underline{F_2}, ...\underline{F_k}...\underline{F_n}$ ±ýÛõ Å¢¨ºò¦¾¡Ì ¾¢Ôõ, $\underline{F^i}$ ±ýÛõ º¼òÐÅÅ¢¨ºÔõ §º÷óÐ À¼õ (4.3.4)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âü ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÖûÇÉ.

±É§Å, þùÅ¢¨º¸Ç¨ÉòÐì Ì õ,

$$\left[\left\{\underline{F_k}\right\} k = 1, 2, ...n, \underline{F^i}\right]$$

²üÈ¾¡É ´Õ Å¢¨ºô Àø§¸¡½ò¨¾ Å¨Ãó¾¡ø, «Ð ´Õ ãÊÂ ¯ÕÅò¨¾ô ¦ÀÚõ.

§ÁÖõ, ´Õ Ó¨ÉÅ¢¨ºò ¦¾¡Ì¾¢ì Ì ¯¡¢Â ºÁ¿¢¨Äî ºÁýÀ¡Î¸¨Ç, $\left[\left\{\underline{F_k}\right\} k=1,2,..............n,\underline{F^i}\right]$ ±ýÛõ ¦¾¡Ì¾¢ì Ìõ ÀÂýÀÎò¾,

$$\sum_{k=1}^{n}\underline{F_{kx}}-m\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\underline{F_{ky}}-m\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\underline{F_{kz}}-m\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

±ýÛõ þÂì¸Å¢¨ºÂ¢Âø ºÁýÀ¡Î¸¨Çô ¦ÀÈÄ¡õ.

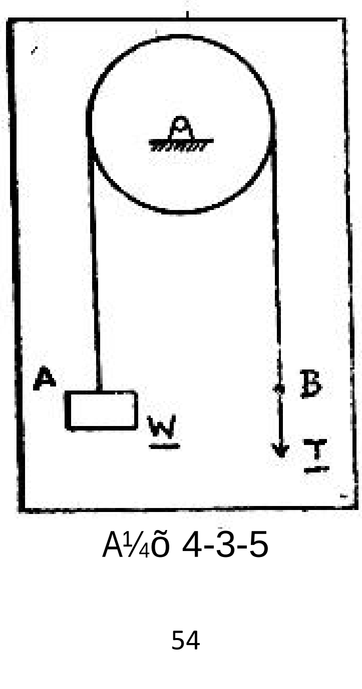
±É§Å Ð¸Ç¢ý þÂì¸Å¢¨ºÂ¢Âø ¸½ìÌ¸Ùì Ì ¿¢äð¼É¢ý þÃ ñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢¨Â§Â¡, «øÄÐ ¾ÄõÀ¡ðÊý ¾òÐÅò¨¾ô ÀÂýÀÎò¾¢§Â¡, þÂì¸Å¢¨ºÂ¢Âø ºÁýÀ¡Î¸¨Ç Å¨ÃÂÚòÐ, «ÅüÈ¢ü Ì ¾£÷× ¸¡½Ä¡õ.

¾ÄõÀ¡ðÊý ¾òÐÅò¨¾ì ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû¸Ùì Ìõ «øÄÐ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ì Ìõ ÀÂýÀÎò¾Ä¡õ.

4.3.5 Á¡¾¢¡¢ì¸½ì Ì

4.3.5.1 ´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É, ÁÆÁÆôÀ¡É, þ§Äº¡É ¸ôÀ¢Â¢ý Á¦Ð ¦ºøÖõ Á¦û ºì¸¢Âø Ä¡¾ ´Õ AB ±ýÛõ ¸Â¢üÈ¢ý A ±ýÛõ Ó¨ÉÂ¢ø $\underline{W}$ ±¨¼ÔûÇ ¸ð¨¼Â¡ÉÐ þ¨½ì¸ôÀðÎ, B ±ýÛõ Áü¦È¡Õ ÑÉ¢Â¢ø, ¸ð¨¼ §Áø§¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø $\underline{a}$ ±ýÛõ ÓÎì¸ò¨¾ô ¦ÀÚÁ¡Ú ´Õ $\underline{T}$ ±ýÛõ Å¢¨ºÂ¡ÉÐ À¼õ (4.3.5)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ÀÂýÀÎòôÀÎ¸¢È¦¾É¢ø, «ùÅ¢¨ºÂ¢ý ±ñ Á¾¢ô¨Àì ¸¡ ñ ¸.

¸Â¢üÈ¢ý þØÅ¢¨º¨Â $\underline{T}'$ ±Éì¦¸¡û¸. ¸ôÀ¢ ÁÆÁÆôÀ¡¸ þÕôÀ¾¡ø, þùÅ¢ØÅ¢¨º, ¸Â¢Ú ÓØÅ¾¢Öõ ºÁÁ¡ÂÕì Ìõ.

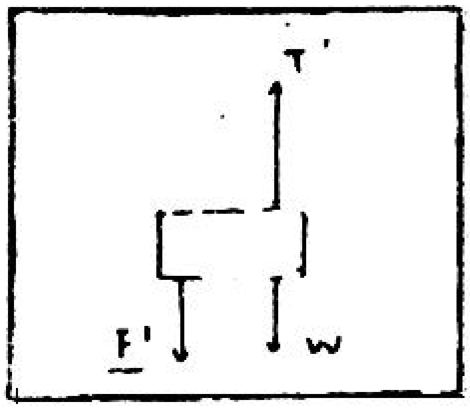


À¼õ 4-3-5

À¼õ 4.3.6-ø ¸ð¨¼Â¡ÉÐ ¾É¢ôÀÎò¾ôÀðÎ, «¾ü§¸üÀ ¾¨¼ÂüÈ ¦À¡Õû Å¢Çì¸ôÀ¼õ ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ.

¸ð¨¼Â¢ý ¿¢¨È $m = \frac{w}{g}$ ¬Ìõ.

¸ð¨¼Â¢ý §Áø «¾ý ±¨¼ $w\downarrow$ Ôõ, ¸Â¢üÈ¢ý þØÅ¢¨º $\underline{T}'$ õ ¦ºÂøÀÎ¸¢ýÈÉ. ¸ð¨¼ §Áø§¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø þÂí¸¢, $\underline{a}$ ±ýÛõ Ó÷ÎÌ¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇ¾¡ø $\underline{F}^i = -m\underline{a}$ ±ýÛõ º¼òÐÅÅ¢¨º ¸£ú§¿¡ì¸¢ ±ÎìÌ¸ôÀÎõ.



À¼õ 4-3-6

±É§Å $\underline{W}\downarrow, \underline{T}'\downarrow, \underline{F}'\uparrow$, ±ýÛõ Å¢¨º¸û ¸ð¨¼Âò ¾ÄõÀ¡ðÊý ¦¸¡û¨¸ôÀÊ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅìÌ¸¢ýÈÉ.

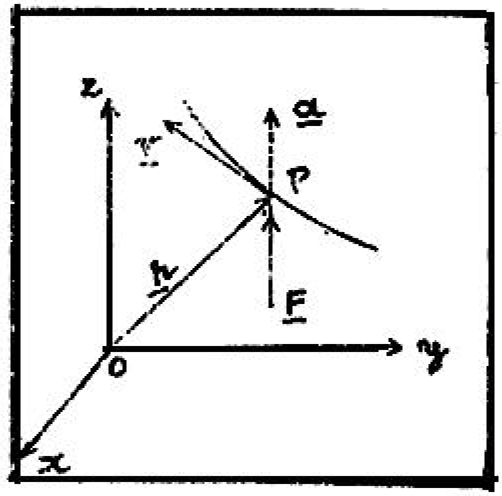
$$\underline{W} + \underline{T}' + \underline{F}' = 0$$
$$-W + T' + ma = 0$$
$$T' = W + ma$$
$$= W + \frac{W}{g}a$$
$$= W\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

§ÁÖõ B ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø §Áø§¿¡ì¸¢Î ¦ºÂøÀÎõ T' ±ýÛõ þØÅ¢¨º, BÂ¢ø ¸£ú§¿¡ì¸¢Î ¦ºÂøÀÎõ ¾¡ì¸Å¢¨º T-ìÌ ºÁÁ¡Ìõ.

±É§Å $T = T' = W\left(1 + \frac{a}{g}\right)$ ¬Ìõ.

4.3.6 ¦¸¡Îì¸ôÀð¼ Å¢¨º¸Ç¡ø ¾¡ì¸ÌüÈ Ð¸Ç¢ý þÂí¸ Å¨Ã¨Âì ¸¡½ø.

À¼õ (4.3.7)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, $\underline{F}$ ±ýÛõ Å¢¨º, m ¿¢¨ÈÔûÇ Ð¸¨Çò ¾¡ìÌÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø, Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä¨Â $\underline{OP} = r(t)$ ±ýÛõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ Å¨ÃÂÚôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. $\underline{OP} = r(t)$



A¼õ 4-3-7

¿¦ä ð¼É¦ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¦¾¦ôÀÊ,

$$m\underline{a} = \underline{F}$$

« ¾¡ÅÐ, $m\frac{d^2 r}{dt^2} = \underline{F}$ ¬ Ì õ.

´Õ Å¦¨ºì Ìô À¾¦Ä¡¸, $\underline{F_1}+\underline{F_2}+...\underline{F_k}..+\underline{F_n}$ ±ý Ûõ Å¦¨º¸û Ð¸Ç¦ø ¦ºÂüÀÎ Å¾¡É¡ø, $m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n}\underline{F_k}$ ¬ Ìõ.

þ í Ì $\{\underline{F_k}\}\ k=1,2,........n$ ±ýÀ¨Å ´ÕÓ¨É Å¦¨º¸û ¬¾Ä¡ø, «ÅüÈ¦ý ¦¾¡ ÌÀÂý Å¦¨º

$$\underline{R} = \sum_{k=1}^{n}\underline{F_k}$$ ¬ Ìõ.

±É§Å

$$m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\sum_{k=1}^{n}\underline{F_k}$$ ±ý Ûõ þÂì¸Å¦Âø ºÁýÀ¡Î ¸¦¨¼ì¸ô¦ÀÚõ.

¦¸¡Îì¸ôÀð¼ $\underline{F}$ ±ýÛõ Å¦¨ºÂ¦ý À¸¦÷×¸Ùì Ì ²üÈÅ¡Ú, þîºÁýÀ¡Î¸Ùì Ìô À¦ýÅÕÁ¡Ú ¾¦÷× ¸¡½Ä¡õ.

(i) Å¦¨ºÂ¦ý $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ÜÚ¸û ¦¸¡Îì¸ôÀð¼¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

$$\underline{F} = F_x\underline{i}+F_x\underline{j}+F_x\underline{k}$$ ±ýÚõ

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}(F_{kx})\right)\underline{i}+\left(\sum_{k=1}^{n}(F_{ky})\right)\underline{j}+\left(\sum_{k=1}^{n}(F_{kz})\right)\underline{k}$$

$$\underline{R} = R_x\underline{i}+R_y\underline{j},+R_z\underline{k}$$ ±ýÚõ ¦¸¡û¸.

« ô§À¡Ð §ÁüÜÈ¢Â ºÁýÀ¡Î¸û Ó¨È§Â

$$m\left(\ddot{x}\underline{i}+\ddot{y}\underline{j}+\ddot{z}\underline{k}\right)=F_x\underline{i}+F_y\underline{j}+F_z\underline{k}$$

$$m\left(\ddot{x}\underline{i}+\ddot{y}\underline{j}+\ddot{z}\underline{k}\right)=R_x\underline{i}+R_y\underline{j}+R_z\underline{k}$$ ¬Ìõ.

þÅü¨È ±ñ½¢ô À¸¢÷×¸Ç¡¸ «¨ÁìÌõ§À¡Ð Ó¨È§Â,
$m\ddot{x}=F_x; m\ddot{y}=F_y; m\ddot{z}=F_z$ ±ýÚõ

$$m\ddot{x}=R_x=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}; m\ddot{y}=R_y=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}; m\ddot{z}=R_z=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}$$

±ýÚõ ºÁýÀ¡Î¸û ¸¢¨¼ìÌõ.

(ii) Å¢¨ºÂ¢ý ÜÚ¸û ¦¾¡Î§¸¡Î, ¦ºíÌòÐÅ¢§¸¡Î ¾¢¨º¸Ç¢ø ¦¸¡ÎìÌôÀð¼ÉÅ¡¸ì ¦¸¡û¸. $\underline{F}$ ±ýÛõ Å¢¨ºÂ¢ý ¦¾¡ÎÅ¨Ã, ¦ºíÌòÐÅ¢§¸¡ðÎô À¸¢÷×¸¨Ç $\underline{F_t};\underline{F_n}$ ±Éì¦¸¡û¸.

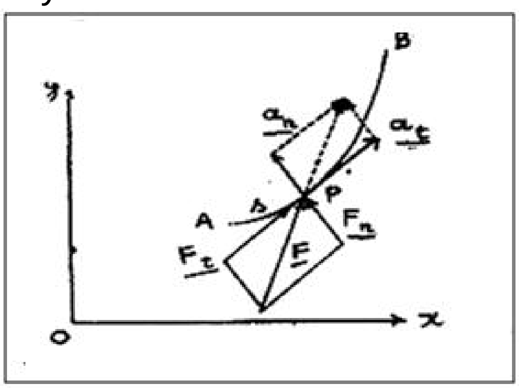
$$\therefore \underline{F}=\underline{F_t}+\underline{F_n}$$

$$\underline{a}=\underline{a_t}+\underline{a_n}$$

$\therefore m\underline{a}=\underline{F}$ ±ýÚõ ºÁýÀ¡Î,

$$m\left(a_t\underline{i_t}+a_n\underline{i_n}\right)=F_t\underline{i_t}+F_n\underline{i_n}$$

« øÄÐ $ma_t=F_t, ma_n=F_n$ ±ýÚõ ¬Ìõ.



À¼õ 4-3-8

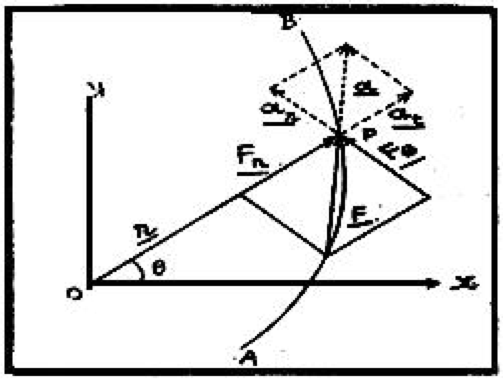
Ð¸û þÂíÌõ Å¨Ç§¸¡ðÊø, ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¿¢¨ÄÂ¡É A ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ, À¼õ 4.3.8-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú. Å¢ø ¦¾¡¨Ä× $\widehat{AP}=s$ ±É «ÇÅ¢¼ôÀð¼¡ø, $v=\frac{ds}{dt}, a=\frac{d^2s}{dt^2}$ ±ýÈ¡Ìõ.

« ô§À¡Ð þÂì¸Å¢Âø ºÁýÀ¡Î¸û

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_t,$$

$$m\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=F_n$$ ±ýÈ¡Ìõ.

(iii) ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨ºÂ¢ý À¸¢÷׸û ¬¨Ãò¾¢¨ºÂ¢Öõ, ÌÚìÌò¾¢¨ºÂ¢Öõ «¨ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.



A¼õ 4-3-9

«ô§À¡Ð

$$\underline{F} = \underline{F_t} + \underline{F_{-}}$$

±É§Å $\underline{a} = \underline{a_t} + \underline{a_{-}}$

$(\text{®}^{\ddot{-}} + 2\text{®}^{\dot{-}})$

±É§Å, $m\underline{a} = \underline{F}$

$$m(\ddot{r} - r\dot{-}^2)\underline{i_t} + m(r\ddot{-} + 2\dot{r}\dot{-})\underline{i_{-}} = F_t\underline{i_t} + F_{-}\underline{i_{-}}$$

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\ddot{r} - r\dot{-}^2\right) = F_t \\ m\left(r\ddot{-} - 2\dot{r}\dot{-}\right) = F_{-} \end{array}\right\}$$

±ýÈ ºÁýÀ¡Î¸¨Çô ¦ÀÈÄ¡õ.

þõ ãýÚ ¿¢¨Ä¸Ç¢Öõ Ð¸Ç¢ý§Áø ¦ºÂøÀÎõ $\underline{F}$ ±ýÛõ Å¢¨º, §¿Ãõ (t), Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä (r) Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ $(\underline{v} = \underline{\dot{r}})$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý º¡÷ÀÄÉ¡¸ «¨ÁÂìÜÎõ.

¦À¡ÐÅ¡¸,

$\underline{F} = \underline{F}\left(t, \underline{r}, \underline{\dot{r}}\right)$ ±É ±Îì¸ôÀÎõ.

±É§Å,

$$m\underline{\ddot{r}} = \underline{F}$$

$$m\left(\underline{a_t} + \underline{a_n}\right) = \underline{F_t} + \underline{F_n}$$

$$m\left(\underline{a_r} + \underline{a_{-}}\right) = \underline{F_r} + \underline{F_{-}}$$

±ýÛõ Å¨¸ì¦¸ØÎ ºÁýÀ¡Î¸¨Çò ¾¢¨ºÂ¢ò ¦¾¡¨¸Â¢¼ø Ó¨È¨Â (Vector Integration)ì ¨¸Â¡ñÎ, ¾¡÷× ¸¡Ï õ§À¡Ð, Ð¸û þÂí Ìõ À¡¨¾Â¡ÉÐ $\underline{r} = \underline{r}(t, \underline{c_1}, \underline{c_2})$ ±ýÛõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢Â¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

þ í Ì $\underline{c}_1,\underline{c}_2$ ± ý À ¨ Å Á¡ÈÄò¾ ¨ ºÂ ¸ û (Constant Vectors). þ Åü ¨ Èò ¦¾¡¼ì ¸ ¿ ¨ Ä ¿Àó¾ ¨ É ¸ û (Initial Conditions) « øÄÐ ±ø ¨ Ä ¿Àó¾ ¨ É ¸ û (Boundary Conditions) â Äõ « ÈÂÄ¡õ.

¬ ¾Ä¡ø $\underline{r}=\underline{r}\left(t,\underline{c}_1,\underline{c}_2\right)$ ± ý ÀÐ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸ ôÀ Î õ§À¡Ð, Ð ¸ Ç ý ¾ ¨ º§Å ¸ õ, Ó Î ì ¸ õ ¬ ¸ Â ¨ Å ± ì ¸ ½ ò¾Öõ ±Ç¾ø ¾÷Á¡ É ì ¸ ôÀ Î õ.

¿ ¨ ¼Ó ¨ ÈÂø, þ ùÅ¾ò ¾ ¨ ºÂ Å ¨ ¸ ì ¦ ¸ Øî ºÁ ý À¡ Î ¸ Ç¡ ¸ Á¡üÈÔõ « ÅüÈü Ì ò ¾÷× ¸ ¡ ½ Ä¡õ. « ô§À¡Ð $\underline{c}_1,\underline{c}_2$ ± ý Û õ Á¡ÈÄò ¾ ¨ ºÂ ¸ û ¬ Ú ¦¾¡Â¡ ì ¸ ½ Â í ¸ ¨ Çô ¦ÀüÈÕ ì Ì õ. « Åü ¨ ÈÔõ Ó ý §À¡Ä§Å ¦¾¡¼ì ¸ , ±ø ¨ Ä ¿Àó¾ ¨ É ¸ ¨ Çô ÀÂ ý À Î òò ¾÷Á¡ É ì ¸ Ä¡õ.

4.3.7 Á¡¾¡ì ¸ ½ ì Ì ¸ û

4.3.7.1 3.27 ¸ . ¸ ± ¨ ¼Ô û Ç ¦À¡Õ û ´ ý ¨ È 1.8 Áð¼÷ ¯ÂÃÓ û Ç ÁÉ¾ ý §Áø§¿¡ì ¸ Â ¿ ¨ Äì Ì òÐ ¾ ¨ ºÂø, 18Á/Å ± ý Û õ (¦¾¡¼ì ¸) §Å ¸ ò¾ø ±Èó¾¡ ý. « Ð « ¨ ¼ó¾ Á ¸ ô¦À¡Â ¯ÂÃò ¨ ¾Ôõ, ¾ ¨ Ã ¨ Âò ¾ÕõÀ Åó¾ ¨ ¼Â ¬ Ì õ §¿Ãò ¨ ¾Ôõ ¸ ¡ ñ ¸ .

¦À¡ÕÇ ý ± ¨ ¼ $=\underline{w}=-w\underline{j}$

¦À¡ÕÇ ý ¿ ¨ È $=\dfrac{w}{g}$

¦À¡Õû §Áø§¿¡ì ¸ Â ¾ ¨ ºÂÄÂ í Ì Å¾¡ø,

$$m\ddot{y}=-w$$

$$\frac{w}{g}\ddot{y}=-w$$

$$\ddot{y}=-g=\text{´ Õ Á¡ÈÄ}$$

$$\therefore \dot{y}=-gt+c_1$$

t = 0 ± ý Û õ§À¡Ð,

$$\dot{y}=v_{\circ}=18\ \text{Á/Å}$$

$$\therefore c_1=18$$

$$\ddot{y}=-gt+18$$

$$y=-g\frac{t^2}{2}+18t+c_2$$

t=0 , y=1.8 Á. ± ý È¡Å¾¡ø

$$c_2=1.8$$

$$\therefore y=-g\frac{t^2}{2}+18t+1.8$$

Á ¸ ¯Â÷ó¾ ÒûÇÂø, þ Ú¾ (final) §Å ¸ Á¡ É Ð â î ºÂÁ¡ Ì õ.

$$\therefore 0=-9.81t+18$$

$$t=\frac{18}{9.81}=\frac{2}{1.09}=1.835\ \text{ÅÉ¡Ê}$$

t=1.835 ÅÉ¡ÊÂø, ¦À¡Õû ¦º ý È ¦¾¡ ¨ Ä×,

y ¦ÀÕÁõ $= \frac{1}{2}\times 9.81(1.835)^2 + 18\times(1.835) + 1.8$

$= 18.31^1$ Á¦

¦À¡Õû ¾¨Ã¨Â « ¨¼Ôõ ¾Õ½ò¾¢ø, y=0

$$\therefore 0 = -\frac{1}{2}\times 9.81t^2 + 18t + 1.8$$

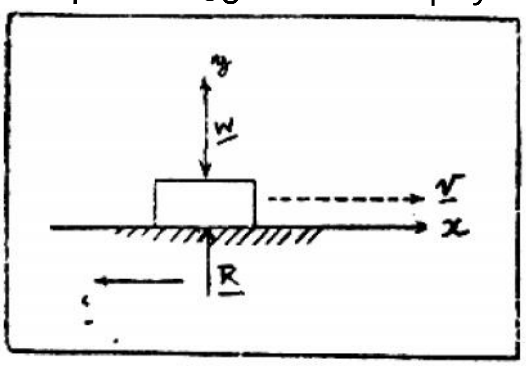
« øÄÐ $4.905t^2 - 18t - 1.8 = 0$ ¬ Ì õ.

$$t = \frac{18\pm 18.955}{9.81}$$

$t_1 = \frac{18+18.955}{9.81} = 3.767$ Å¢É¡Ê ; « øÄÐ $t_2 = -\frac{0.955}{9.81}$

t > 0 ±ýÀ¾¡ø, ¦À¡Õû ¾¨Ã¨Âò ¾¢ÕõÀ¢ « ¨¼Ôõ§À¡Ð, §¿Ãõ 3.767Å¢É¡Ê ¬ Ì õ.

4.3.7.2 80 ¸¢.¸¢ ± ¨¼ ¨ÂÔõ, ¦¾¡¼ì¸ ò¾¢ø 9Á¦ §Å¸ò ¨¾Ôõ ¦¸¡ñ¼ ¦À¡Õû, ÅÆÅÆôÀüÈ ¸¢ ¨¼ò¾Çò¾¢ø Á¡È¡¾ ¯Ã¡ö× Å¢ ¨ºÂ¡ø, ±¾¢÷Ó Îì¸ò ¨¾ô ¦ÀüÚ, µö× ¿¢ ¨Ä ¨Â « ¨¼¸¢ÈÐ. ¯Ã¡ö×ì ¦¸Ø 0.25 ±É¢ø, «Ð µö×¿¢ ¨Ä ¨Â « ¨¼Å¾üÌ ±Îò¾ §¿Ãõ Â¡Ð? «ó§¿Ãò¾¢ø «Ð ¦ºýÈ ¦¾¡ ¨Ä ¨ÅÔõ ¸¡ñ¸.



À¼õ 4-3-10

¦À¡ÕÇ¢ý ¾¨¼ÂüÈ Å¢Çì¸ôÀ¼õ 4.3.10-ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ. ¿¢ ¨Äì Ìò ÐÐ ¾¢ ¨ºÂ¢ø þÂì¸Á¢øÄ¡ ¨ÁÂ¡ø,

$R = W$ ¬ Ì õ.

¯Ã¡ö×Å¢ ¨º þÂì¸ò¾¢üÌ ±¾¢÷ò¾¢ ¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀÎ¦ÁýÀ¾¡ø, ¸¢ ¨¼ò¾¢ ¨ºÂ¢ø

$\underline{F} = -F\underline{i} = -«R\underline{i} = -«w\underline{i}$ þÂì¸õ ¿¢¸úÅ¾¡ø, $\frac{w}{g}\ddot{x} = -«w$

$$\ddot{x} = -0.25g = \frac{1}{4}g$$

$$\therefore \dot{x} = -\frac{1}{4}gt + c_1$$

$t = 0$ ±ýÛõ§À¡Ð,

$\dot{x} = v_0 = 9$

$\therefore c_1 = 9$

±É§Å $\dot{x} = -\frac{1}{4}gt + 9$

¦À¡Õû µö×¿¦¨Ä¨Â «¨¼Ôõ§À¡Ð, þÚ¾¦§Å¸õ âîº¦ÂÁ¡Ìõ. ¬¾Ä¡ø «Ð µö×¿¦¨Ä¨Âô ¦ÀÚÅ¾ü¸¡É ±Îò¾ §¿Ãõ

$0 = -\frac{1}{4}gt + 9$

$\therefore t = \frac{36}{g} = \frac{36}{9.81} = \frac{4}{1.09} = 3.67$ Å¢É¡Ê

§ÁÖõ $x = -\frac{1}{4}g\frac{t^2}{2} + 9t + c_2$

$t = 0$ ±É¢ø, $x = 0$, $\therefore 0 = c_2$

¬¸§Å,

$x = -\frac{1}{8}gt^2 + 9t$

t = 3.67 Å¢É¡ÊÂ¢ø, ¦À¡Õû ¦ºýÈ ¦¾¡¨Ä×,

$x = -\frac{1}{8} \times 9.81 \times (3.67)^2 + 9 \times 3.67 = -16.53 + 33.03$

$= 16.50$ ¬Ìõ

4.3.7.3 19.62 ¸¢.¸¢. ±¨¼¦Ôû Ç Ð¸Ç¢ø, $\underline{F_1} = (-7\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k})$ ¸¢.¸¢ Å¢¨º, $\underline{F_2} = -16\underline{i}$ ¸¢.¸¢.Å¢¨º $\underline{F_3} = \left(7\underline{i} + 10\underline{j} - 5\underline{k}\right)$ ¸¢.¸¢Å¢¨º ±ý Ûõ Å¢¨º¸û ¦ºÂøÀÎ Å¾¡¸¢ø, «¾ý Ó Î ì¸ò¨¾¾ì ¸¡ ñ ¸.

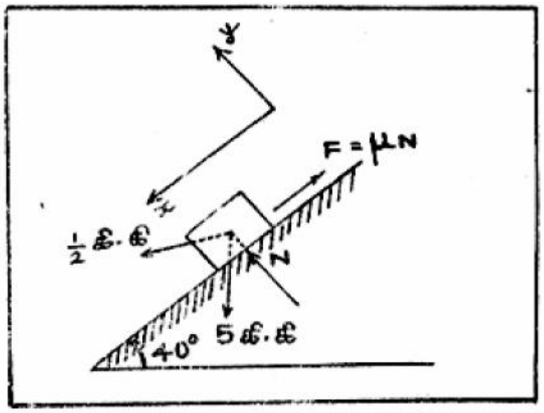
$m\underline{a} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3}$

$\frac{19.62}{9.81}\underline{a} = \left(-7\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k}\right) - \left(16\underline{i}\right) + \left(7\underline{i} + 10\underline{j} - 5\underline{k}\right)$

$= -16\underline{i} + 14\underline{j}$ ¸¢¸¢ Å¢¨º

$\therefore \underline{a} = \left(-8\underline{i} + 7\underline{j}\right)$ Á/(Å¢É¡Ê)^2

4.3.7.4 5 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼¦Ôû Ç ¦ÀðÊ ´ýÚ ¸¢¨¼¾¢¨ÇòÐ¼ý 40^0 §¸¡½ò¨¾ «¨Áì Ìõ ÅÆÅÆôÀüÈ º¡ö× ¾Çò¾¢ø, $\frac{1}{2}$ ¸¢.¸¢. ±¨¼¦ÔûÇÐõ, ¸¢¨¼Â¡¸ î ¦ºÂøÀÎ ÅÐÁ¡É Å¢¨ºÂ¡ø ¾¡ì¸ôÀÎ Î, ¸¡ú§¿¡ì¸¢ þÂí Ì¸¢ÈÐ. ÅØì Ìõ ¾Ã¡ö× ì¦¸Ø 0.10 ±É¢ø, ¦ÀðÊÂ¢ý Ó Î ì¸ò¨¾¾ì ¸¡ ñ ¸.



À¼õ 4-3-11

¦ÀðÊ¨Âò ¾É¢ôÀÎò¾¢ «¾ý §Áø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º û À¼õ 3.11-ø ¸¡ð¼ôÀðÎ ûÇÉ. (x,y) ±ý Ûõ «îÍ¸¨ ÇÔõ À¼ò¾¢ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ±Î ì¸×õ.

$\ddot{y}=0$ ±ýÈ¡Å¾¡ø

$$\sum F_{ky}=0$$

«¾¡ÅÐ $-5\cos 40^\circ + N - \frac{1}{2}\sin 40^\circ = 0$

$$N = 5\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\sin 40^\circ$$

$= 4.1514$ ¸¢.¸¢. Å¢¨º

¯Ã¡ö×ì ¦¸Ø = 0.10 ±ýÀ¾¡ø

¯Ã¡ö× Å¢¨º $F = «N = 0.10 \times 4.1514$

= 0.41514 ¸¢.¸¢. ¬ Ì õ.

º¡ö×¾Çò¾¢ø ¦ÀðÊ ¸Ú§¿¡ì¸¢ þÂí Ì Å¾¡ø

$m\ddot{x}\sum F_{kx}$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î

$$\frac{w}{g}\ddot{x} = 5\sin 40^\circ - \frac{1}{2}\cos 40^\circ - 0.41514$$

$$\frac{5}{9.81}\ddot{x} = 2.41586$$

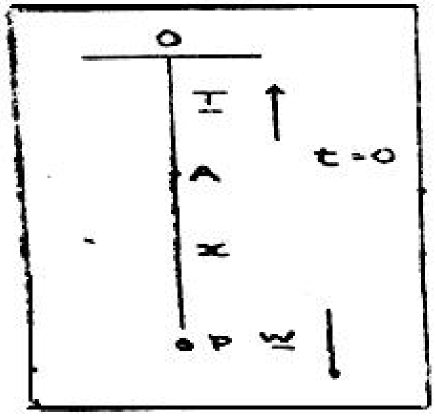
$$\ddot{x} = \frac{2.41586 \times 9.81}{5}$$

$= 4.704$ Á/(Å¢É¡Ê)^2

±É§Å, ¦ÀðÊÂ¡ÉÐ $= 4.704$ Á/(Å¢É¡Ê)^2 ±ý Ûõ Ó Î ì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇÐ.

4.3.7.5 §ÁøÓ¨É ¦À¡Õò¾ôÀð¼ ´Õ Á¢ðº¢ÔÚ þ¨ÆÂ¢ý ¸Ú Ó¨ÉÂ¢ø 5.4 ¸¢.¸¢. ±¨¼¦ÔûÇ Ð¸û ´ýÚ ¦¾¡í¸Å¢¼ôÀðÎ ûÇÐ. þ¨ÆÂ¢Ä¨ÁÔõ þØÅ¢¨º¨Â T = 5.4 + 9.27t² ±ý Ûõ (t Å¢É¡ÊÂ¢ø) §¿Ãò¨¾¾î º¡÷ó¾ ºÁýÀ¡Î Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. §¿Ãõ t =0 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð Ð¸û «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢Ö ûÇÐ.

4 Å¢É¡Êì Ì ô À¢Èì , Ð¸û þÂí ¸¢Â ¦¾¡ ¨Ä×, ¾¢ ¨º§Å¸õ ¬¸¢ÂÅü ¨Èì ¸¡ ñ ¸. Ð¸û ¸¦ú§¿¡ì ¸¢ þÂí ¸¢Â ¦¾¡ ¨Ä×, ¾¢ ¨º§Å¸õ ¬¸¢ÂÅü ¨Èì ¸¡ ñ ¸. Ð¸û ¸¦ú§¿¡ì ¸¢ þÂí Ì Å¾¡¸¢ø, þÂì ¸Å¢Âø ºÁý À¡ Î.



À¼õ 4-3-12

$m\ddot{x} = mg - T$

$$\frac{5.4}{9.81}\ddot{x} = 5.4 - \left(5.4 + 0.27t^2\right)$$

$$\ddot{x} = 0.4905t^2$$

$$\dot{x} = 0.4905\frac{t^3}{3} + c_2$$

$t = 0, x = 0$ ± ý È¡Å¾¡ø

$$0 = 0 + c_1$$

$$x = -0.1635\frac{t^4}{4} + c_2$$

$t = 0, x = 0$ ± ý È¡Å¾¡ø

$$\therefore x = -0.1635\frac{t^4}{4}$$

t=4 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ ûÇ§À¡Ð,

$\dot{x} = -0.1635 \times 64 = -10.464$ மீ / வி² ¬ Ì õ.

« ô§À¡Ð Ð¸û ¦º ýÈ ¦¾¡ ¨Ä× (¸¦ú§¿¡ì ¸¢Â ¾¢ ¨ºÂ¢ø)

$x = -0.1635 \times \frac{(4)^2}{4} = -10.464$ மீ ¬ Ì õ.

4.3.8 ±È¦À¡Õû þÂì¸õ (Projectile motion)

4.3.8.1 Óý Û ¨Ã

þôÀ Ì¾ÂØ, ¦º í ÌòÐò ¾Çò¾ø Â¡§¾Û ¦Á¡Õ ¾¨ºÂø, Â¡§¾Û ¦Á¡Õ ¾¨º§Å¸òÐ¼ý ±ÈÂôÀð¼ Ð¸û ´ ýÈý þÂì¸õ ¸Õ¾ôÀÎõ. þùÅ¾ þÂì¸õ §¿÷§¸¡ðÎ þÂì¸õ (Rectilinear motion) «øÄÐ ¨ÁÂ Å¨ºì ÌðÀð¼ þÂì¸õ (Central-force motion) ±ýÀÅüÚì Ì §ÅÚÀð¼Ð. ¿ä ð¼ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¾¨Âô ÀÂýÀÎò¾¾ì ¸¨¼ì Ìõ Ð¸Çý þÂì¸ÅÂø ¾¨ºÂ Å¨ ¸ì¦¸Øî ºÁýÀ¡ð¨¼ò ¦¾¡¨¸Â¼ø (Integration) ¦ºöÐ ¦¾¡¼ì¸ ¿Àó¾¨É ¨Çô ÀÂýÀÎò¾, ®÷ôÒ Á¡ÈÄ¸û (Constants of integration) Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. «ô§À¡Ð Ð¸Çý ¿¨Ä¨Âô ¦ÀÈÓÊ¸ÈÐ.

¦À¡ÐÅ¡¸ §¿Ãõ (Á¡È) Ð¨½ÂÄ¸¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. t ±ý Ûõ §¿Ãò¾ø Ð¸Çý ¿¨Ä¨Â Å¨ÃÂÚì Ìõ ¿¨Äò¾¨ºÂ-þý ± ñ ½ôÀ¸÷×¸§Ç «¾ý «îÌò ¦¾¡¨Ä×¸Ç¡ Ìõ. þò¦¾¡¨Ä×¸û, Ð¨½ÂÄ¸¡É §¿Ãò¾ý º¡÷ÀÄý¸Ç¡¸ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. Ð¨½ÂÄ¨¸ ÅÄì ÌÅ¾¡ø (eliminate) «îÌò ¦¾¡¨Ä×¸Úì ÌûÇ ¦¾¡¼÷¨À ¦ÅÇôÀÎòÐõ ´Õ ºÁýÀ¡Î ¸¨¼ì Ìõ. þÐ§Å Ð¸Çý Å¦ÍÀ¡¨¾¨Â (Trajectory) Å¨ÃÂÚì Ìõ þÂì¸î ºÁýÀ¡¼¡ Ìõ. (Equation of motion) þùÅ¾ þÂì¸õ ±È¦À¡Õû þÂì¸õ ±ÉôÀÎõ. ±È¦À¡Õû, ¦À¡ÐÅ¡¸ ´Õ Ð¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ.

Ð¸Ç¡ÉÐ, ÃÃó¾¦ÅÇÂø ±ÈÂôÀÎõ§À¡Ð «¾ý§Áø ÒÅÂ÷ôÒ ¸¡Ã½Á¡¸ ²üÀÎõ «¾ý ±¨¼Ôõ, þÂì¸ò¾üÌ þ¨¼äÚ Å¨ÇÅì¸ìÜÊÂ ¸¡üÈý ¯Ã¡ö×ò¾¨¼ Å¨ºÔõ (resistance of air) ¦ºÂøÀÎ ¸ýÈÉ. §ÁÖõ þÂì¸Á¡ÉÐ ÒÅôÀÃôÀüÌ «Õ¸¡¨ÁÂø ²üÀÎÅ¾¡¸×õ §Áü¦¸¡ûÇôÀÎõ. «ô§À¡Ð ÒÅÂ÷ôÒ ÓÎì¸ò¾ý Á¡ÚÀ¡Î¸û ÒÈì¸½ì¸ò¾ì¸ «Ç×ûÇ¾¡¸×õ þÕìÌõ. ±É§Å ±È¦À¡ÕÇý þÂì¸ò¨¾ ±Ç¾¡¸ì¸¼, ÒÅÂ÷ôÒ ÓÎì¸õ Á¡È¡Áø þÕì¸È¦¾ýÚõ, þÂì¸ò¾üÌ ¸¡üÚ ¯Ã¡öÅÉ¡ø ²üÀÎõ ¾¨¼ ÒÈì¸½ì¸ò¾ì¸ «Ç×¨¼ÂÐ ±ýÚõ ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

4.3.8.2 ºÄ Å¨ÃÂ¨È¸û

±È¦À¡Õû þÂì¸ò¾ø, Àý ÀÅÕõ ¦º¡ü¸û ÀÂýÀÎò¾ôÀÎõ. «ÅüÈý Å¨ÃÂ¨È¸û ÀýÅÕÁ¡Ú

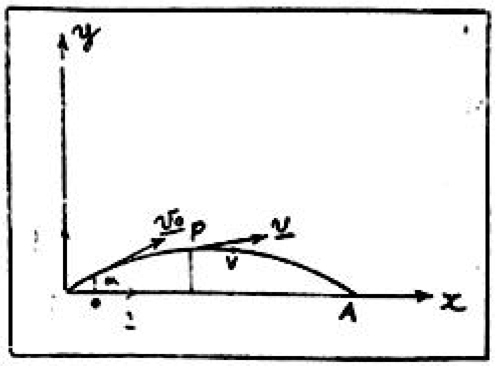
1. ±È¾¡É õ(Point of Projection)
   Ð¸û ±ôÒûÇÂÄÕóÐ ±ÈÂôÀÎ¸È§¾¡ «ôÒûÇ§Â ±È¾¡ÉÁ¡Ìõ.
2. ±È§¸¡½õ (Angle of Projection)
   þÐ ¦ºí ÌòÐò ¾Çò¾ø, Ð¸û ±ÈÂôÀÎõ ¾¨º, ±È¾¡É ÅÆ§Â «ò¾Çò¾ø ¸¨¼¾ð¼Á¡¸ Å¨ÃÂôÀÎõ §¸¡ðÎ¼ý «¨Áì Ìõ §¸¡½Á¡Ìõ.
3. ÅÍÀ¡¨¾ (Trajectory)
   ±ÈÂôÀð¼ Ð¸û þÂí Ìõ À¡¨¾ ÅÍÀ¡¨¾ «øÄÐ ±È¦À¡ÕûÀ¡¨¾ ±ÉôÀÎõ.
4. ÅîÍ (Range)
   ±È¾¡Éò¾üÌõ, «ò¾¡Éò¾ý ÅÆ§Â ¦ºøÖõ Â¡§¾Û ¦Á¡Õ ¾Çò¨¾, ÅÍÀ¡¨¾ ºó¾ìÌõ ÒûÇìÌõ þ¨¼§ÂÔûÇ ¦¾¡¨Ä×, «ò¾Çò¾ý ±È¦À¡Õû ÅîÍ ±ÉôÀÎõ. ±È¾¡Éò¾ý ÅÆ§Â Å¨ÃÔõ ¸¨¼ò¾Çò¾ø «¨ÁÔõ ¸¨¼ð¼ò¦¾¡¨Ä×, ¸¨¼ÅîÍ (Horizontal Range) ±ÉôÀÎõ.

5. ÀÈôÒ §¿Ãõ (Time of Flight)
Ð¸û ±ÈÂôÀð¼ ¸½ò¾ÄÕóÐ, ±È¾¡Éò¾ý ÅÆÂ¡¸î ¦ºøÖõ ¸¨¼ò¾Çò¨¾î ºó¾ì Ìõ Å¨Ã ¸ÆÔõ §¿Ãõ, ÀÈôÒ §¿ÃÁ¡Ìõ.

4.3.8.3 ±È¦À¡Õû þÂí ÌõÀ¡¨¾ ´Õ ÀÃÅ¨Ç ±É ì¸¡ Ï ¾ø

¸¨¼ò¾Çò¾ø ²§¾Û ¦Á¡Õ ÒûÇÂÄÕóÐ ²üÈì §¸¡½õ ~ ±ýÚûÇ ¾¨ºÂø, $\underline{v_0}$ ±ý Ûõ ¦¾¡¼ì¸ ¾¨º§Å¸òÐ¼ý ´Õ Ð¸û ÀÃó¾ ¦ÅÇÂø ±ÈÂôÀ Î Å¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

±È¾¡ÉôÒûÇ¨Ã, O ±ý Ûõ ¦¾¡¼ì¸ôÒûÇÂ¡¸ì ¦¸¡û¸. O-Åý ÅÆ§Â Å¨ÃÔõ ¸¨¼ò¾Çò¨¾ ÅÍÀ¡¨¾ OA ±ý Ûõ þ¼ò¾ø ºó¾ì¸ð Îõ. ±ý Ûõ ¸¨¼Áð¼ì §¸¡ð¨¼ x «îº¡¸×õ, O-Åø OA-×ì Ìî ¦ºí Ìò¾¡¸, À¼õ 4.3.13-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¨ÃÔõ OB ±ý Ûõ §¸¡ð¨¼ «îº¡¸×õ ¦¸¡û¸.



A¼õ 4-3-13

O-ÅÄÕóÐ, m ¿¨È¨Âô¦ÀüÈ Ð¸¦Ç¡ýÚ OX ¯¼ý ~ ±ý Ûõ §¸¡½îº¡öÅø v_0 ±ý Ûõ ¦¾¡¼ì¸ò ¾¨º§Å¸òÐ¼ý (x,y) ±ý Ûõ ¦ºí ÌòÐò ¾Çò¾ø ±ÈÂôÀ Î Å¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

$$v_0 = v_0 \cos\sim \underline{i} + v_0 \sin\sim \underline{j}$$ ¬ Ìõ.

t ±ý Ûõ §¿Ãò¾ø, Ð¸û P(x,y) ±ý Ûõ ¿¨ÄÂÖûÇ§À¡Ð, «¾ý§Áø ¸¡üÈý ¾¨¼Â¡ÉÐ ÒÈì¸½ì¸ôÀ Î ¦ÁÉø, ÒÅÂ÷ôÒ ¸¡Ã½Á¡¸ ²üÀ Îõ Å¨ºÂ¡É ¾ý ±¨¼ W = mg ´ý§È ¿¨Äì ÌòÐò ¾¨ºÂø, ¸úÓ¸Á¡¸î ¦ºÂøÀ Îõ. ÒÅÂ÷ôÒ Ó Î ì¸õ g ±ýÀÐ ´Õ Á¡ÈÄÂ¡¸ì ¸Õ¾ôÀ Î Å¾¡ø,

$$\underline{W} = -mg\,\underline{j}$$ ±ýÀÐ ´Õ Á¡È¡ Å¨ºÂ¡ Ìõ.

§ÁÖõ, $\underline{r} = \underline{OP} = x\underline{i} + y\underline{j}$ ¬ Ìõ.

±É§Å, $\underline{F} = m\underline{a}$ ±ý Ûõ þÂì¸Å¨¸ì ¦¸Øò ¾¨ºî ºÁýÀ¡Î, þ í Ì

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -mg\,\underline{j}$$

«¾¡ÅÐ, $\frac{dv}{dt} = -g\,\underline{j}$ ±ýÈ¡ Ìõ.

þ îºÁýÀ¡ð¨¼ò ¦¾¡¨¸Â¼,

$$\int_{\underline{v_0}}^{v} dv = \int_{O}^{t} -g\,\underline{j}\,dt$$

$$\underline{v}-\underline{v}_0=-gt\,\underline{j}$$

« øÄÐ $\underline{v}=-gt\,\underline{j}+\underline{v}_\circ$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î ¸¢¨¼ì Ìõ.

þîºÁýÀ¡ Î, Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾, ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ.

$\frac{d\underline{r}}{dt}=v=-gt\,\underline{j}+\underline{v}_0$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ð¨¼ ÁÚÓ¨È ¦¾¡¨¸Â¢Î ¦ºö¾¡ø,

$$\underline{r}=\int_O^t\left(-gt\,\underline{j}+\underline{v}_0\right)dt$$

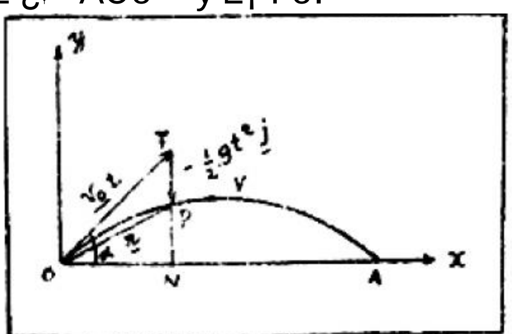
$$=-g\frac{t^2}{2}\underline{j}+v_\circ t$$ ±ýÈ¡ Ìõ.

±É§Å t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä¨Â

$$r=-\frac{1}{2}-gt^2\,\underline{j}+\underline{v_0 t}$$ ±ý Ûõ ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ.

þÐ§Å ¾¢¨ºÂ¢ Ó¨ÈÂ¢ø Ð¸Ç¢ý ÅÍÀ¡¨¾¨Â «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ.

þîºÁýÀ¡ð¨¼ì ¸ÅÉÁ¡¸ ¬Ã¡öó¾¡ø, À¢ýÅÕõ ¦À¡Õû Å¢Çì¸ò¨¾ô ¦ÀÈÄ¡õ. t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, ÅÍÀ¡¨¾Â¢ø, Ð¸Ç¢ý ¿¢¨ÄÔõ (P) «òÐ¸û Å¢¨º§ÂÐÁ¢ýÈ¢ ´§ÃºÀ¡É þÂì¸òÐ¼ý «§¾§¿Ã þ¨¼¦ÅÇ¢Â¢ø ¦¾¡¼ì¸ò ¦¾¡ÎÅ¨Ãô À¡÷¨Åì §¸¡ðÊø ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¿¢¨Ä (T) ´ý¨È «¨¼óÐ, «ó¾ §¿Ã þ¨¼¦ÅÇ¢Â¢ø «ôÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ µö× ¿¢¨ÄÂ¢ø ÒÈôÀð Î ÒÅ¢Â¢÷ôÒ Å¢¨ºÂ¢É¡ø «¨¼¸¢ýÈ ¿¢¨ÄÔõ ´ýÈ¡ Ìõ.



À¼õ 4-3-14

²¦É É¢ø, ´Õ Å¢¨ºÔõ ¦ºÂøÀ¼¡ÁÄ¢Õó¾¡ø, t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸û T±ý Ûõ ÒûÇ¢¨Â «¨¼óÐ À¼õ 4.3.14-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú,

$\underline{OT}=v_0\underline{i}$ ±ý Ûõ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢¨Âô ¦ÀüÈ¢Õì Ìõ §ÁÖõ «¾ý ±¨¼ «§¾ §¿Ãò¾¢ø, «¨¾ ¿¢¨Äì Ìò¾¡¸ì ¸ÚÁ§¿¡ì¸¢ $TP=g\frac{t^2}{2}$ ±ý Ûõ ¦¾¡¨Ä×ì Ì ¾¡úò¾¢ þÕì Ìõ. «¾¡ÅÐ, Ð¸û T-Â¢Ä¢ÕóÐ, $TP=\frac{1}{2}gt^2\,\underline{j}$ ±ý Ûõ Áü¦È¡Õ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢¨Âô ¦ÀüÈ¢Õì Ìõ.

±É§Å, t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Ä¨Â, $\underline{v_0 t} = \frac{1}{2}gt^2\underline{j}$ ±ý Ûõ Å¢¨Ç×ò¾¢¨ºÂ¢ «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ. ¬É¡ø, «§¾§¿Ãò¾¢ø, Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢ $\underline{OP} = r$ ±ý À¾¡ø, $\underline{r} = \underline{v_0}t - \frac{1}{2}gt^2\underline{j}$ ±ý È¡¸¢ÈÐ.

þ í Ì $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$

$$\underline{v_0} = v_0\cos\sim\underline{i} + v_0 sin\sim\underline{j}$$

±ýÀ¾¡ø, ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢î ºÁýÀ¡ðÊý ±ñ ½¢ô À¸¡÷×¸¨Ç þÕÒÈÓõ ´ôÀ¢¼,

$$x = v_0\cos\sim t$$

$$y = v_0 sin\sim t - \frac{1}{2}gt^2$$

±ý Ûõ ±ñ ½¢î ºÁýÀ¡ Î¸¨Çô ¦ÀÈÄ¡õ. þÅüÈ¢Ä¢ÕóÐ t ±ý Ûõ Ð¨½ «Ä¨¸ ÅÄ¢Ì¸¢¼,

$$y = v_0 sin\sim\left(\frac{x}{v_0\cos\sim}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{{v_0}^2\cos^2\sim}\right)$$

$$= x\tan\sim - \frac{gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\sim}$$

¬ Ìõ.

þî ºÁýÀ¡ð¨¼ô À¢ýÅÕÁ¡Ú Á¡üÈ¢ ±Ø¾Ä¡õ

$$x^2 - \frac{2{v_0}^2}{g}sin\sim\cos\sim = -\frac{2{v_0}^2\cos^2\sim y}{g}$$

$$\left(x - \frac{{v_0}^2 sin\sim\cos\sim}{g}\right)^2 = \frac{{v_0}^4\sin^2\sim\cos^2\sim}{g^2} - \frac{2{v_0}^2\cos^2\sim y}{g}$$

$$= \frac{-2{v_0}^2\cos^2\sim}{g}\left(y - \frac{{v_0}^2\sin^2\sim}{2g}\right)$$

«¾¡ÅÐ,

$$\left(x - \frac{v^2_\circ\sin 2\sim}{2g}\right) = \frac{-2v^2_\circ\cos^2\sim}{g}$$

$$\left(y - \frac{v^2_\circ\sin 2\sim}{2g}\right)$$

þî ºÁýÀ¡Î, $\frac{v_0^2\sin 2\sim}{2g}, \frac{v_0^2\sin^2\sim}{2g}$ ±ý Ûõ ¯îº¢¨ÂÔõ (vertex) $\frac{2v^2_\circ\cos^2\sim}{g}$ ±ý Ûõ ¦ºùÅ¸Äò¨¾Ôõ (Latus rectum)_¦¸¡ñ¼ ´Õ ÀÃÅ¨Ç¨Âì Ì È¢ì Ìõ. «¾ý «îÍ ¦ºíÌòò¾¡Ìõ, ¸¢ú§¿¡ì¸¢Ôõ ¯ûÇÐ.

(Ì È¢ôÒ (i) À¼õ (4.21)-ø V ± ý ÀÐ ÀÃÅ ¨ ÇÂ¢ ý ¯ î º¢ôÒ û Ç¢Â¡ Ì õ.

(ii) S ± ý Û õ ÒûÇ¢, Ì Å¢ÂÁ¡ É ¡ø (focus)

$$vs = \frac{1}{4} \times$$ ¦ º ùÅ ¸ õ.

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2v_0{}^2 \cos^2 \sim}{g}\right)$$

$$= \frac{v_0{}^2 \cos^2 \sim}{2g}$$

(iii) ¦ º ùÅ ¸ Äõ $\frac{2v_0{}^2 \cos^2 \sim}{g}$ ± ý À¾¡ ø,

ÀÃÅ ¨ ÇÂò¾¢ ý ¦ º ùÅ ¸ ÄÓõ, « ¾É ¡ø « ¾ ý ÀÕÁ Û õ, ¦¾¡¼ì ¸ ì ¸¢ ¨ ¼ §Å ¸ ò ¨ ¾î º¡÷ó¾¢Õì ¸¢ ý ÈÉ ¦ Å ý Úõ, ¦¾¡¼ì ¸ ¿¢ ¨ Ä ì Ì òÐ §Å ¸ ò ¨ ¾î º¡Ã¡ ± ý ÀÐõ ¸ ÅÉ¢ì ¸ ò¾ì ¸ Ð.

(iv) V Â¢Å¢ÕóÐ VY ± ý Û õ ¿¢ ¨ Ä ì§ ¸ ¡ð ¨ ¼ì ¸¦úÓ ¸ Á¡ ¸ Å ¨ Ãó¾¡ ø, ÀÃÅ ¨ ÇôÀ¡ ¨ ¾ « ì§ ¸ ¡ðÊü Ì þÕÒÈÓ í ¸ Ç¢Öõ ´ §Ã ºÃ¡ ¸ þÕ ì Ì õ.

(v) 5ÅÐ ºÁ ý Å¡ðÊø, $y = 0$ ±É ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼¡ø $x = 0$

« øÄÐ $x = \frac{2u^2 \sin \sim \cos \sim}{g} = u^2 \frac{\sin 2\sim}{g}$ ± ý ÀÐ ¸¢ ¨ ¼ì Ì õ.

$x = 0$ ± ý ÀÐ, À¡ ¨ ¾Â¢Ä ¨ ÁÔõ ¦¾¡¼ì ¸ ôÒ û Ç¢ ¨ Â ì Ì È¢ì ¸¢ÈÐ. ÁüÈ

Á¾¢ôÀ¡ É $x = u^2 \frac{\sin 2\sim}{g}$ ± ý ÀÐ ¸¢ ¨ ¼¼Å¢î Í (horizontal range) OA ³ ì Ì È¢ì ¸¢ÈÐ.)

4.3.8.4 ÀÈôÒ §¿Ãò ¨ ¾ì ¸ ¡ Ï ¾ø (To find the total time of flight)

ÀÈôÒ§¿Ãõ T ¬ Ì ¸ . ¿¢ ¨ Ä ì Ì òÐ þÂ ì ¸ ò ¨ ¾,

$$y = v_0 \sin \sim t - \frac{1}{2} g t^2$$

± ý Û õ ºÁ ý À¡ Î Å ¨ ÃÂÚ ì ¸¢ ý ÈÐ.

±È¢¦À¡Õû ¸¢ ¨ ¼ò¾Çò¾¢ø A ± ý Û õ ÒûÇ¢ ¨ Â « ¨ ¼Ôõ§À¡Ð, « Ð ¿¢ ¨ Ä ì Ì òÐ ¾¢ ¨ º Â¢ø ¸¼ó¾ ¦¾¡ ¨ Ä× â î º¢ÂÁ¡ Ì õ.

±É§Å,

$$0 = v_0 \sin \sim T - \frac{1}{2} g t^2$$

« ¾¡ÅÐ, T=0 « øÄÐ $T = \frac{2v_0 \sin \sim}{g}$

T=0 ± ý ÀÐ ¦¾¡¼ì ¸ ò¾¢ø ±È¢ÂôÀ Î õ §¿Ãò ¨ ¾ì Ì È¢ôÀ¾¡ø, ÀÈôÒ §¿ÃÁ¡ É Ð $T = \frac{2v_0 \sin \sim}{g}$ ¬ Ì õ.

4.3.8.5 ±È¦À¡Õû « ¨¼Ôõ ¦ÀÕÁ ¯ÂÃõ

Ð¸û Á¸ô¦À¡Â ¦¾¡¨ÄÅÖûÇ¾¡¸ø, ¿¨Äì ÌòÐò ¾¨ºÂø, ÓÊ× §Å¸õ âîºÂÁ¡ Ìõ. ±É§Å,

$V^2 = u^2 + 2fs$ ±ý Û õ þÂì¸î ºÁýÀ¡ðÊÄÕóÐ,

$0 = v_\circ^2 \sin^2 \sim - 2g$ (y ¦ÀÕÁõ) ±ýÀÐ ¸¨¼ì Ìõ.

$\therefore$ y ¦ÀÕÁõ $= \frac{2v^2_\circ \sin^2 \sim}{2g}$

þÐ§Å ¯îºôÒûÇÂý (V-ý) y «îÍò¦¾¡¨ÄÅ¡ Ìõ.

4.3.8.6 ¦ÀÕÁ ¯ÂÃò¨¾ « ¨¼Âò §¾¨ ÅÂ¡É §¿Ãõ

¦ÀÕÁ ¯ÂÃò¨¾ « ¨¼Â ±ÎòÐì¦¸¡û Ùõ §¿Ãõ T ±ýÈ¡ø, $v = u + ft$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ðÊÄÕóÐ, $0 = v_\circ sin\sim - gT_1$ ±ýÀÐ ¸¨¼ì Ìõ.

$$\therefore T_1 = \frac{v_0 sin\sim}{g}$$

$T_1 = \frac{t}{2}T$ ±ýÀ¾¡ø, ÀÈôÒ §¿Ãõ, Á¸ ¯Â÷ó¾ ÒûÇì Ìî ¦ºøÖõ §¿Ãò¾ý þÕÁ¼í¸¡ Ìõ.

4.3.8.7 ±È¾¡Éò¾ý ÅÆÂ¡¸î¦ºøÖõ ¸¨¼òÇò¾ýÁÐ Åîì¨ºì ¸¡½ø. (þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÅÆ)

t §¿Ãò¾ø Ð¸û ¸¼ó¾ ¸¨¼Áð¼ò ¦¾¡¨Ä×

$$x = v_0 \cos\sim t$$

±É§Å, $T = \frac{2v_0 \sin\sim}{g}$ ±ý Ûõ ÀÈôÒ §¿Ãò¾ø ¸¼ó¾ ¦¾¡¨Ä×,

$$x = v_0 \cos\sim t.\frac{2v_0 \sin\sim}{g}$$

$$= 2v_0{}^2.\frac{\sin\sim \cos\sim}{g}$$

«ì¸½ò¾ø, Ð¸û A-Âø ¯ûÇ¡ø, ¸¨¼òÇò¾ø ±ÈÐ¸Çý Åîí, OA=R ±Éý,

$$R = \frac{2v_0{}^2 \sin\sim \cos\sim}{g}$$

§ÁÖõ $R = \frac{2(v_0 \sin\sim)(v_0 \cos\sim)}{g}$ ±ýÀ¾¡ø ¸¨¼Åîº¡ÉÐ, ¦¾¡¼ì¸ì¸¨¼, ¿¨Äì ÌòÐ §Å¸í¸Çý ¦ÀÕì¸ò¾ý þÕÁ¼í ¨¸ -¬ø Å ÌòÐ ÅÕõ Á¾ôÀÇÅ¡ Ìõ. ¾ÅÃ×õ,

$$R = \frac{2v_0{}^2 \sin\sim \cos\sim}{g}$$

$$= v_0^{\,2}\frac{\sin 2\sim}{g}$$

$$= 2\left[v_0^{\,2}\frac{\sin 2\sim}{g}\right] = v_0^{\,2}\frac{\sin 2\sim}{g}$$

±É§Å ¸¢¨¼ò¾Ç Å¦î º¡ÉÐ, ¯îº¢ôÒûÇ¢Â¢ý ¸¢¨¼ò¦¾¡¨ÄÅ¢ý þÕ Á¼í¸¡Ìõ.

4.3.8.8 ¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ ±È¢¾¢¨º§Å¸õ ´ýÈ¢ü Ì, Ð¸Ç¢ý ¦ÀÕÁ ¸¢¨¼Å¦î ¨ºÔõ ±È¢Ôõ ¾¢¨º ¨ÂÔõ ¸¡ Ï ¾ø.

¸¢¨¼Å¦î º¡ÉÐ,

$$R = v_0^{\,2}\frac{\sin 2\sim}{g}$$

$$= \frac{v_0^{\,2}}{g}\sin 2\sim$$

¬ Ìõ.

v_0, g ±ýÀ¨Å Á¡È¢Ä¢¸Ç¡É¾¡ø, R ¦ÀÕÁ Á¾¢ô¨Àô¦ÀÈ, $\sin 2\sim$ ¦ÀÕÁ Á¾¢ô¨Àô ¦ÀÈ§Å ñ Îõ.

$\sin 2\sim$ ±ýÀ¾¢ý ¦ÀÕÁÁ¾¢ôÒ ´ýÈ¡ Ìõ. «Ð $2\sim = \frac{®}{2}$ «øÄÐ $\sim = \frac{®}{4}$ ±ý Ûõ§À¡Ð ¦ÀÕÁÁ¾¢ô¨Àô ¦ÀÚõ.

±É§Å R ¦ÀÕÁ Á¾¢ô¨Àô¦ÀÈ $\sim = \frac{®}{4} = 45^\circ$ ¬ ¸ þÕì¸§Å ñ Îõ. ¬¾Ä¡ø

¸¢¨¼Å¦îº¢ý ¦ÀÕÁ Á¾¢ôÒ $\frac{v_0^{\,2}}{g}$ ¬ Ìõ.

4.3.8.9 ¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ µ÷ ±È¢¾¢¨º §Å¸ò§¾¡Î, ¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ ´Õ ¸¢¨¼Å¦îº¢üÌ þÕ ±È¢¾¢¨º¸û (Directions of projections) ¯ûÇÉ ¦Å ýÚõ, þ¨Å ¦ÀÕÁ Å¦îº¢üÌ ¡¢Â ±È¢¾¢¨ºì Ì î ºÁÁ¡¸ º¡öóÐûÇÉ ¦Å ýÚõ ¸¡ Ï ¾ø.

v_0, R ±ýÀ¨Å ¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ ±È¢¾¢¨º §Å¸õ ¸¢¨¼Å¦î Í ¬¸¢ÂÅü¨È Ì È¢ì¸ð Îõ.

«ô§À¡Ð, $R = v_0\frac{\sin 2\sim}{g}$ ±ýÀÐ,

$\sin 2\sim = \frac{gR}{v_0^{\,2}}$ ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡ Ìõ.

$gR < v_0^{\,2}$ ±É¢ý, $2\sim$ ±ýÀÐ 180° ³ Å¢¼ì Ì ¨ÈÅ¡¸ þÕ Á¾¢ôÒ¸¨Çô ¦ÀÚõ. $2\sim_1$ ±ýÀÐ ´Õ Á¾¢ôÀ¡Â¢ý $\left(180^\circ - 2\sim_1\right)$ ±ýÀÐ Áü¦È¡Õ Á¾¢ôÀ¡ Ìõ.

$$\therefore 2\sim_2 = 180 - 2\sim_1 \text{ ¬ Ìõ}$$

$$\sim_2 = 90 - \sim_1$$

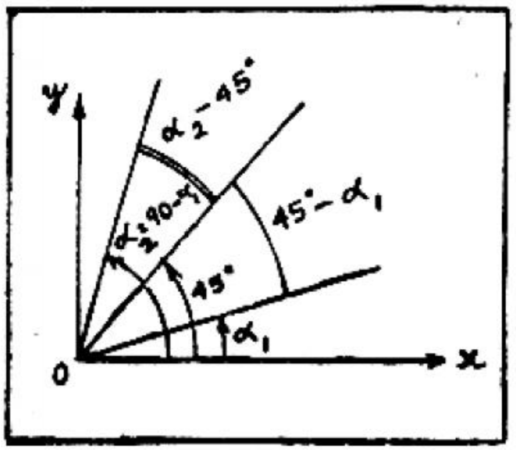
« øÄÐ $\sim_2 - 45 = 45 - \sim_1$ ¬ Ì õ

±É§Å, þÕ¾ ¨ º ¸Ù õ ¯Â÷× Åî ¨ ºò ¾Õõ ¾ ¨ ºÂ¡¸Â 45° ì Ì ºÁº¡öÅø ¯ ûÇÉ. (À¼õ 4.3.15)

$gR = v_0{}^2$ ±É ý , $2\sim$ -ì Ì ´§ÃÁ¾ôÒ ¾¡ ý ¯ ñ Î .

« ¾ ý Á¾ôÒ $2\sim = 90^\circ$

« øÄÐ $\sim = 45^\circ$ ¬ Ì õ



À¼õ 4-3-15

þÐ v_0 ±ýÈ ±È¾ ¨ º §Å¸ò¾ü Ì ¯Â÷Åî ¨ ºì ¦¸¡ Î ì ¸ ì Ü ÊÂ ±È§¸¡ ½ Á¡ Ì õ. $gR > v_0{}^2$ ±É ý , ~ -Å¡ ÉÐ ¯ ñ ¨ Á Á¾ô ¨ Àô ¦ÀÈ¡Ð.

4.3.8.10 ´Õ Ì ÈôÀð¼ §¿Ãõ ¸Æó¾À ý , Ð¸Ç ý ¾ ¨ º§Å¸ò¾ ý "± ñ Á¾ôÒ" "¾ ¨ º" ¬ ¸ÂÅü ¨ Èì ¸¡ Ï ¾ø.

t ±ý Ûõ §¿Ãò¾ø, Ð¸Ç ý §Å¸Á¡ ÉÐ

$$\underline{v} = -gt\,\underline{j} + \underline{v_0}$$

$$= v_0 \cos\sim \underline{i} + (v_0 \sin\sim - gt)\,\underline{j}$$ ¬ Ì õ.

±É§Å $V^2 = (v_0 \cos\sim)^2 + (v_0 \sin\sim - gt)^2$

$$= v_0{}^2 - 2v_0 g \sin\sim .t + g^2 t^2$$

∴ ¾ ¨ º§Å¸ò¾ ý ± ñ Á¾ôÒ

$$v = \sqrt{v_0{}^2 - 2v_0 g \sin\sim .t + g^2 t^2}$$ ....(1) ¬ Ì õ.

t ±ý Ûõ §¿Ãò¾ø,

$\underline{v}$ ±ý Ûõ ¾ ¨ ºÂ À¼õ(3.16)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¸ ¨ ¼ò¾ ¨ º§Â¡ Î ¯ ±ý Ûõ §¸¡ ½ î º¡öÅÄÕì Ì ¦ÁÉø,

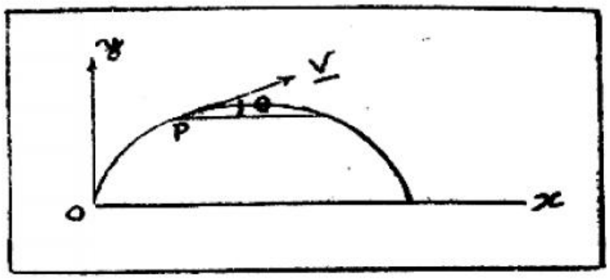
$$\tan- = \frac{v_0 \sin\sim + gt}{v_0 \cos\sim}$$ ....(2) ¬ Ì õ.

(1), (2)- ±ý Ûõ ºÁýÀ¡Î¸Ç¢ø, $t = T = \frac{2v_0 \sin \sim}{g}$ ±É ±Îì¸

$v = \sqrt{{v_0}^2} = v_0$

$\tan ¯ = \tan \sim = \tan(-\sim)$

$\therefore ¯ = -\sim$ ¬Ìõ.

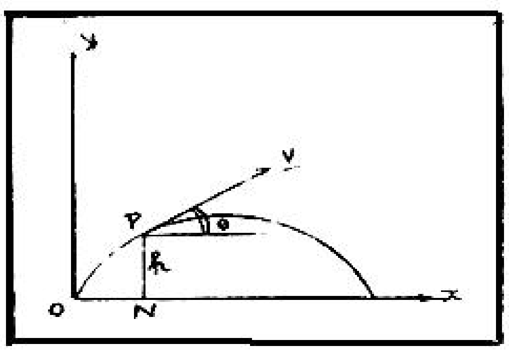


À¼õ 4-3-16

«¾¡ÅÐ Ð¸Ç¡ÉÐ ¸¢¨¼ò¾Çò¨¾ A ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø ¸¦úÓ¸Á¡¸ò ¾¡ìÌõ §À¡Ð, «¾ý ¾¢¨º§Å¸õ, ¦¾¡¼ì¸ò ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý ±ñ Á¾¢ôÀ¢üÌî ºÁÁ¡¸ þÕôÀÐ¼ý, ±È¢§¸¡½ò¾¢üÌî ºÁÁ¡É §¸¡½ò¾¢ø ±¾¢÷¾¢¨ºÂ¢ø ¾¨Ã¨Âò ¾¡ìÌ¸¢ÈÐ.

4.3.8.11 ±È¢¾¡Éò¾¢Ä¢ÕóÐ, ¦¸¡Îì¸ôÀð¼ µ÷ ¯ÂÃò¾¢ø Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡Ï¾ø.

À¼õ (4.3.17)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, Ð¸û ¦¸¡Îì¸ôÀð¼ h ±ýÛõ ¯ÂÃò¾¢ø ¯ûÇ§À¡Ð, «¾ý ¾¢¨º§Å¸õ V ±É×õ, «Ð x «îÍ¼ý ¯ ±ýÛõ §¸¡½î º¡öÅ¢ø ¯ûÇ¾¡¸×õ ¦¸¡û¸. Ð¸Ç¢ý ¿¢¨ÄìÌòÐ þÂì¸ò¨¾ §¿¡ìÌ¸. Ð¸û h ¯ÂÃò¾¢ø ¯ûÇ§À¡Ð,



À¼õ 4-3-17

$v^2 \sin^2 ¯ = v^2 \sin^2 \sim - 2gh$ ¬Ìõ.

$\therefore v \sin ¯ = \sqrt{v^2 \sin^2 \sim - 2gh}$ ¬Ìõ.

§ÁÖõ ¸¢¨¼ò¾¢¨ºÂ¢ø, Ð¸Ç¢ý þÂì¸ò¾¢üÌò ¾¨¼Å¢¨º ´ýÚõ þøÄ¡¨ÁÂ¡ø, ±ô§À¡Ðõ

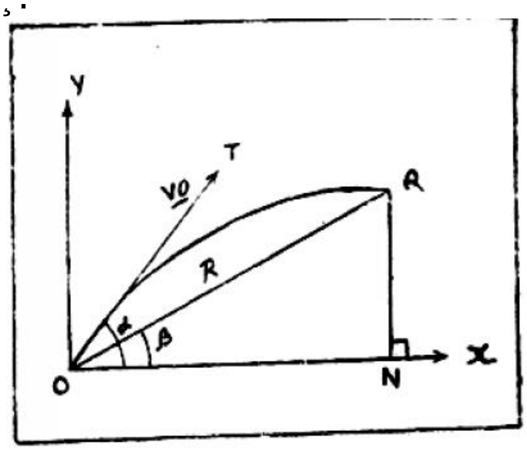
$v\cos^{-} = v_0 \cos\sim$

±É§Å, $v = \sqrt{v_0^2 - gh}$

$\tan^{-} = \frac{\sqrt{v^2 \sin^2\sim - 2gh}}{v_{\circ} \cos\sim}$ ¬ Ì õ.

4.3.8.12 ±È¾¡É ò¾ý ÅÆ§Â ¦ºøÖõ ´Õ º¡ö¾Çò¾ý ÁÐûÇ Å¡î¨ºì ¸¡ Ï ¾ø.

¸¨¼ò¾ÇòÐ¼ý ±ýÈ §¸¡½ò¾ø º¡öó¾Õì Ì õ Á¸ô¦À¡Â º¡ö×ì §¸¡ðÊý (line of greatest slope) ÅÆÂ¡¸î ¦ºøÖõ ¦ºí Ì òÐò ¾Çò¾ø ¸¨¼Áð¼ì§¸¡ðÊü Ì ~ §¸¡½ º¡öÅø v_0 ±ý Ûõ ¾¨º§Å¸òÐ¼ý ´Õ Ð¸û ±ÈÂôÀ Î Å¾¡¸ ì ¦¸¡û ¸.



À¼õ 4-3-18

À¼õ 4.3.18-ø, O ±ýÀÐ ±È¾ÇÁ¡ Ì ¸.

Ð¸û, º¡ö¾Çò¨¾ Q ±ý ÛÁ¼ò¾ø ¾¡ì¸ð Î õ. OQ ±ýÀÐ º¡ö¾Çò¾ý ÁÐûÇ Å¡î Í ¬ Ì õ.

O-¨Åò ¦¾¡¼ì¸ôÒûÇÂ¡¸×õ, O-ÅÆÂ¡¸î ¦ºøÖõ ¸¨¼Áð¼, ¿¨Äì ÌòÐì§¸¡Î¸¨Ç «îÍ¸Ç¡¸×õ ¦¸¡û¸.

þí Ìõ Ð¸Çý Å¡ÍÀ¡¨¾Âý ºÁýÀ¡Î, $y = x\tan\sim - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\sim}$ ¬ Ìõ.

OQ=R ±Éý, $Q(R\cos\ ,R\sin\ )$ ±ý Ûõ ÒûÇ þÂí Ì Å¨ÃÂÖûÇ¾¡ø,

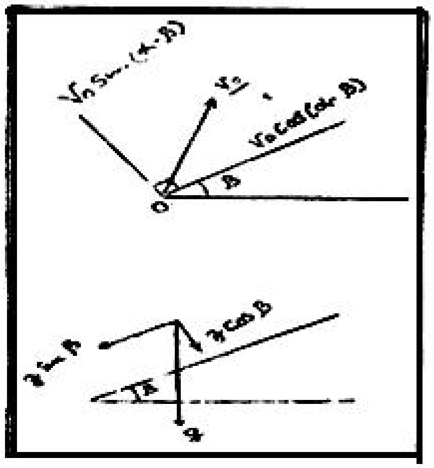
$R\sin\ = R\cos\ \tan\sim - g\frac{R^2\cos^2}{2v_0^2\cos^2\sim}$

«¾¡ÅÐ $R = \frac{2v_0^2 \sin(\sim - \ )\cos\sim}{g\cos^2}$ ¬ Ìõ.

ÌÈôÒ $=0$ ±Éý ¸¨¼Åî Í $= \frac{2v_0^2 \sin\sim \cos\sim}{g}$ ¬ Ìõ.

Áü¦È¡Õ Ó ¨È

¦¾¡¼ì ¸ò ¾¢ ¨º§Å¸ò ¨¾î º¡ö¾Çò¾¢ü Ì þ ¨ ½Â¡É, ÁüÚõ «¾ü Ì ¦º í Ìò¾¡É ¾¢ ¨ º¸Ç¢ø À¢¡¢ì ¸, « ¨ Å ¸ û $v_0\cos(\sim - \ ), v_0\sin(\sim - \ )$ ± ý È¡ Ì õ. (À¼õ 4.3.19 (a)-³ ô À¡÷ì ¸×õ) « ùÅ¡§È Ó Î ì ¸ò¾¢ ý À¸¢÷× ¸ û $g\sin \ \ -g\sin$ ¬ Ì õ



À¼õ 4-3-19 (a) & (b)

Ð ¸ û O-Å¢Ä¢ÕóÐ, Q-Å¢ü Ì î ¦ºøÄ ± Î ì Ì õ §¿Ãõ T ¬ Ì ¸ . Ð ¸Ç¢ ý þÂì ¸ò ¨ ¾ OQ Å¢ü Ì ¦º í ÌòÐò ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¬Ã¡Ôõ§À¡Ð, T ± ý Û õ §¿Ãò¾¢ø, OQ Å¢ü Ì î ¦º í ÌòÐò ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦º ýÈ ¦¾¡ ¨Ä× â îº¢ÂÁ¡ Ì õ.

±É§Å, $0 = v_0 \sin(\sim - \ ) - \frac{1}{2} g\cos \ \ T^2$

$T \neq 0$ ± ý À¾¡ø,

$$T = \frac{2v_0\sin(\sim - \ )}{g\cos}............(1)$$

¸¢ ¨ ¼Áð¼ò¾¢ ¨ ºÂ¢ø Ð ¸Ç¢ ý þÂì ¸ò¾¢ü Ì ±ùÅ¢¾ ¾ ¨ ¼ÔÁ¢øÄ¡¾¾¡ø, ¦¾¡¼ì ¸ò¾¢Ö ûÇ ¸¢ ¨ ¼Áð¼ò¾¢ ¨ º §Å ¸õ $v_0\cos\sim$ Á¡È¡¾Õ Ì õ. ±É§Å T §¿Ãò¾¢ø Ð ¸ û ¸¼ó¾ ¸¢ ¨ ¼Áð¼ ¦¾¡ ¨Ä×,

$$ON = v_0\cos\sim T$$

$$= v_0\cos\sim . \frac{2v_0\sin(\sim - \ )}{g\cos}$$

$$T = 2{v_0}^2\frac{\sin(\sim - \ )\cos\sim}{g\cos}............(2)$$

±É§Å, $R = OQ = ON\sec$

$$= \frac{ON}{\cos}$$

$$= \frac{2{v_0}^2\sin(\sim - \ )\cos\sim}{g\cos^2}............(3)$$

4.3.8.13 º¡ö×ò ¾Çò¾ÄÕóÐ ±È¦À¡ÕÇý Á¸¯Â÷×ò ¦¾¡¨Ä¨Å ì ¸¡½ø.

º¡ö× ¾Çò¾ÄÕóÐ, Ð¸û Á¸¯Â÷×ò ¦¾¡¨ÄÅÖûÇ§À¡Ð, «¾ü Ì î ¦ºí ÌòÐò ¾¨ºÂø, Ð¸Çý ÓÊ×§Å¸õ âîºÂÁ¡ Ìõ. ±É§Å, º¡ö ¾Çò¾ÄÕóÐ Á¸¯Â÷×ò ¦¾¡¨Ä× Y ±Éý,

$$0 = v_0^{2}\sin^{2}(\sim - \quad) - 2g\cos \quad .Y$$

$$Y = \frac{v_0^{2}\sin^{2}(\sim - \quad)}{2g\cos}$$

4.3.8.14 º¡ö¾Çò¾ø ¦ÀÕÁ Å¡î ¨º ì ¸¡½ø.

R ±ýÀÐ º¡ö¾Çò¾ý ÁÐûÇ Å¡î Í ±Éø,

$$R = \frac{2v_0^{2}\sin(\sim - \quad)\cos\sim}{g\cos^{2}} = \frac{v_0^{2}}{2g\cos^{2}}\left[\sin(2\sim - \quad) - \sin\quad\right]$$

þ í Ì, v。, ±ýÀ¨Å ¦¾¡ó¾ ¸½Â í ¸û.

±É§Å R-ý ¦ÀÕÁò¨¾ô ¦ÀÈ, sin(2~ –) ±ýÀÐ Á¸ô¦À¡Â Á¾ô¨À «¨¼Â§Å ñ Îõ. ¬É¡ø sin(2~ –) -Åý Á¸ô¦À¡Â Á¾ôÒ ´ýÈ¡ Ìõ.

«ô§À¡Ð, 2~ – $= 90^{\circ}$

«øÄÐ $\sim = 45^{\circ} + \frac{\quad}{2}$ ¬ Ìõ.

±É§Å ±È§¸¡½õ $45^{\circ} + \frac{\quad}{2}$ ±ýÈ¡ø, º¡ö¾Çò¾Ä¨ÁÔõ Å¡î Í ¦ÀÕÁò¨¾ «¨¼Ôõ.

$$\cdot\ \text{¦ÀÕÁ Å¡î Í} = \frac{v_0^{2}}{g\cos^{2}}(1 - \sin\quad)$$

$$= \frac{v_0^{2}}{g(1 + \sin\quad)}$$

§ÁÖõ $2\sim - \quad = 90^{\circ}$ ¬ Ìõ§À¡Ð,

$$\sim - \quad = 90^{\circ} - \sim$$

«¾¡ÅÐ $T\hat{O}Q = Y\hat{O}T$

±É§Å ¦ÀÕÁ Å¡î Í ì Ì ¡Â ¾¨º, ¿¨Äì Ì òÐò ¾Çõ, º¡ö¾Çõ ±ý Ûõ þÃ ñ Êü Ì Á¨¼§Â ¯ûÇ §¸¡½ò¨¾ þÕ ºÁÀ¡¸ í ¸Ç¡¸ô À¡ì Ìõ.

4.3.8.15 ¦¸¡Î ì ¸ôÀð¼ ±È¾¨º §Å¸òÐ¼ý ¦¸¡Î ì ¸ôÀð¼ ´Õ º¡ö¾Ç Å¡î Í ì Ì, ²üÀ þÕ¾¨º¸û ¯Ç. «¨Å¸û ¦ÀÕÁ Å¡î Íò ¾¨ºì Ì î ºÁÁ¡¸ º¡öóÐûÇÉ ±É ì ¸¡ Ï ¾ø.

º¡ö¾Çò¾ø Å¡î Í,

$$R = \frac{v_0^{2}}{g\cos^{2}}\left[\sin(2\sim - \quad) - \sin\quad\right]$$

$$\therefore \sin\left(2\alpha - \rho\right) = \frac{g \cos^2}{{v_0}^2} + \sin$$

þ í Ì g,R,v_0,β என்ப ¨ Å ¸ û Ì È¢ôÀ¢ð¼ Á¾¢ôÀ¢ ¨ É ô ¦ÀÚÅ¾¡ø,

$\sin(2\alpha - \beta)$ s ± ý ÀÐ ´ Õ Á¡È¢Ä¢Â¡ Ì õ.

· (2~ − β) என்ப À¾ü Ì 180° - ì Ì Ì ¨ Èó¾ þ Õ Á¾¢ôÒ ¸ û ¯ ñ Î . « ¨ Å ¸ û $\sim_1, \sim_2$ ± ý È¡ø,

$$\sin\left(2\sim_1 - \quad\right) = \sin\left(2\sim_2 - \quad\right)$$

$$\therefore 2\sim_1 - \quad = 180 - \left(2\sim_2 - \quad\right)$$

$$\sim_1 - \frac{}{2} = 90 - \sim_2 + \frac{}{2}$$

$$\sim_1 - \left(45 + \frac{}{2}\right) = \left(45^\circ + \frac{}{2}\right) - \sim$$

¬ É ¡ø $45^\circ + \frac{}{2}$ ± ý Û õ §¸ ¡ ½ õ, ¦ÀÕÁ º¡ö¾Ç Å¢î ¨ ºô ¦ÀÚÅ¾ü Ì ¯¡¢Â ¾¢ ¨ º ¨ Â Å ¨ ÃÂÚôÀ¾¡ø, ÁüÈ þÕ¾¢ ¨ º ¸ û þòÐ¼ý ºÁÁ¡É §¸ ¡ ½ í ¸ û « ¨ Á ì ¸¢ ý È É.

4.3.9 Á¡¾¢¡¢ì ¸ ½ ì Ì ¸ û.

4.3.9.1 ´ Õ Ð ¸ Ç¡ É Ð Áð¼Á¡ É ¾ ¨ ÃÂ¢ø (level ground), ´ Õ ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ, Å¢É¡Ê ì Ì 84 Á£ð¼÷ ± ý Û õ ¾¢ ¨ º§Å ¸ò§¾¡ Î , ¸¢ ¨ ¼ì§¸ ¡ð Î ¼ý 30° §¸ ¡ ½ î º¡öÅ¢ø ±È¢ÂôÀ Î õ. « Ð (1) « ¨ ¼óÐ Á¢ ¸ ô ¦À¡¢Â ¯ÂÃò ¨ ¾Ôõ (2) ÀÈôÒ §¿Ãò ¨ ¾Ôõ (3) ¸¢ ¨ ¼ò¾Çò¾¢ ý ÁÐ ûÇ Å¢î ¨ ºÔõ (4) 60Á£ð¼÷ ¯ÂÃò¾¢ø þÕ ì Ì õ ¦À¡ØÐ « ¾ ý ¾¢ ¨ º§Å ¸ ò ¨ ¾Ôõ, þÂ ì ¸ò¾¢ ¨ º ¨ ÂÔõ ¸ ¡ ñ ¸ .
(g=9.8 Á£/Å¢^{2} ± É ì ¦ ¸ ¡ û ¸ .)

þ í Ì $v_\circ = 84$ Á£/Å¢ $\sim = 30^\circ$

(1) « ¨ ¼óÐ Á¢ ¸ ô ¦À¡¢Â ¯ÂÃõ $= \dfrac{v_\circ^2 \sin^2 \sim}{2g}$

$$= 84 \times 84 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9.8}$$

= 90 Á£ð¼÷ ¸ û

(2) ÀÈôÒ §¿Ãõ $= \dfrac{2v_\circ \sin \sim}{g}$

$$= 2 \times 84 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9.8}$$

$= \dfrac{60}{7}$ Å¢É¡Ê ¸ û

(3) ¸¢¨¼ò¾Çò¾¢ý ÁÄ¢ûÇ Å¢îÍ $= \dfrac{v_{\circ}^{2}\sin\sim}{g}$

$$= 84\times 84\times \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{9.8}$$

$= 420\sqrt{3}$ Á¢ð¼÷¸û

(4) h ¯ÂÃÃò¾¢ø ¾¢¨º§¸õ v ±É¢ý , $v^{2} = v_{\circ}^{2} - 2gh$ ¬ Ìõ.
þí Ì , $v_{\circ} = 84, h = 60$ ±ýÀ¾¡ø,

$$v^{2} = 84\times 84 - 2\times 9.8\times 60$$

= 6048

$$v = \sqrt{6048} = 12\sqrt{42}$$

= 77.772Á¢ /Å¢É¡Ê

$$\tan\text{¯} = \frac{\sqrt{{v_0}^{2}\sin^{2}\sim - 2gh}}{v_0\cos\sim}$$

$v_{\circ} = 84, h = 60, \sim = 30^{\circ}$ ±É¢ý

$$\tan\text{¯} = \frac{\sqrt{84\times 84\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - 2\times 9.8\times 60}}{84\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{7\sqrt{12}}{42\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{¯} = 33^{\circ}42'$$

4.3.9.2 ¦¸¡Î ì¸ôÀð¼ ¸¢¨¼Å¢îÍ ¨ºì ¦¸¡ñ ÊÕì Ì Á¡Ú ±È¢ÂôÀÎõ ´Õ Ð¸Ç¢ý Á¢îº¢Ú ¬üÈø (least energy) «òÐ¸¨Ç, «ùÅ¢îº¢ý À¡¾¢ «Ç×ì Ì î ºÁÁ¡É ¯ÂÃò¾¢ü Ì ¿¢¨Äì Ìò¾¡¸ ±Î òÐî¦ºøÖõ ±É ì¸¡ð Î¸. Ð¸Ç¢ý §Å¸õ V_0 ±É ×õ, «¾ý ¾¢¨º ¸¢¨¼ì§¸¡ð Î¼ý ~ §¸¡½î º¡öÅ¢Ö ûÇÐ ±É ×õ ¦¸¡û¸.
R ±ýÀÐ ¸¢¨¼ò¾Çò¾¢ý ÁÄ¢ûÇ Å¢î¦ºÉ¢ø

$$R = \frac{{V_0}^{2}\sin 2\sim}{g} \quad \text{¬ Ìõ}$$

$${V_0}^{2} = \frac{gR}{\sin 2\sim}$$

Ð¸Ç¢ý ¬üÈø $= \dfrac{1}{2}mv^{2}$

$$= \frac{1}{2}m{v_o}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{gR}{\sin 2\sim}$$

· Ð¸Ç¢ý Á¦îº¢Ú ¬üÈÄ¡ÉÐ, sin2~ ±ýÀÐ Á¢¸ô¦À¡¢Â Á¾¢ô¨À ¦ÀÚõ§À¡Ð ²üÀÎõ. «ô§À¡Ð $\sin 2\sim = 1$ «øÄÐ $\sim = 45^\circ$ ¬Ìõ.

$$= \frac{m}{2} \times gR$$ Á¦îº¢Ú ¬üÈø

§ÁÖõ $V_0^{\,2} = gR$

Ð¸û ¿¢¨Äì§¸¡ðÊø §ÁøÓ¸Á¡¸, h ¯ÂÃõ ¦ºøÅ¾¡É¡ø, $h = \frac{V_0^{\,2}}{2g}$ ¬Ìõ.

þíÌ $h = \frac{gR}{2g} = \frac{R}{2}$ ¬Ìõ.

±É§Å, Ð¸û, ¸¢¨¼Å¦îº¢ý À¡¾¢ÂÇ×ìÌ îºÁÁ¡É ¯ÂÃò¨¾ «¨¼Âì Ü Îõ.

4.3.9.3 ´Õ Ð¸û Å¢É¡ÊìÌ 14Á¦ð¼÷ §Å¸ò¾¢ø ±È¢ÂôÀðÎ, ¸¢¨¼Â¡¸ 10Á¦ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø «ÊôÀ¾¡¸¢ø, Ð¸ÙìÌ þÕ ±È¢¾¢¨º¸û ¯ûÇÉ ±Éì¸¡ñ À¢.

¾ÃôÀð¼ ¾¢¨º§Å¸õ = 14Á¦/Å¢

¾ÃôÀð¼ ¸¢¨¼Å¦îÍ = 10Á¦

Ð¸Ç¡ÉÐ ~ §¸¡½îº¡¢Å¢ø ±È¢ÂôÀÎÁ¡¸¢ø,

$$R = \frac{V_0^{\,2} \sin 2\sim}{g}$$ ¬Ìõ.

$$\sin 2\sim = \frac{gR}{v_0^{\,2}}$$

$$\frac{9.8 \times 10}{14 \times 14} = \frac{1}{2}$$

$2\sim = 30^\circ$ «øÄÐ 150°

«øÄÐ $\sim = 15^\circ$ «øÄÐ 75° ¬Ìõ

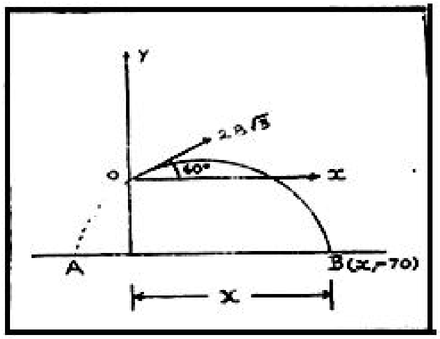
±É§Å Ð¸û, þÕ ±È¢¾¢¨º¸¨Çô ¦ÀüÚûÇÐ.

4.3.9.4 70 Á¦ð¼÷ ¯ÂÃÓûÇ ´Õ §¸¡ÒÃò¾¢ý ¯îº¢Â¢Ä¢ÕóÐ Å¢É¡ÊìÌ 28 $\sqrt{3}$ 3Á¦ð¼÷ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø 60° ²üÈò¾¢ø ´Õ ÀóÐ ±È¢ÂôÀÎ¸¢ýÈÐ. «ì §¸¡ÒÃò¾¢Ä¢ÕóÐ «ôÀóÐ ¾¨Ã¨Â «ÊìÌõ ÒûÇ¢Â¢ý ¸¢¨¼ò¦¾¡¨Ä×, ¾¢¨º§Å¸õ, þÂì¸ò¾¢¨º ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ñ¸.

þíÌ $v_\circ = 28\sqrt{3}$

$\sim = 60^\circ$ ¬Ìõ.

Ð¸û ¾¨Ã¨Â $B(x,-70)$ ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø À¼õ (4.3.20)-ø ¸¡ðÊÂ¡Ú «Êì¸ðÎõ.



A¼õ 4-3-20

þôÒûÇ¦, $y = x\tan\sim - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\sim}$

± ý Û õ þÂ ì ¸ôÀ¡ ¨ ¾Â¦ø ¯ ûÇ¾¡ ¨ ¸Â¡ø,

$$-70 = x\tan 60^\circ - \frac{9.8x^2}{2\times 28\times 28\times 3\times\cos^2 60^\circ};$$

« ¾¡ÅÐ,

$$70 = x\sqrt{3} - \frac{x^2}{120}$$

« ¾¡ÅÐ $x^2 - 120\sqrt{3}x - 8400 = 0$ ¬ Ì õ

$$x = \frac{120\sqrt{3} \pm 160\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore x = -20\sqrt{3}$ « øÄÐ $x = 140\sqrt{3}$ ¬ Ì õ.

$\therefore x = -20\sqrt{3}$ ÒÈì ¸ ½¦ì ¸ôÀð Î ,

$x = 140\sqrt{3}$ ± ý Û õ Á¾¦ôÒ ²ü ¸ôÀ Î õ.

B ± ý Û Á¦¼ò¾¦ø Ð ¸Ç¦ý ¾¦ ¨ º§Å ¸õ v ±É ×õ, « Ð ¸¦ ¨ ¼ò¾¦ ¨ ºÔ¼ ý , ¯ §¸ ¡ ½ î º¡¦Å¦ø ¾ ¨ Ã ¨ Â « ÊôÀ¾¡ ¸ ×õ ¦ ¸ ¡ û ¸ .

« ô§À¡Ð, $v^2 = v_\circ^2 - 2gh$

$$= 28\times 28\times 3 - 2\times(9.8)\times(-70)$$
$$= 2352 + 1372$$
$$= 3724$$

$\therefore v = 14\sqrt{9}$ Á¦ /Å¦

$$\tan\bar{} = \frac{\sqrt{v_o{}^2\sin^2\sim - 2gh}}{v_o\cos\sim}$$

$$= \frac{\sqrt{28\times 28\times 3\times\frac{3}{4} - 2\times 9.8\times(-70)}}{28\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{2/3}$$

$$\therefore\bar{} = 39^\circ 13'$$

4.3.9.5 µ÷ ±È¦À¡ÕÇý ¸ ¨¼ò¾ÇÅî Í $1960\sqrt{3}$ Áð¼÷¸û. «Ð ¸¡üÈø þÕì Ìõ §¿Ãõ 20 ÅÉ¡Ê¸û ±Éý, «¾ý ¦¾¡¼ì¸ ¾ ¨º§Å¸òý «Ç ¨ÅÔõ, ¾ ¨º ¨ÂÔõ ¸¡ ñ ¸.

þ í Ì, $R = 1960\sqrt{3}$ Áð¼÷¸û

$T = 20$ ÅÉ¡Ê¸û

$$R = v_0 \cos\sim \cdot T$$

$$1960\sqrt{3} = \left(v_0 \cos\sim\right)20$$

$$v_0 \cos\sim = 98\sqrt{3}$$

$$T = \frac{2v_o \sin\sim}{g}$$

$$\therefore v_o \sin\sim = \frac{gT}{2}$$

$$9.8\times 20$$

$$2$$

$$= 98.$$

$$\therefore \tan\sim = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sim = 30^\circ$$

$$v_o = 98\cos ec\sim$$

$$= 98\times\cos ec 30^\circ$$

$= 196$ Á/ÅÉ¡Ê

4.3.9.6 ¦¾¡¼ì¸ò¾ ¨º§Å¸õ $\underline{v_0}$ ¯¼ý ±ÈÂôÀð¼ Ð¸¦Ç¡ýÚ ±È¾¡Éò¾ÄÕóÐ ``a" ¦¾¡ ¨ÄÅÖûÇ ¿ ¨Äì Ì òÐî ÍÅ¡ø «¨¼Âì ÜÊÂ Áô¦ÀÕ ¯ÂÃõ $\frac{\underline{v_\circ}}{2g} - \frac{ga^2}{2\underline{v_\circ}}$; ±É ì ¸¡ð Î ¸. §ÁÖõ «òÐ¸û «¾ý À¡ ¨¾Âø «¨¼Âì ÜÊÂ Áô¦ÀÕ ¯ÂÃõ $\frac{\underline{v_\circ}^6}{2g(v_\circ^4 + g^2c^2)}$ ±É ì ¸¡ ñ À.

ÅÍÀ¡ ¨¾Âý ºÁýÀ¡ Î

$$y = x\tan\sim - \frac{gx^2}{2v_o^{\ 2}\cos^2\sim}$$

$x = a$ ±Éø

$$y = a\tan\sim - \frac{ga^2}{2v_0^{\ 2}\cos^2\sim}$$

$$= a\tan\sim - \frac{ga^2}{2v_0^{\ 2}}\sec^2\sim$$

y ¬ ÉÐ Áô¦ÀÕ Á¾ô¨À « ¨¼Â, $\frac{dv}{d\sim}=0$ ¬ ¸§Å ñ Î õ.
«¾¡ÅÐ,

$$a\sec^2\sim-\frac{ga^2}{2v_o^2}\cdot 2\sec\sim\cdot\sec\sim\cdot\tan\sim=0$$

$$a\sec^2\sim\left(\frac{1-ga\tan\sim}{v_o^2}\right)=0$$

$$\therefore \tan\sim=\frac{v_o^2}{ga}$$

H ±ýÀÐ ÍÅ¡ø « ¨¼Âì ÜÊÂ Áô¦ÀÕ ¯ÂÃõ ±Éø,

$$H=a\cdot\frac{v_o^2}{ga}-\frac{ga^2}{2v_o^2}\left(1+\frac{v_o^4}{g^2a^2}\right)$$

$$=\frac{v_o^2}{g}-\frac{ga^2}{2v_o^2}-\frac{v_o^2}{2g}$$

$$\frac{v_o^2}{2g}-\frac{ga^2}{2v_o^2}$$

À¡¨¾Âø « ¨¼Âì ÜÊÂ Áô¦ÀÕ ¯ÂÃõ

$$=\frac{v_o^2\sin^2\sim}{2g}$$

$$=\frac{v_0^2}{2g}.\frac{1}{\cos ec^2\sim}$$

$$=\frac{v_0^2}{2g}.\frac{1}{\left(\cot^2\sim\right)}$$

$$=\frac{v_o^2}{2g\left(1+\frac{g^2a^2}{2v_o^4}\right)}$$

$$=\frac{v_o^2}{2g\left(v_o^4+g^2a^2\right)}$$

4.3.9.7 ´Õ ¦ÅÊì ñ Î ÅÁ¡Éõ, 400Á ¯ÂÃò¾ø Á½ì Ì 252 ¸§Ä¡ Áð¼÷¾¨º§Å¸òÐ¼ý ¸¨¼Â¡¸ ´Õ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºø¸ÈÐ. (a) ¾¨ÃÂÖûÇ µ÷þÄì¨¸ (target) º¡Â¡¸ «Êì ÌõÅ ñ ½õ, «ó¾ þÄì¨¸ì ¸¼ôÀ¾ü Ì ±ùÅÇ× ¦¾¡¨Ä×ì Ì Óý É¡ø ÅÁ¡Éò¾ÄÕóÐ Ì ñ Î Å¼ôÀ¼§Å ñ Î ¦ÁÉì ¸¡ ñ ¸.
ÅÁ¡Éò¾ÄÕóÐ Ì ñ Î ÅÎÅì ¸ôÀð¼ ¿¨Ä¨Âì ÌÈì Ì õ 'O' ±Ûõ ÒûÇ¨Â ¬¾Â¡¸×õ (Origin) 'O'ÅÆ§Â Å¨ÃÂôÀÎõ ¸¨¼ì§¸¡ð¨¼ x«îº¡¸×õ, 'O' -Åø §ÁøÓ¸Á¡¸ Å¨ÃÔõ ¿¨Äì§¸¡ð¨¼ y«îº¡¸×õ À¼õ (4.3.21)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦¸¡û¸.

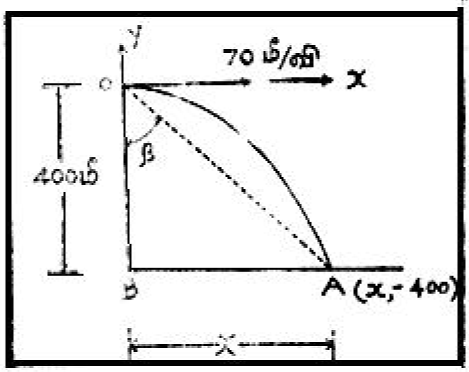
A ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø þÄì Ì ¯ûÇ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.
þ í Ì

$$v_{\circ} = \frac{252\times1000}{60\times60} = 70 \text{ Á¦ /Å¢}$$

$$\sim\ = 0^{\circ}$$

$A(x_1 - 400)$ ±ý Û õ Òû Ç¢

$$y = x\tan\sim - \frac{g^2x^2}{2u^2\cos^2\sim};$$



A¼õ 4-3-21

±ý Ûõ þÂ í Ì Å ¨ÃÂ¢ø ¯ûÇ¾¡ø,

$$-400 = 0 - \frac{9.8x^2}{2\times70\times70\times1};$$

«¾¡ÅÐ, $x^2 = \frac{400\times2\times70\times70}{9.8}$

$$= 400,000$$

$x = 200\sqrt{10}$ Á¦.

4.3.9.8 §Á§Ä ¦º¡øÄôÀð¼ (4.3.9.7) ±ý Ûõ ¸½ì¸¢ø

(1) Ì ñ Î Å¢ Î Å¢ì¸ôÀ Îõ§À¡Ð, Å¢Á¡É ò¨¾Ôõ þÄì¨¸Ôõ §º÷ì Ìõ ¦¾¡¼ì¸ô À¡÷¨Å ì §¸¡Î (Initial line of sight)¿¢¨ Äì Ì òÐ ì§¸¡ð Î¼ý ¾¡ í Ìõ ±ý Ûõ §¸¡½ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.

(2) Ì ñ Î þÄì¨¸ «Êì Ìõ ¾Õ½ò¾¢ø, Å¢Á¡Éõ ±ùÅ¢¼ò¾¢ÄÕì Ìõ?

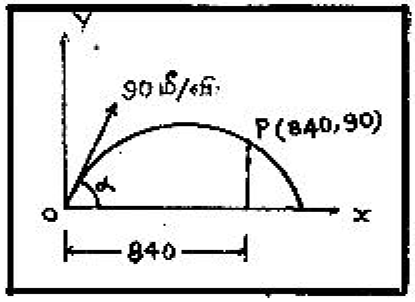
$$(1)\tan\ = \frac{BA}{BO} = \frac{200\sqrt{10}}{400} = 1.581$$

$$\therefore\ = 57^{\circ}41'$$

(2)Å¢Á¡Éõ þÂ í Ìõ ¸¢¨ ¼ò¾¢¨ ºÂ¢ø, ±ùÅ¢¾ò ¾¨ ¼Å¢¨ ºÔÁ¢øÄ¡ ¨ ÁÂ¡ø, «Ð Á½¢ì Ì 252 ¸¢.Á£ð¼÷ §Å¸ò¾¢§Ä§Â Ì ñ Î þÄì¨¸ «Êì Ìõ ¾Õ½ò¾¢ø «¾Û ¨¼Â ¯îºì Ì §¿Ã¡¸ô ÀÈóÐ ¦¸¡ ñ ÊÕì Ìõ.

4.3.9.9 ÐôÀ¡ì ¸¦Â¡ ý Ú Å¢É¡Êì Ì 98Á£ð¼÷ ±ý Û õ Ó¸ôÒ §Å¸òÐ¼ ý (muzzle velocity) ±ò¾¢ ¨ ºÂ¢ø ´Õ Ì ñ ¨ ¼î Íð¼¡ø, «Ð 840 Á£ð¼÷ ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢ø, 90 Á£ð¼÷ ¯ÂÃÓ û Ç ´Õ §¸¡ÒÃò¾¢ ý ¯î º¢Â¢ø ¨ Å ì ¸ôÀðÊÕì Ì õ µ÷ þÄì ¨ ¸ «Êì Ì õ ±É ì ¸¡ ñ ¸. Å£ÍÀ¡ ¨ ¾Â¢ ý ºÁ ý À¡ Î

$$y = x\tan\sim - \frac{gx^2}{2v_o^{\,2}\cos^2\sim}$$



À¼õ 4-3-22

À¼õ (4.3.22)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, P(840,90) Òû Ç¢ À¡ ¨ ¾Â¢ø ¯ û Ç¾¡ø,

$$90 = 840\tan\sim = \frac{9.8\times 840\times 840}{2\times 98\times 98\times \cos^2\sim}$$

« ¾¡ÅÐ, $90 = 840\tan\sim - 360(1+\tan^2\sim)$

« ¾¡ÅÐ, $3 = 28\tan\sim - 12(1+\tan^2\sim)$

« ¾¡ÅÐ,

$$12\tan^2\sim - 28\tan\sim + 15 = 0;$$

$$\therefore \tan\sim = \frac{28\pm\sqrt{28\times 28\times -4\times 12\times 15}}{24};$$

$$= \frac{28\pm 8}{24};$$

$\therefore \tan\sim = \frac{36}{24}$ « øÄÐ $\frac{20}{24}$

$\frac{3}{2}$ « øÄÐ $\frac{5}{6}$

$\sim = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ « øÄÐ $\tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$

$= 56^\circ 19'$ « øÄÐ $39^\circ 48'$

4.3.9.10 þÕ þ ¨ ½Â¡ É ÍÅ÷¸Ç¢ ý ¯î º¢¸ ¨ Ç ¯Ã¡öóÐ ¦ºøÖÁ¡Ú ´Õ ÀóÐ ±È¢ÂôÀ Î ¸¢ ýÈÐ. Ó¾ø ÍÅ÷ "a" ¯ÂÃÓ û Ç¾¡Ôõ, ±È¢¾¡ É ò¾¢Ä¢ÕóÐ "b" ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢Öõ ¯ û ÇÐ. þ ñ ¼¡ÅÐ ÍÅ÷ 'b' ¯ÂÃÓ ¨ ¼Â¾¡Ôõ ±È¢¾¡ É ò¾¢Ä¢ÕóÐ 'a' ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢Öõ ¯ û ÇÐ. Àó¾¢ ý À¡ ¨ ¾ þÕ ÍÅ÷¸ Ù ì Ì õ §¿÷ì Ì ò¾¡ É

¾Çò¾¢ø « ¨ ÁÔÁ¡Â¢ ý , ¸¢ ¨ ¼ò¾Çò¾¢ø Àó¾¢ ý Å¢î ¨ º ì ¸¡ ñ ¸. ±È¢§¸¡ ½ õ, $\tan^{-1}(3)$ ³ Å¢¼ «¾¢¸Á¡ ÉÐ ±É ì ¸¡ð Î ¸.

Å¢ÍÀ¡ ¨ ¾Â¢ ý ºÁ ý À¡ Î $y = x\tan\sim - \dfrac{gx^2}{2v_o^2\cos^2\sim}$ ¬ Ì õ

À¼õ (3.23)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, $(b,a)(a,b)$ ± ý Û õ ÒûÇ¢¸ û þôÀ¡ ¨ ¾Â¢ø ¯ ûÇ É. ±É §Å, 4.3.24ø

$$b = a\tan\sim - \frac{ga^2}{2v_o^2\cos^2\sim}.....(1)$$

$$a = b\tan\sim - \frac{gb^2}{2v_o^2\cos^2\sim}.......(2)$$

¸¢ ¨ ¼ò¾Çò¾¢ø Àó¾¢ ý Å¢î Í, ±É¢ø,

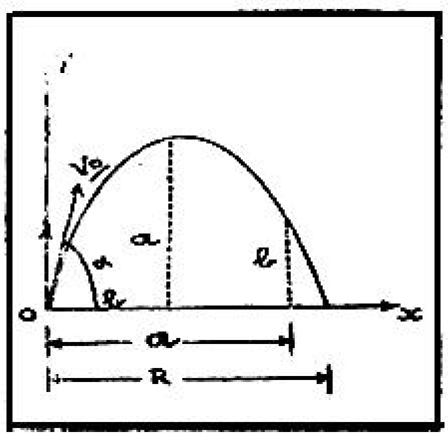
$$R = \frac{v_o^2\sin^2 2\sim}{g} - \frac{2v_o^2\cos^2\sim\tan\sim}{g}$$

$$\therefore 2v_o^2\cos^2\sim = \frac{gR}{\tan\sim}.....(3)$$

· (1) ÅÐ ºÁ ý À¡ Î ,

$$\therefore (1) b = a\tan\sim - \frac{ga^2\tan\sim}{gR}$$

$$= a\tan\sim\left(\frac{R-a}{R}\right)......(4)$$



À¼õ 4-3-24

þ§¾§À¡ø,

$$a = b\tan\sim\left(\frac{R-b}{R}\right)---(5)$$ ¬ Ì õ

$\therefore 4 \div 5$ ± ý ÀÐ,

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b}.\frac{(R-a)}{(R-b)}$$ ¬ Ì õ.

« ¾¡ÅÐ, $R(a^2 - b^2) = a^3 - b^3$

$$\therefore R = \frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)} ....(6)$$

§ÁÖõ $\tan\sim = \dfrac{aR}{b(R-b)}$

$$= \frac{a(a^2 + ab + b^2)(a+b)}{b(a+b)(a^2 + ab + b^2 - ab - b^2)}$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{ab}$$

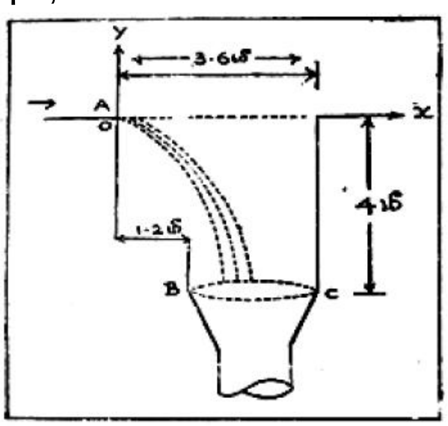
$$= \frac{(a-b)^2 + 3ab}{ab}$$

$$= 3 + \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$> 3(\therefore a, b > 0, (a-b)^2 > 0)$$

$\therefore \sim > \tan-^2 (3)$ ¬ Ì õ

4.3.9.11 ¸¢¨¼Â¡¸ þÂí¸¢î ¦ºøÖõ Å¨Ç̀Ìø (Conveyer belt) ãÄÁ¡¸ Á½Ä¡ÉÐ, A ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø Å¢Î Å¢ì¸ôÀð Î À¼õ (4.3.25)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, BC ±ý Ûõ ²óÐÌ ÆÄ¢ø (Hopper) Å¢Ø¸¢ÈÐ. Å¨Ç̀Ìø ±ó¾ Á¾¢ôÒ¸Ù ì Ì þ¨¼§Â §Å¸ò¨¾ô ¦ÀüÈ¡ø, Á½ø ²óÐÌ ÆÄ¢ø Å¢Øõ? (g=9.81 ±É ì ¦¸¡û¸)



À¼õ 4-3-25

Å¢Î Å¢ì¸ôÀð¼ Á½ø B(1.2, -4), C(3.6, -4) ±ý Ûõ ÒûÇ¢¸Ù ì Ì þ¨¼Â¢ø Å¢Æ§Å ñ Ê ÅÕ¸¢ÈÐ. Á½ø B-ì Ì ô À¢ýÀ¡¸ Å¢Æ¡ÁÄ¢ÕôÀ¾ü Ì ¯¡¢Â Á¢¸ î º¢È¢Â §Å¸ò¨¾ u1±É ×õ C-ì Ì «ôÀ¡ø Å¢Æ¡ÁÄ¢ÕôÀ¾ü Ì ¯¡¢Â Á¢¸ î º¢È¢Â

§Å¸ò¨¾ u_1 ±É×õ, C-ì Ì «ôÀ¡ø Å¦Æ¡ÁÄ¦ÕôÀ¾ü Ì ¯¡¦Â Á¦¸ô¦À¡¦Â §Å¸ò¨¾ u_2 ±É×õ ¦¸¡û¸. ±É§Å Á½Ä¦ý ¾¦¨º§Å¸Á¡ÉÐ,

$u_1 < u < u_2$ ±ýÈ¦Õì¸ §Å ñ Î õ

B(1.2, -4), C(3.6, -4) ±ý Ûõ Òû Ç¦¸û

$$y = x\tan\sim - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\sim}$$

±ý Ûõ Å¦ÍÀ¡¨¾Â¦ø þÕì Ì ¦ÁÉ¦ø

$$-4 = -\frac{9.81\times(1.2)^2}{2u_1^2}$$

$$u_1^2 = \frac{9.81\times(1.2)^2}{8}$$

$$U_1 = \frac{1.2}{2}\sqrt{4905}$$

$$= 0.6\times 2.215$$

= 1.3290 Á¦ Å¦ ±ý Úõ,

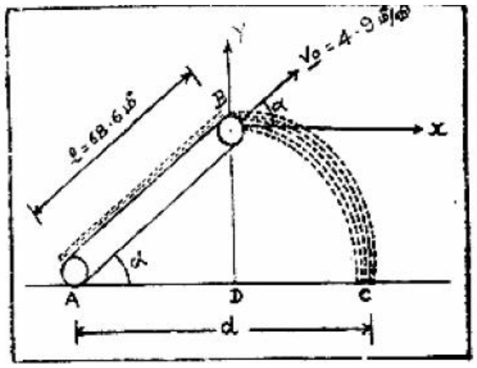
$$-4 = \frac{9.81x(3.6)^2}{2u_2^2}$$

$$u_2^2 = \frac{9.81x(3.6)^2}{8}$$

$$u_2 = \frac{3.6}{2}\sqrt{4.905}$$

$1.8\times 2.215 = 3.9870$ Á¦ Å¦ ±ý Úõ 3.9870 Á¦. Å¦ ¬ Ì õ.

4.3.9.12 68.6Á¦ð¼÷ ¿¦ÇÓû Ç AB ±ý Ûõ Å¨Ç Ì Æø (Conveyer belt) A ±ý ÛÁ¦¼ò¾¦ø «¨ÁòÐû Ç À¦¨½Âø (hinge) ´ýÈ¦ø À¼õ (4.3.26)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, ¦À¡Õò¾ôÀð Î ¸¦¨¼ò¾ÇòÐ¼ý ±ùÅ¦¾ §¸¡½ îº¡¦¨ÅÔõ ¦ÀÈò¾ì¸¾¡¸ ¯ûÇÐ. Å¨Ç Ì Æø Å¦É¡Êì Ì 4.9Á¦ ±ý Ûõ º¦Ã¡É §Å¸òÐ¼ý þÂí Ì ¸¦ÈÐ. ¾¡É¦Â Á½¦¸û «ùÅ¨Ç Ì Æø ãÄÁ¡¸ î ¦ºÖò¾ôÀð Î, B-Â¦ø «¨Å¸û ¾¡É¡¸§Å þÂí ÌÁ¡Ú Å¦¼ôÀð Î C-³ «¨¼¸¦ýÈÉ. A-ì Ì õ C-ì Ì õ þ¨¼§Â ¯ûÇ ¦¾¡¨ÄÅ¦ý ¯îºÁ¾¦ô¨ÀÔõ «¾ü§¸üÈ §¸¡½ îº¡¦¨ÅÔõ ¸¡ñ¸.



À¼õ 4-3-26

B¨Â ¦¾¡¼ì¸ôÒûÇ¢Â¡¸×õ, BÂ¢ý ÅÆ¢§Â Å¨ÃÔõ ¸¢¨¼, ¿¢¨Äì§¸¡Î¸¨Ç Ó¨È§Â x,y «îÍ¸Ç¡¸×õ ¦¸¡û¸. AB ±ý Ûõ Å¨ÇÌÆø, ¸¢¨¼ò¾ÇòÐ¼ý ~ ±ý Ûõ §¸¡½îº¡¢¨Åô ¦ÀüÚûÇ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «ô§À¡Ð, ¾¡É¢ÂÁ½¢¸û ´ù¦Å¡ýÚõ, B-Â¢Ä¢ÕóÐ, v_0 ±ý Ûõ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾Ôõ, ~ ±ý Ûõ ±È¢§¸¡½ò¨¾Ôõ ¦ÀüÚ þÂí Ì¸¢ÈÐ. ¾¡É¢Âò¾¢ý ¸¢¨¼ò¾¢¨ºÂ¢Âì¸õ

$x = y_0 \cos\sim t$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

¾¡É¢Âõ B - Â¢Ä¢ÕóÐ C - ¨Â «¨¼Â ±Îò¾ §¿Ãõ t ±É¢ø

$$DC = d - l\cos\sim = v_0 \cos\sim t$$ ¬ Ìõ

$$\therefore \cos\sim = \frac{d}{l + v_\circ t}$$

¾¡É¢Âò¾¢ý ¿¢¨Äì Ìòò ¾¢¨ºÂ¢ø þÂì¸õ

$$v_\circ \sin\sim t - \frac{1}{2}gt^2$$

±ý Ûõ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ

$$BD = -l\sin\sim = v_O \sin\sim .t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \sin\sim = \frac{gt^2}{2(l + v_O t)}$$

$\sin^2\sim + \cos^2\sim = 1$ ±ýÀ¨¾ô ÀÂýÀÎò¾

$d^2 = (l + v_0 t)^2 - g_4{}^2 - t^2$ ¬ Ìõ.

d - ¬ ÉÐ t - Â¢ý º¡÷ÀÄÉ¡¸¢ÈÐ.

þ í Ì l = 68.6 Á¦ð¼÷

$v_\circ$ =4.9 Á¦ Å¢É¡Ê

g = 9.8 Á¦ Å¢É¡Ê ^{2}

$$\therefore d^2 = (68.6 + 4.9t)^2 - \frac{(9.8)^2}{4}t^4$$

$$= (49)^2\left((4+t)^2 - t^4\right)$$

$$\therefore \left(2d\right)\frac{d}{dt}\left("d"\right)=\left(4.9\right)^{2}\left\{2(14+t)\right\}-4t^{3}$$

$$=2(4.9)^{2}\left\{(14+t)-2t^{3}\right\}$$

d-Â¦ý Á¾¦ôÒ ¦ÀÕÁò ¨¾ô ¦ÀÈ, $\frac{d("d")}{dt}=0$ ±ý È¡¸ §Å ñ Î õ.

$$\therefore 14+t-2t^{3}=0$$

t = 2 ±ýÀÐ þîºÁýÀ¡ðÊý ´Õ ¾¦÷× ¬ Ì õ.

· (5) ÅÐ ºÁýÀ¡ðÊü Ì ÁÚÓ ¨È t-Â¦ø Å ¨ ¸ ì ¦ ¸Ø ¨ Å ì ¸ ¡ ½ ,

$$2d.\frac{d^{2}}{dt^{2}}\left\{"d"\right\}\Big|_{t=2}+0$$

$$=2(4.9)^{2}\,(1-6t)\Big|_{t=2}+0$$

∴ t = 2 ±ýÀÐ, d-Â¦ý Á¾¦ô ¨Àô ¦ÀÕÁÁ¡ì Ì õ

∴ d -Â¦ý ¦ÀÕÁ¾¦ôÒ $=98\sqrt{\frac{3}{5}}$ Á¦ð¼÷

« ô§À¡Ð ±È¦§¸¡½Á¡ÉÐ $\cos\sim=\frac{\sqrt{15}}{4}=0.9682$ ±ý Û õ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å ¨ÃÂÚ ì ¸ôÀ Î õ. $\therefore\sim=14^{\circ}19$

4.3.10 ÀÂ¦üº¦

4.3.10.1 ´Õ Ð¸ û, §¿Ãõ t=0 Å¦É¡ÊÂ¦Ä¦ÕóÐ t = 3 Å¦É¡ÊÅ ¨Ã $\underline{v}=1.2t\underline{i}-t^{2}\underline{j}$ ±ý Û õ ¾¦ ¨ º§Å ¸òÐ¼ý þÂ í Ì ¸¦ÈÐ. « òÐ¸Ç¦ý þ¼ô¦ÀÂ÷îº¦ Â¡Ð?

[Å¦ ¨ ¼ $\frac{d\underline{r}}{d\underline{t}}=\underline{v}=1.2t\underline{i}-t^{2}\underline{j}$

$$\therefore \underline{r}=\int_{t=0}^{t=3}(1.2t\underline{i}-t^{2}\underline{j})dt$$

$$=\left[1.2\frac{t^{2}}{2}\underline{i}-\frac{t^{2}}{3}\underline{i}\right]_{t=0}^{t=3}$$

$$5.4\underline{i}-27\underline{j}$$

4.3.10.2 32Á¦ð¼ ¨Ãì ¸¦ ¨ ¼Å¦îº¡¸ì ¦ ¸¡ ñ ÊÕì Ì õÀÊ ±È¦ÂôÀ Î õ ´Õ Ð¸Ç¦ý §Å ¸õ Å¦É¡Êì Ì 28Á¦ð¼÷ ±É¦ø « ¾ý ±È¦§¸¡½ò ¨ ¾ì ¸¡ ñ ¸.

(g= 9.8 Á¦ (Å¦)^{2} ±É ì ¦ ¸¡û ¸)

[Å¦ ¨ ¼ $\sim=11.47.5,\sim_{2}=78^{\circ}1.25$]

4.3.10.3 ¾ó¾§¾¡÷ ±È¾ ¨º §Å¸ò§¾¡Î, ¾ó¾¦¾¡Õ ¸ ¨¼Å¡îºü Ì¡Â þÕÀ¡¨¾¸Ç ý Á ¸ô¦À¡Â ¯ÂÃí¸û Ó¨È§Â H_1, H_2 ±É ø $R = 4\sqrt{H_1H_2}$ ±É ì ¸¡ð Î¸.

4.3.10.4 ´Õ ¸øÄ¡ÉÐ $\sqrt{2gh}$ ±ý Ûõ ¾ ¨º§Å¸ò§¾¡Î h ¯ÂÃò¾Ö ûÇ ´Õ §¸¡ÒÃò¾ ÉÐ ¯îºÂÄÕóÐ ¸ ¨¼Å¡¸ ±ÈÂôÀÎ¸ ýÈÐ. «Ð §¸¡ÒÃò¾ ý «ÊÅÆÂ¡¸î ¦ºøÖõ Áð¼Á¡É ¾ ¨Ã ¨Â ±í Ì ¾¡ì Ì ¦ÁýÚ ¸¡ ñ¸. «Ð ¾¡ì Ìõ §Å¸õ ±ý É?

(Å ¨¼: $2h; 2\sqrt{gh}$)

4.3.10.5 ´Õ ÁÉ¾ý ´Õ Àó¨¾ ¿ ¨Äì Ìò¾¡¸ §Áø§¿¡ì¸ 56 Áð¼÷ ¯ÂÃò¾ü Ì ±ÈÂì Ü Î Á¡É¡ø, « ¨¾ «Å ý ±ùÅÇ× Á ¸ô¦À¡Â ¸ ¨¼ò¦¾¡ ¨ÄÅü Ì ±ÈÂì Ü Î¦ÁÉ ì ¸¡ ñ¸.

(Å ¨¼112 Á)

4.3.10.6 150Áð¼÷ ¯ÂÃÓ ûÇ ´Õ Ì ýÈ ý ¯îºÂÄÕóÐ Å É¡Êì Ì 284Áð¼÷ ±ý Ûõ §Å¸ò§¾¡Î 30° ²üÈò¾ø ´Õ Ã ¨Å, ÐôÀ¡ì¸ÂÄÕóÐ Í¼ôÀÎ¸ÈÐ. Í¼ôÀð¼ ÒûÇÂ ý ÅÆ§Â ¦ºøÖõ ¿ ¨Äì ÌòÐì §¸¡ðÊÄÕóÐ «ó¾ Å ¨Å, Ì ýÈ ÉÐ «ÊôÀ¡¸ò¾ÄÕì Ìõ ¿ ¨Ã «Êì Ìõ ÒûÇÂ ý ¸ ¨¼ò à Ãò ¨¾ì ¸¡ ñ¸. «Ð ±ô§À¡Ð ¿ ¨Ã «Êì Ìõ ±ýÀ ¨¾Ôõ ¸¡ ñ¸.

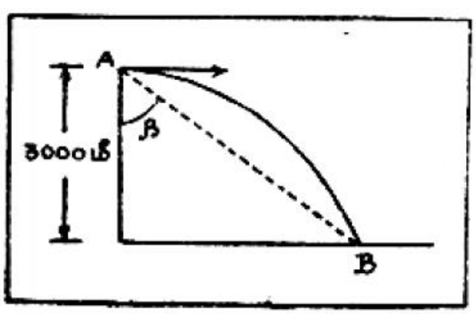
(¸¡üÈ ý ¾ ¨¼ ÒÈì ¸ ½ì ¸ôÀð Î ûÇ¾¡ì ¦¸¡û¸)

(Å ¨¼: $4260\sqrt{3}$ Áð¼÷ 30 Å É¡Ê¸ û)

4.3.10.7 ¾ ¨ÃÂø ´Õ ÒûÇÂÄÕóÐ ÐôÀ¡ì¸ Å É¡Êì Ì 300Áð¼÷ ±ý Ûõ Ó¸ôÒ §Å¸òÐ¼ý ´Õ Ì ñ ¨¼î Í Î¸ÈÐ. «ì Ì ñ Î ±È¾¡ É ò¾ÄÕóÐ 4000 Áð¼÷ ¦¾¡ ¨ÄÅÖõ, 200Áð¼÷ ¯ÂÃò¾Öõ ¯ûÇ µ÷ þÄì ¨¸ «Êì ÌÁ¡Â ý, ÐôÀ¡ì¸Â ý ²üÈ§¸¡½õ Â¡Ð?

(Å ¨¼ $\sim_1 = 15^\circ 38'$ «øÄÐ $\sim_2 = 77^\circ$)

4.3.10.8 ´Õ ¦ÅÊì Ì ñ Î ÅÁ¡É õ, 3000Áð¼÷ ¯ÂÃò¾ø Á ½ ì Ì 500 ¸.Á §Å¸ò¾ø À¼õ (4.3.27)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¸ ¨¼Å¡¸ ´Õ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºø¸ÈÐ. (i) ¾ ¨ÃÂÖ ûÇ µ÷ þÄì ¨¸ (B) º¡Â¡¸ «Êì ÌõÅ ñ ½õ «ó¾ þÄì ¨¸ ì ¸¼ôÀ¾ü Ì ±ùÅÇ× ¦¾¡ ¨ÄÅü Ì Óý É¡ø ÅÁ¡É ò¾ÄÕóÐ Ì ñ Î Å Î Å ì ¸ôÀ¼ §Å ñ Î¦ÁÉ ì ¸¡ ñ¸.



À¼õ 4-3-27

(ii) Ì ñ Î Å¢Î Å¢ì¸ôÀ Î õ§À¡Ð Å¢Á¡É ò¨¾Ôõ þÄì ¨¸Ôõ §º÷ì Ì õ ¦¾¡¼ì¸ô À¡÷¨Åì§¸¡ Î, ¿¢¨Äì Ìò Ðì §¸¡ð Î¼ý «¨Áì Ì õ ±ý Ûõ §¸¡½ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸.

Å¢¨¼ $(i)3435$ Á¦, $(iii) = 41^{\circ}8'$)

4.3.10.9 hÁ¦ð¼÷ ¯ÂÃò¾¢ø, Å¢É¡Êì Ì v_0 Á¦ð¼÷ §Å¸ò¾¢ø ¸¢¨¼Â¡¸ ´Õ §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºøÖõ Å¢Á¡Éò¾¢Ä¢ÕóÐ « ï ºø ¸ð Î (bundle of mail) ´ýÚ Å¢Î Å¢ì¸ôÀ Î ¸¢ýÈÐ. «Ð ±ô§À¡Ð, ±í§¸ ¾¨Ã¨Â «Êì Ì ¦Áý Úõ, «Ð ¾¨Ã¨Â «Êì Ì õ§À¡ÐûÇ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý «Ç¨ÅÔõ, ¾¢¨º¨ÂÔõ ¸¡ ñ ¸.

[Å¢¨¼ $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}, x=v_{\circ}\sqrt{\frac{2h}{g}}, v=\sqrt{v_{\circ}^{2}-2gh,}{}^{-}=\tan^{-1}\left(\frac{2gh}{v_{\circ}}\right)$]

4.3.10.10 60Á¦ð¼Õì Ì «ôÀ¡ÖûÇ 30Á¦ð¼÷ ¯ÂÃÁ¡É ´Õ ÍÅ¡¢ý ¯îº¢ì Ì §ÁÄ¡¸ ¾¼ÅÄ¡ì ¸ ¸¢¨¼ò¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºøÖõ ´Õ Ã¨ÅÂ¢Û¨¼Â ¾¢¨º§Å¸ò¨¾Ôõ, ±È¢¾¢¨º¨ÂÔõ ¸¡ ñ ¸. (9.81 Á¦ Å¢2)

(Å¢¨¼ $v_{\circ}$ 108.5 Á¦ Å¢ $\sim = 45^{\circ}$)

4.3.10.11 51 Á¦ð¼÷ ¯ÂÃÁ¡É ´Õ §¸¡ð¨¼ì §¸¡ÒÃ¯îº¢¨Âì ¸¢¨¼Â¡¸ «Êì Ì Á¡Ú ´Õ ÐôÀ¡ì¸¢Ã¨Å Í¼ôÀ Î ¸¢ÈÐ. ±È¢§¸¡½õ $\cot^{-1}(4)$ ±È¢¾¢¨º§Å¸õ ÍÁ¡÷ 130.4Á¦ Å¢É¡Ê ±É ì ¸¡ð Î ¸. (g= 9.81 Á¦ Å¢)

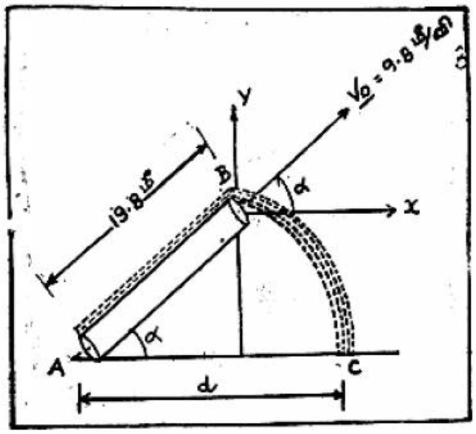
4.3.10.12 ¾¨ÃÂ¢Ä¢ÕóÐ ¸¢¨¼Áð¼òÐ¼ý $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ ±ý Ûõ §¸¡½º¡öÅ¢ø ±È¢ÂôÀð¼ Ð¸û ´ýÚ ±È¢¾¡É ò¾¢Ä¢ÕóÐ ¸¢¨¼¾Çò¾¢ø 48Á¦ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø þÕì Ì õ 21Á¦ð¼÷ ¯ÂÃÓûÇ §¸¡ÒÃ¯îº¢¨Âò ¾¼ÅÄ¡¸ ò ¾¡ ñ Êî ¦ºø¸¢ÈÐ. Ð¸Ç¢ý ±È¢¾¢¨º §Å¸õ ±ýÉ? (g= 9.81Á¦ Å¢)

(Å¢¨¼ 34.293 Á/ Å¢)

4.3.10.13 ¾¨ÃÂ¢ø ´Õ ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ Å¢É¡Êì Ì 28Á¦ §Å¸ò¾¢ø ±È¢ÂôÀ Î õ ´Õ Ð¸û ±È¢¾Çò¾¢Ä¢ÕóÐ ¸¢¨¼¾Çò¾¢ø 32Á¦ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢Ä¢Õì Ì õ 14Á¦ð¼÷ ¯ÂÃÓûÇ ÍÅ¡¢ý ¯îº¢¨Âò ¾¼ÅÄ¡¸ò ¾¡ ñ Êî ¦ºø¸¢ÈÐ. ±È¢§¸¡½ò¨¾ì ¸½ì¸¢Î ¸.

(Å¢¨¼ $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ «øÄÐ $\tan^{-1}\left(\frac{17}{4}\right)$)

4.3.10.14 19.8Á¦ð¼÷ ¿¦ÇÓûÇ AB ±ý Ûõ Å¨Ç ÌÆø (Conveyer belt) A ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø «¨ÁóÐûÇ Å¢¨½Âø (hinge) ´ýÈ¢ø À¼õ (4.3.28)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¦À¡Õò¾ôÀð Îì ¸¢¨¼¾ÇòÐ¼ý ±ùÅ¢¾ì §¸¡½º¡¢¨ÅÔõ ¦ÀÈò¾ì¸¾¡¸ ¯ûÇÐ. Å¨Ç ÌÆø, Å¢É¡Êì Ì 9.8Á¦ð¼÷ ±ý Ûõ ºÃ¡É §Å¸ò¾¢ø þÂí Ì ¸¢ÈÐ. ¾¡É¢ÂÂ½¢ ¸û «ùÅ¨Ç ÌÆø ãÄÁ¡¸ î ¦ºÖò¾ôÀð Î, B-Â¢ø «¨Å¸û ¾¡É¡ ¸§Å þÈí Ì Á¡Ú Å¢¼ôÀð Î, C-³ «¨¼¸¢ýÈÉ. A-ì Ì õ, C-ì Ì õ þ¨¼§ÂÔûÇ ¦¾¡¨ÄÅ¢ý Ü Î Á¡É ¯îº Á¾¢ô¨Àì ¸¡ ñ ¸. «¾ü§¸üÈ §¸¡½º¡¢¨ÅÔõ ¸¡ ñ ¸.



À¼õ 4-3-28

(g= 9.8 Á¦ (Å¢É¡Ê)2 ±É ì ¸¡ ñ ¸.)

(Å¢¨¼ $Td = 33.94$ Á¦~ $= 30^\circ$)

4.3.10.15 Ð¸û ´ýÈ¢ý þÂì¸ò¨¾ $x = t^2 + 5t, y = t^3 - 8t^2 + 2$ ±ýÀ¨Å «È¢Å¢ì¸¢ýÈÉ (x,y Á¦ð¼÷ «ÇÅ¢Öõ t Å¢É¡ÊÂ¢Öõ «ÇÅ¢¼ôÀÎ¸¢ýÈÉ) t=2 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ ÁüÚõ ÓÎì¸õ ¬¸¢ÂÅü¨Èò ¾¡÷Á¡É¢ì¸×õ.

(Å¢¨¼ V=21.932m/s; α=65.77^0

a=4.472 m/s^2; β=63.44^0)

4.3.10.16 Ð¸û ´ýÚ $N = 20t^2 - 100t + 50$ ±ýÈ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø þÂíì¸¢ÈÐ. ÓÎì¸õ âî º¢ÂÁ¡ì õ ¾Õ½ò¾¢ø «ô¦À¡ÕÇ¢ý ¾¢¨º§Å¸õ ±ýÉ?

(Å¢¨¼ V=75 m/s^2)

4.3.10.17 Ð¸û ´ýÈ¢ý þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ $s = 2t^3 - 30t^2 + 100t - 50$, v=0 ±ýÚûÇ§À¡Ð §¿Ãò¨¾ (t) ¾¡÷Á¡É¢ì¸.

4.3.13.18 s «îº¢ø ´Õ¦À¡Õû þÂíì õ§À¡Ð «¾ý ¾¢¨º§Å¸õ $N = 2 + 5t^{3/2}$ ±É¢ø t=4 ±ýÚûÇ§À¡Ð, þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢(s) ¾¢¨º§Å¸õ(v) ÁüÚõ ÓÎì¸õ(a) ¬¸¢ÂÅü¨Èì ¸ ñ ÊÎ ¸.

(Å¢¨¼: s=72Á¦ , v=42Á¦/ (Å¢É¡Ê),a= 15Á¦/ (Å¢É¡Ê)2

4.3.10.19 x-y ¾Çò¾¢ø, Ð¸Ç¢ý ¾¢¨ºÂ¢¿¢¨Ä §¿Ãõ t=3.60 Å¢É¡Ê ±ýÚûÇ§À¡Ð $(2.76\underline{i} - 3.28\underline{j})$ Á¦ t=3.62 Å¢É¡Ê ±ýÈ ¾Õ½ò¾¢ø "¾¢¨ºÂ¢" ¿¢¨Ä þùÅ¢¨¼¦ÅÇ¢Â¢ø Ð¸Ç¢ý º¡Ã¡º¡¢ §Å¸ò¾¢ý ÀÕÁ¨ÉÔõ, «Ð x «îÍ¼ý ²üÀÎòÐõ §¸¡½ «Ç¨Å¨ÂÔõ ¸¡ ñ ¸

(Å¢¨¼: N=2.92 Á¦/Å¢É¡Ê θ=-59^0)

4.3.10.20 Ð¸û ´ýÚ 0.4 ¬¨ÃÔûÇ Åð¼ò¾¢ø þÂí Ì¸¢ÈÐ Ð¸Ç¢ý §Å¸õ, Á¡È¡Áø (0.6 Á/ Å¢É¡Ê ±ýÈ¡ø, «òÐ¸Ç¢ý Ó Î ì¸ò¾¢ý ÀÕÁ¨É ì ¸ ñ Ê¼×õ

(Å¢¨¼:0.9Á/Å¢É¡Ê)^2

4.3.10.21 §Á¡ð¼¡÷Å ñ Ê ´ýÚ (240Á) ¬¨ÃÔûÇ À¡¨¾Â¢ø þÂí Ì¸¢ÈÐ. §Å¸õ(75¸¢.Á) Á½¢ ±ýÚûÇ ¾Õ½ò¾¢ø Ó Î ì¸ò¾¢ý ÀÕÁý, 3Á(Å¢É¡Ê), ±ýÈ¡ø §Á¡ð¼÷Å ñ Ê §Å¸ò¾¢ý ஜ¾ò¨¾(rate)ò ¾¡÷Á¡É¢ì¸.

[Å¢¨¼; $a_t = \pm 2.39$ Á/ (Å¢É¡Ê)^2]

4.3.10.22 மோட்¼¡÷Å ñ Ê ´ýÚ(15 Á) ¬¨ÃÔûÇ À¡¨¾Â¢ø þÂí Ì¸¢ÈÐ §Å¸õ (V=4.5மீ/Å¢É¡Ê ÁüÚõ §Å¸ÅÇ÷îº¢Â¢ý Å¢¸¢¾õ V=34/(Å¢É¡Ê) ±ýÚûள தருணத்¾¢ø. §Á¡ð¼¡÷Å ñ ÊÂ¢ý Ó Î ì¸ò¾¢ý ÀÕÁ¨É ¾£÷Á¡É¢ì¸×õ.

[Å¢¨¼ $a_t = \dot{V} = 3$ Á/(Å¢É¡Ê)^2

$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 2.025$ Á/(Å¢É¡Ê)^2

$a = 3/62$ மீ/ (Å¢É¡Ê)^2]

4.3.10.23 $y = \frac{1}{20}x^2$ ±ýÈ ÀÃÅ¨Çô À¡¨¾Â¢ø ºÚì Ì ÀÅ÷ (skier) ´ÕÅ÷ A ±ýÈ ÒûÇ¢¨Â ²òÐõ§À¡Ð «ÅÉÐ §Å¸õ 6Á/Å¢É¡Ê ±ýÚõ ÁüÚõ §Å¸ò¾¢ý வ‌ளர்÷îº¢Â¢ý Å¢¸¢¾õ 2Á/ (Å¢É¡Ê)^2 ±ýÚûÇ¾¡¸¢ø ºÚì ÌÀÅ¡¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý திசை º¨ÂÔõ «îºó¾÷ôÀò¾¢ø «ÅÉÐ Ó Î ì¸ò¾¢ý ÀÕÁý, ¾¢¨º¨ÂÔõ தீர்Á¡É¢ì¸×õ ºÚì ÌÀÅ¡¢ý ÀÕÁ¨É ¿¢Ã¡¸¡¢ì¸×õ) (Å¢¨¼

$v_A = 6$ Á/ (Å¢É¡Ê)

a=2.37 Á/ (Å¢É¡Ê)^2

4.3.10.24 §¸¡½ à Ãò¦¾¡¨Ä× «¨ÁôÀ¢ø Ð¸û ´ýÈ¢ø "¾¢¨ºÂ¢" ¿¢¨Ä r=4(1+sint)Á ÁüÚõ θ= (24^{-t}) §ÃÊÂý ¬ Ìõ. (t ¬ÉÐ Å¢É¡ÊÂ¢ø «ÇÅ¢¼ôÀ Î ¸¢ÈÐ) t=2 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸õ ÁüÚõ Ó Î ì¸õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¬¨Ã(radial) ÁüÚõ ÌÚì¸¡É(transverse) ÜÚ¸¨Çì (components) ¸¡ ñ ¸.

4.3.10.25 Ð¸û ´ýÈ¢ý §¸¡½ «î Í¸û Ó¨È§Â $r = 2+3t^2, \theta = 2+1.5t^2$ (r Áð¼¡¢Öõ,θ ¬¨ÃÂÉ¢Öõ «ÇÅ¢¼ôÀ Î ¸¢ýÈÉ). (t-Å¢É¡Ê¨Âì Ì È¢ì¸¢ÈÐ). ¾¢¨º§Å¸õ V-ý ÀÕÁ¨ÉÔõ, Ó Î ì¸õ a-ý ¬¨Ã ÁüÚõ ÌÚì¸¡É ÜÚ¸¨Ç t=3 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð ¾£÷Á¡É¢ì¸×õ.

(Å¢¨¼: v = 26.62Á/(Å¢É¡Ê)

a_n = -2343Á/(Å¢É¡Ê)^2

a_θ = 411 Á/ (Å¢É¡Ê)^2)]

4.3.10.26 y=$\frac{1}{60}x^2-25$ ±ýÈ ÀÃÅ¨ÇôÀ¡¨¾Â¢ø, 600N ±¨¼ÔûÇ ºÚì Ì ÀÅ÷, ¿¢Äò¾ÊÂ¢ø A ±ýÈ ÒûÇ¢¨Â «¨¼Ôõ§À¡Ð, «Å¡¢ý ¾¢¨º§Å¸õ 9Á¡/Å¢É¡Ê ±É¢ø, «Å÷ ¾Çò¾¢ý ¦ºí ÌòÐ ¾¢¨ºÂ¢ø A ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø ®ÎÀÎò¾ôÀÎõ ÓÂüº¢ Å¢¨º¨Ãò ¾£÷Á¡É¢ì¸×õ. §ÁÖõ A ÒûÇ¢Â¢ø «ÅÃÐ Ó Î ì¸ò¨¾Ôõ ¸ñ Ê¼×õ.

[(Å¢¨¼ N $_A$=765N,a $_A$=2.7Á¡/ Å¢É¡Ê)2]

4.3.10.27 þÂì¸ô À ñ ÒÃ¡ö×($\mu_k=0.3$) ¯ûÇ ¸¢¨¼¾Çò¾¢ý ÁÄ 100kg ±¨¼ÔûÇ ÁÅ «¨¼ôÒô¦ÀðÊ ´ýÚ ¿¢¨ÄÂ¡¸ ¯ûÇÐ. (800-N) þØì Ìõ Å¢¨º ´ýÚ ¸¢¨¼§¸¡ðÊü Ì 30° §¸¡½ «ÇÅ¢ø ÀÂýÀÎò¾ôÀÎ¸¢ÈÐ. ¿¢¨Ä «¨ÁôÀ¢Ä¢ÕóÐ 2 Å¢É¡Êì Ì ¦ÀðÊ þØì¸ôÀðÎûÇ§À¡Ð ¦ÀðÊÂ¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ a = 5.19 Á¡/ (Å¢É¡Ê)2 V= 15.6Á¡/ Å¢É¡Ê)

4.3.10.28 þÂì¸ô À ñ ×Ã¡ö× ($u_k=0.3$) ¯ûÇ, ¸¢¨¼ì§¸¡ðÊü Ì (30°) º¡¢× ¦¸¡ñ¼ ¾Çò¾¢ø 500 ±¨¼ÔûÇ ¸ÉÁ¡É ¦ÀðÊ ´ýÚ ¸¡ú§¿¡ì¸¢ÂÅ¡Ú Á¡Ëò¾ì¸ P= 200t ÀÕÁý ¦¸¡ñ¼ Å¢¨ºÂ¡ø þØì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ Å¢¨º ¦ºøÀÎò¾¢Â Å¢É¡ÊÂ¢ø ¦ÀðÊÂ¢ý ¾¢¨º§Å¸õ ±ýÉ¦ÅýÚ ¸¡ñ¸. ¦ÀðÊÂ¢ý ÐÅì¸ ¾¢¨º§Å¸õ $V_0=3$Á¡(Å¢É¡Ê) º¡ö×¾Çò¾¢ø ¸¡ú§¿¡ì¸¢ÂÅ¡Ú ¯ûÇÐ.

(Å¢¨¼ v=15.6 Á¡/Å¢É¡Ê).

4.3.10.29 ¯Õ¨ÇìÜÚ¸û ÀÂýÀÎò¾ôÀÎõ§À¡Ð, ¾¢¨ºÂ¢ «Ä Ì ¸û (unit victors) Ó¨È§Â u_n, u_-, u_z þÂì¸î ºÁýÀ¡Î

$$\sum \underline{F} = m\underline{a};$$

$$\sum F_r u_r + \sum F_- u_- + \sum F_z u_z = ma_r u_z + ma_- u_- + ma_z r_z$$

10 N ¸ÉÓûÇ ¦ÀðÊ ´ýÚ ¯Ã¡öÅüÈ ¸¢¨¼ôÀ¡¨¾Â¢ø, §¸¡½ àÃí¸û $r=3t^2$Á¡ $^-=0.5t$ ¬¨ÃÂý¸û, (t Å¢É¡ÊÂ¢ø) ±ýÚûÇÅ¡Ú þÂí Ì¸¢ÈÐ. 1Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð ¦¾¡Î§¸¡ðÎ Å¢¨º $\underline{F}$ ý ÀÕÁ¨Éò ¾£÷Á¡É¢ì¸×õ.

¾£÷×

П¯ «îÍ¸Ç¢ø, ¦¾¡Î§¸¡ðÎ Å¢¨º $\underline{F}$ §¸¡½õ ¨ ³ì ¦¸¡ñÎ þ¼õ ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ§À¡Ð À¡¨¾¨Â($r=F(^-)$) ±ýÈ º¡÷ÀÄý Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. Ð¨½ «ÄÌ(t-³) r,¯ì¸Ç¢ø «¸üÚõ§À¡Ð r=120 ¯±ýÈ¡¸¢ÈÐ t=1 Å¢É¡Ê $^-=0.5$ (1 Å¢É¡Ê)- 0.5 ¬¨ÃÂý.

±É§Å $\tan ¨ = \frac{r}{\frac{dr}{d^-}} = 0.25$

$· = 14.04^\circ$

4.3.10.30 (a) þÂì¸î ºÁýÀ¡ Î¸û Ð¸û Ó¨È§Â +

$$\nearrow \sum F_n = ma_n \Rightarrow F\cos 14.04 - N\sin a_n 14.04 = \frac{10}{9.81}$$

$$\nwarrow \sum F_- = ma_- \Rightarrow F\sin 14.04 + N\cos 14.04 = \frac{10}{9.81}a_-$$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{-}^2 = 5.25$ Á¢/(Å¢É¡Ê)^2

$a_- = r\ddot{-} + 2\dot{r}\dot{-} = 6$ Á¢/(Å¢É¡Ê)^2

$\therefore F = 6.68N$

$N = 4.64N$

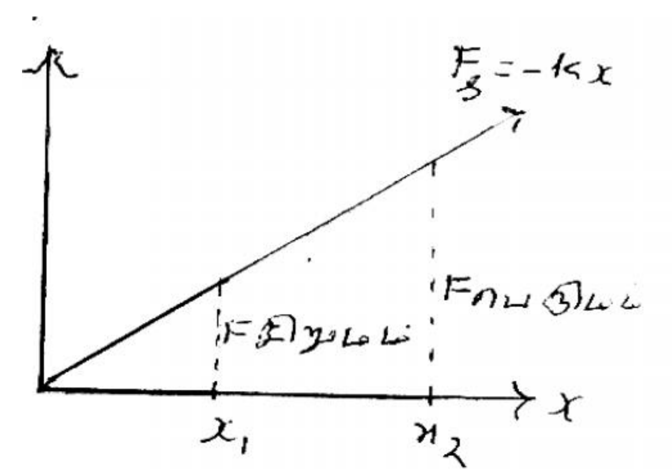
4.3.10.30 (b) Ð¨½ì§¸¡û(satellite) ´ýÚ ÒÅ¢Â¢ý ÒÅ¢Â÷ôÒ ¸Çò¾¢Ä¢ÕóÐ ¾ôÀ¢òÐì ¦¸¡ûÅ¾ü Ì¡¢Â ¾ôÀ¢òÐì ¦¸¡ûÙõ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ ¾÷Á¡É¢ì Ìõ ºÁýÀ¡ð¨¼ì ÜÚ¸.

[Å¢¨¼: ¾ôÀ¢òÐì ¦¸¡ûÙõ ¾¢¨º§Å¸õ $= \sqrt{2gR}$]

R = ÒÅ¢Â¢ý ¬Ãõ

4.3.10.31 À¨ÆÂ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅôÀ¾ü¸¡É Á¢ûþÂøÒ¨¼Â ãÄô¦À¡ÕÇ¢ý §¿÷§¸¡ðÊü Ì¡¢Â, À¨ÆÂ¿¢¨ÄìÌ ì ¦¸¡ñ Î ÅÕÅ¾ü¸¡É Å¢¨º¨Â ±ùÅ¡Ú ¸ñ Î¦¸¡ûÅ¡ö?

(Å¢¨¼; §¿÷§¸¡ðÊü Ì¡¢Â À¨ÆÂ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅôÀ¾ü¸¡É Å¢¨º = $\int_{x_1}^{x} Fdx$)



4.3.10.32 "Ê « ÄõÀ÷Ê ý" (D' Alembert) ¾òÐÅò ¨ ¾ì ÜÚ ¸?

Å¢ ¨ ¼: ¦ÅÇ¢§ÂÔûÇ Å¢ ¨ º ¸ û ÁüÚõ ¯ûÅ¢ ¨ º ¸ û ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ý Å¢ ¨ ºò ¦¾¡ Ì ¾¢ ´Õ Ð ¸ ¨ Ç¢ î ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø ¨ Åò¾¢Õì ¸ ì Ü Î õ ±É ì ¸ Õ¾Ä¡õ. ¦ÅÇ¢Å¢ ¨ º ¸ Ç¢ý Å¢ ¨ Ç× ´ÕÐ ¸ Ç¢ø ¦ºÂøÀ Î õ§À¡Ð, â î º¢Â Á¾¢ô ¨ Àô ¦ÀÈ¡ÁÄ¢Õì Ì õ §¿Ãò¾¢ø, « òÐ ¸ û þÂì ¸ Å¢Âü ºÁ¿¢ ¨ ÄÂ¢ø þÕôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ûÇôÀ Î õ. þò¾òÐÅ§Á "Ê « ÄõÀ÷Ê ý ¾òÐÅõ" ±ýÚ ÜÈôÀ Î ¸¢ÈÐ.

4.3.10.33. §¸¡û ¸ Ù ì Ì ¡¢Â ¦ ¸ ôÇ¡¢ý Å¢¾¢ ¸ û (Kepler's Laws of Planetary Motran) Â¡ ¨ Å?

Å¢¾¢ 1: ¸ ¾¢ÃÅ ¨ É ì Ì Å¢ÂÁ¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î §¸¡û ¸ û ¿¦ûÅð¼ í ¸ ¨ Ç Å ¨ Ã ¸ ¢ýÈÉ.

Å¢¾¢ 2: ¸ ¾¢ÃÅÉ¢Ä¢ÕóÐ §¸¡û ´ ýÈ¢ü Ì Å ¨ ÃÂôÀÎ õ. ¬ ¨ Ãò¾¢ ¨ ºÂ¢ ºÁÁ¡É §¿Ãò¾¢ø ºÁÁ¡É ÀÃôÀÇ ¨ Å §Å ¸ Á¡ ¸ î ¦ºö ¸ ¢ÈÐ.

Å¢¾¢ 3: §¸¡û ¸ Ç¢ý ¸ ¡ÄÅð¼ í Ç¢ý Å÷ì ¸ í ¸ û «ó¾ó¾ §¸¡û ´Ø í Ì ¸ Ç¢ý orbits « ¨ Ã §ÀÃîÍ ì ¸ Ç¢ý ÓôÀÈ ¸ Ù ì Ì Å¢ ¸ ¢¾ ºÁÁ¡É «ÇÅ¢ø þÕì ¸ ò¾ì ¸ È.

Å¢¾¢ þÃ ñ Ê ýÀÊ §¸¡û ´ ù¦Å¡ ýÈ¢ü Ì õ ÀÃôÀÇ× §Å ¸ õ. (areal velocity); $\frac{1}{2}r^2$ µ÷ Á¡È¢Ä¢Â¡ Ì õ. ÁüÚõ §¸¡Ç¢ø ¦ºÂøÀ Î õ Å¢ ¨ ºÂ¢ý Ì Úì Ì ì Ì ¡¢Â ÜÚ â î º¢ÂÁ¡ Ì õ. ±É§Å §¸¡û ´ ýÈ¢ý§Áø ¦ºÂøÀ Î õ Å¢ ¨ º ¬ ¨ Ãò¾¢ ¨ ºÂ¢ý ¿¦ÇÅ¡ðÊø ÁðÎ§Á ¦ºÂøÀ Î õ. ±É§Å þùÅ¢ ¨ º ¨ ÁÂÁ¡É Å¢ ¨ ºÂ¡ Ì õ ¸ ¾¢ÃÅ ¨ É Ì Å¢ÂÁ¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î §¸¡û þÂí Ì õ À¡ ¨ ¾ ¨ Â ¨ ÁÂ ´Øì Ì ±É ì ÜÈôÀ Î õ.

§¸¡Ç¢ý§Áø ¦ºÂøÀ Î õ ¸ Å÷îº¢Å¢ ¨ º, §¸¡Ù ì Ì õ ¸ ¾¢ÃÅÛ ì Ì õ þ ¨ ¼ôÀð¼ ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢ý þÕÀÊ ¾ ¨ Ä ¸ ¦ú «øÄÐ §¿÷Á¡Ú Å¢ ¸ ¢¾ò¾¢ø þÕì ¸ ò ¾ì ¸ Ð Å¢¾¢-1 þ ¨ ¾ò¾¡ý ¦¾Ç¢×À Î òÐ ¸ ¢ÈÐ.

þÐ§Å ¿¢ä ð¼É¢ý ¾ ¨ Ä ¸ ¦úÅ÷ì ¸ Å¢¾¢ (Inverse Square Law) ¬ Ì õ.

4.3.10.34 ÒÅ¢ §ÁüÀÃôÀ¢Ä¢ÕóÐ 320 ¸ ¢.Á¢ Ì òÐ ¯ÂÃò¾¢ø, ¾¢ ¨ º§Å ¸ õ 36,000 ¸ ¢.Á¢/Á½¢ ¯ûÇÅ¡Ú §¸¡û ´ ýÚ ±È¢ÂôÀ Î ¸ ¢ÈÐ. (launched) Å¦º¢ ±È¢ÂôÀ Î õ §¿Ãò¾¢ø §¸¡û þÂ í Ì õ À¡ ¨ ¾, ÒÅ¢Â¢ý §ÁüÀÃôÀ¢ü Ì þ ¨ ½Â¡ ¸ « ¨ Á ¸ ¢ÈÐ. ÒÅ¢Â¢ý §ÁüÀÃôÒ §¸¡ÇÅÊÅ¢ø ¯ûÇÐ ±É ì ¦ ¸ ¡ ñ Î (¬Ãõ 640 ¸ ¢.Á¢) À¢ýÅÕÅÉÅü ¨ È ¾÷Á¡É¢ì ¸ ×õ

1. §¸¡Ç¢ý Å¢ÍôÀ¡ ¨ ¾
2. ´Øì Ì §¿Ãõ(Obital time)
3. ¾ôÀ¢òÐì ¦ ¸ ¡û Ù õ ¾¢ ¨ º§Å ¸ õ
4. Åð¼¦Å¡Øì Ì ¡¢Â ¾¢ ¨ º§Å ¸ õ.

4.3.10.35 ´Õ §¸¡ðÊø þÂí Ì õ ÁüÚõ ´§Ã ¸ ¡Ä í ¸ Ù ¨ ¼Â ºí¡Á¡É¢Â ºí¡¢ ¨ º þÂì ¸ í ¸ û þÃ ñ Ê ý Å¢ ¨ Ç× ´Õº¡Á¡É¢Â ºí¡¢ ¨ º þ¢Âì ¸ ¦ÁÉ ¿¢Ú× ¸ .

¿¢ð¼¢ì ¦ ¸ Ø ª þÂü ¨ ¸ ¿¢Çõ l þÅü ¨ ÈÔ ¨ ¼Â ¸ Â¢Ú ´ ýÚ «¾ý ¿ î ôÒûÇ¢Â¼ò¾¢ÖûÇ ¿¢ ¨ ÈÔ ¨ ¼Â ´ÕÐ ¸ ¨ Ç ì ¦ ¸ ¡ ñ Î ûÇÐ. «¾ý þÂü ¨ ¸ ¿¢Çò¾¢ü Ì þÕÁ¼í Ì , «¾ý ÑÉ¢ ¸ ¨ Ç ¿¢ ¨ ÄÂ¡ ¸ ¨ ÅòÐ ¿¢ðÊ, «¾ ¨ É ´Õ

Á¦ÕÐÅ¡É §Á¨ºÁ¦Ð ¨Åì¸ôÀðÊÕì¸¦ÈÐ. «òÐ¸¨Ç ¸Â¦üÈ¦ý ¾¦¨ºÂ¦ø þ¼õ ¦ÀÂ÷ò¾¡ø, «¨Ä× §¿Ãõ ® $\sqrt{\frac{ml}{a}}$ ±É ¿¦Ú×¸.

4.3.10.36 (a). ÒÅ¦Â¦÷ôÒ Å¦¨º ´ýÚ Áð Îõ ¦ºÂøÀð Îû Ç ¿¦¨ÄÂ¦ø, ¸¦¨¼ «îÍ ´ý¨Èî ÍüÚõ ´Õ ¦À¡ÕÇ¦ý þÂì¸ò¾¦üÌ ¯¸ó¾ ´Õ Å¨¸ì¦¸Øî ºÁýÀ¡ð¨¼ô ¦ÀÚ¸.

(b) «¨Ä× Á¦¸îº¦È¦Â¾¡ Ìõ ¾Õ½ò¾¦ø, «Ð ´Õ º¡Á¡É¦Â º¦¡¦¨º þÂì¸¦ÁÉÅÕÅ¦ «¨Ä× §¿Ãò¾¦ý Á¦îº¦Ú Á¾¦ô¨ÀÔõ ¸½ì¸¦Î¸.

(c) ¸¦¨¼«îº¡¸ ¦ºùÅ¸Äõ ´ý¨Èî ÍüÈ¦ ¬Îõ¦À¡ØÐ, ÁüÈ ¦ºùÅ¸Äõ «¨Ä×¨ÁÂõ ÅÆ¦î¦ºøÖõÀÊ ´Õ ¿¦ÇÅ¨Çò¾¸Î ¯ûÇÐ. «ó¾ ¿¦ûÅ¨ÇÅ¦ý ¨ÁÂÅ¸üîº¦ò¾¸× $\frac{1}{2}$ ±É¿¦Ú×¸.

(d) ´Õ ÑÉ¦Â¦ø m ¿¦¨ÈÔ¨¼Â Ð¸û ´ý¨Èì ¦¸¡ñÎ ÁüÈ ÑÉ¦ÅÆ¦î ¦ºøÖõ ¸¦¨¼«î¨ºô ÀüÈ¦ 2a ¿¦Çõ m ¿¦¨È ¯¨¼Å ´Õ §¸¡ø «¨Ä¸¦ÈÐ. ¿¦¨ÄìÌòÐì §¸¡ðÊüÌ þÕÒÈò¾¦Öõ 60° §¸¡½ò¾¦ø, «ó¾ §¸¡ø «¨Äó¾¡ø, §¸¡ø ¿¦¨ÄìÌò¾¡¸ þÕìÌõ§À¡Ð, «îº¦ýÁ¦Ð «Óì¸ò¨¾ì ¸¡ñ ¸.

(e) ´Õ ¾Çò¾¦ø «¨ÁÔõ Å¨Ç× §¸¡ðÊý ºÁýÀ¡Î ($n = f(\,)$) ±É¦ø, «¾¦ø ¿¸Õõ ÒûÇ¦Â¦ý Ó¸ðÊÉÐ ¬¨Ã, ÌÚìÌì ÜÚ¸ÙìÌ¡¦Â §¸¡¨Å¸¨Ç ÅÕÅ¦.

(f) ÌÅ¦Âò¨¾ ±ô¦À¡ØÐõ §¿¡ì¸ôÀð¼ Å¦¨ºÂ¦É¡ø ¿¦ûÅð¼ò¾¦ø ´ÕÐ¸û ¿¸Õ¸¦ÈÐ Å¦¨ºÂ¦ý Å¦¾¦, À¡¨¾Â¦ø ´Õ ÒûÇ¦Â¼òÐ ¾¦¨º§Å¸õ, ¸¡ÄÅð¼ §¿Ãõ ±ýÀÉÅü¨Èì ¸¡ñ ¸.

(g) ¸¦¨¼¾Çò¾¦ýÁ¦Ð µ¦ÃÈ¦¦À¡ÕÇ¦ý Å¦îºò¨¾Ôõ, µð¼¸¡Äò¨¾Ôõ ¸¡ñ ¸.

4.3.10.37 ´Õ ¸¦¨¼¾Çò¾¦ø ÀÃí¸¦ìÌ ñ Î ´ýÈ¦ý Å¦îºõ R ¬Ìõ. «ùÅ¾õ º¡ò¾¦ÂôÀÎõ þÃ ñ Î À¡¨¾¸Ç¦ý Á¦ô¦ÀÕÁ ¯ÂÃí¸û h_1, h_2 ±É¦ø, R = 4($\sqrt{h_1.h_2}$) ±É ¿¦Ú×¸.

4.3.10.38 º¦Ã¡É ÓÎì¸òÐ¼ý ´Õ §¸¡ðÊýÁ¦Ð, ÒûÇ¦ ´ýÚ ¿¸Õ¸¦ÈÐ. ¦¸¡Îò¾ þ¨¼§¿Ãí¸û t_1, t_2, t_3 ±É¦ø «¾ý º¡º¦ §Å¸í¸¨Ç v_1, v_2, v_3 ±ýÅ¨Å ÌÈ¦ôÀ¦Î¸¦ýÈÉ. $(v_1 - v_2)(t_2 + t_3) = (v_2 - v_3)(t_1 + t_2)$ ±É ¿¦Ú×¸.

4.3.10.39 M ¿¦¨ÈÔ¨¼Â Ìñ Î ´ýÚ v §Å¸òÐ¼ý ¦ºøÖ¸¦ÈÐ. ¯û ¦ÅÊò¾ø ¬üÈø E ³ô À¦ÈôÀ¦òÐ ¿¦¨È¨Â a;b Å¦¸¦¾ò¾¦ø þÃ ñ Î À¡¸í¸Ç¡¸ Ì ñ ¨¼¯¨¼ì¸¦ÈÐ Ó¾Ä¡Å¾¡É þÂì¸ì§¸¡ðÊø þÃ ñ Î À¡¸í¸ Ù õ ¿¸÷óÐ ¦¸¡ ñ ÊÕì¸¦ýÈÉ. «ÅüÈ¦ý §Å¸í¸û $v + \sqrt{\frac{2bE}{bm}} v - \sqrt{\frac{2aE}{bm}}$ ±Éì¸¡ð Î¸.

4.3.10.40 ¯Ú¾¦, ¯Ú¾¦Â¦Ä¡ º¡¿¦¨Ä¸ÙìÌ¡¦Â ¸ðÎôÀ¡Î¸¨ÇìÜÈ¦ þÃ ñ Î ¦À¡Õû¸Ç¦ý ¦¾¡Îõ ÀÌ¾¦¸û §¸¡ÇÅÊÅÓ¨¼Â¦¾É¦ý, ´Õ ¿¦¨Ä¦À¡ÕûÁ¦Ð þÕìÌõ Åü¦È¡Õ ¦À¡ÕÇ¦ý ¯Ú¾¦Â¦ø º¡¿¦¨ÄìÌ¡¦Â ¸ðÎôÀ¡Î¸¨Çô ¦ÀÚ¸.

4.3.10.41 r ¬ ¨ÃÔ ¨¼Â ¯ « ¨Ã ì § ¸¡Çò¾¢ ý Á¢Ð « ¨Ã ì § ¸¡Çò¾¢ ý «§¾ Åð¼«Ê Á¢Ð ¬ ¨Ã, h ¯ÂÃÓ ¨¼Â ´Õ Åð¼×Õð ¨¼ì ¦ ¸¡ ñ ¼ ºÃ¡É «¼÷ò¾¢Ô ¨¼Â ¾¢ ñ Áõ ´ ý Ú ¦ ºöÂôÀðÊÕ ì ¸¢ÈÐ. $n = h\sqrt{2}$ ± ý Ú þÕôÀ¢ ý « ¨Ã ì § ¸¡Çò¾¢ ý ÒÈôÀÃôÒ ¸¢ ¨¼òÐ¾Çò ¨¾ò ¦¾¡ð Î ±ó¿¢ ¨ÄÂ¢Öõ ºÁ ¿¢ ¨ÄÂ¢ÄÂ¢Õì Ì ¦Á É ì ¸¡ð Î ¸.

4.3.10.42 ´Õ ¦ º í Ì òÐì § ¸¡ðÊø þøÄ¡¾ þÕÒûÇ¢ ¸ Ù ì ¸¢ ¨¼Â¢ø ÒÅ¢ ®÷ôÀ¡ø ¿¢ð¼ þÂÄ¡¾ ºÃ¡É ¸Â¢Ú ´ ý Ú ¦¾¡ í Ì ¸¢ÈÐ. «Ð ¦ ¸¡û Ù õ Å ¨ÃÅ¢ ý ¸¡÷Ë º¢Â ý ºÁ ýÀ¡ð ¨¼ì ¸ ¡ ñ ¸. ÑÉ¢ ¸ ¨Ç ´ ý Ú§º÷òÐ ¸ð Î ôÀ¡ Î a ¬ ¨ÃÅð¼ ¸õÀ¢Á¢Ð ¸õÀ¢Â¢ ý ã ýÈ¢ø þÕ Å í Ì À¡ ¸ò ¨¾ò¦¾¡ Î ò ÐÀÊ ¦¾¡ í Ì õ º í ¸¢Ä¢ ´ ýÈ¢ ý ¿¦Çõ $a\left[\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}+\frac{4®}{3}\right]$ ±É ì ¸¡ð Î ¸.

4.4. Ð¸û¸Çý ¦¾¡ Ì¾ì Ì¡Â Å¨ ºÂÂø (Kinetics of a system of particles)

4.4.1 Óý Û ¨Ã

þÃ ñ Î «øÄÐ þÃ ñ Êü Ì §ÁüÀð¼ Ð¸û¸û, ´ý ¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡ð Î ì ¦¸¡ ñ ÊÕôÀ¾¡¸ø «ÅüÈý þÂì¸ í¸û ´ýÚì¦¸¡ýÚ º¡÷Ò ûÇ ¨ÅÂ¡ Ì õ. «ùÅ¾ þÂì¸ í¸ ¨Ç «ÈÅ¾ü Ì, ´ù¦Å¡Õ Ð¸ ¨ÇÔõ ¾É ôÀ Î ò¾, «ò¾ ¨ ¸Â Ð¸û¸û ´ù¦Å¡ýÈý þÂì¸ò¾ü Ì ²üÈ¾¡É,

$\underline{F} = m\underline{a}$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ð ¨¼ Å ¨ÃÂÚì¸ §Å ñ ÊÅÕõ.

±ÉÛõ, ¦Åù§ÅÚ Ð¸ûÇý ÓÎ ì¸í¸û ¸½ ì¸ÂÄ¡¸, ´ÕºÄ Å ¨ÃÂüÈ ¸ð Î ôÀ¡ Î ¸Ù ì Ì (definite constraints) þ ½ ì¸ÁÇì¸ ì ÜÊÂ Å ¨¸Âø þÕ ì¸ ì Ü Î õ. ±Î òÐì¸¡ð¼¡¸, ²§¾Ûõ þÕ Ð¸û¸ ¨Ç Î §º÷ì Ì õ ´Õ ¦ÁøÄ þ ¨ÆÂý ¿ÇÕ Á¡È¡ÁÄÖôÀÐ, Ð¸û¸û ´ù¦Å¡ýÈü Ìõ ¯¡Â ºÁýÀ¡ Î ¸ ¨Çò ¦¾¡¼÷ÒÀ Î ò¾, ¾÷× ¸¡ ñ À¾ü Ì þ ½ ì¸Á¡Ô ûÇÐ.

¿¨ÄÂÂÄø ¦À¡Õû¸û «ÅüÈý ¿¨È¸ ¨Çô ¦ÀüÈ Ð¸ûÇ¡¸§Å¡ «øÄÐ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû¸Ç¡¸§Å¡ ¸Õ¾ôÀð¼É. þÂì¸ÅÂÄÖõ «ò¾ ¨ ¸Â ¸ÕòÐ û ÀÂýÀ Î ò¾ôÀ Î õ.

Óó¨¾Â «ò¾Â¡Âí¸Çø, Ð¸û ´ýÈý þÂí Ì õÀ¡ ¨¾ ¦¸¡ Î ì¸ôÀð¼¾¡Ð, «¾ý§Áø ¦ºÂøÀÎõ Å ¨º¸ ¨ÇÀ ÀüÈÂ ÅÅÃí¸û ¦¾¡óÐûÇ§¾¡Ð "Ð¸Çý þÂí Ì Å ¨Ã ¨Âì ¸¡ ñ À¾ÖÕ, ¸ÕòÐû ÅÇì¸ôÀð¼É.

þ í Ì Ð¸û¸Çý ¦¾¡ Ì¾ì Ì¡Â þÂì¸ÅÂø ÅÅ¡ì¸ôÀ Î õ.

4.4.2 Ð¸ð¦¾¡ Ì¾ÂÂý þÂì¸ þÂø ± ñ ½î ºÁýÀ¡ Î û

Ð¸ð¦¾¡ Ì¾ì Ì¡Â ¾½¢× ¨ÁÂò¾ý ÓÎ ì¸ò¨¾ $\underline{R} = \underline{m}a$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î Å ¨ÃÂÚì¸ÈÐ, þîºÁýÀ¡§¼ ¾½¢× ¨ÁÂò¾ý þÂì¸ò¨¾ «ÈÅì¸ ì ÜÊ¾¡¸×õ ¯ûÇÐ. þ¾ý ± ñ ½ô À¸÷×¸ ¨ÇÔõ ÀýÅÕÁ¡Ú ¦ÀÈÄ¡õ.

$$R_x\underline{i} + R_y\underline{j} + R_z\underline{k} = M(a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k})$$

$$= M\left\{\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}\underline{i} + \frac{d^2\overline{y}}{dt^2}\underline{j} + \frac{d^2\overline{z}}{dt^2}\underline{k}\right\}$$

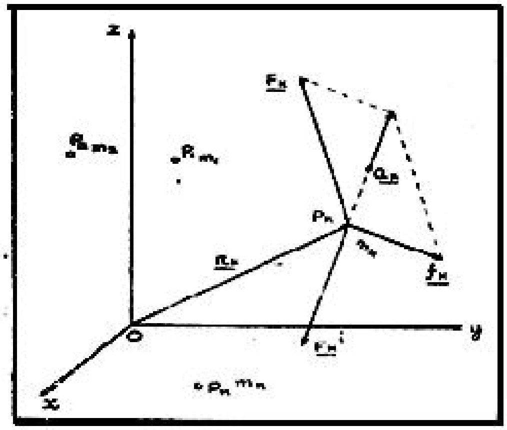
±É ì ¦¸¡ ñ ¼¡ø

$$R_x = M\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}, R_y = M\frac{d^2\overline{y}}{dt^2}, R_z = M\frac{d^2\overline{z}}{dt^2}$$ ¬ Ì õ.

þ ¨Å¸§Ç, Ð¸ð¦¾¡ Ì¾ÂÂý þÂì¸ þÂø ± ñ ½î ºÁýÀ¡ Î¸Ç¡ Ì õ.

4.4.3. Ð¸ð¦¾¡ Ì¾ì¸¡É ¾ÄõÀ¡ðÊý ¾òÐÅõ (D’Alembert’s Principle for a system of particles)

$m_1, m_2, ...m_k.......m_n$ ±ý Ûõ ¿¨È¸ ¨Çô¦ÀüÈ n Ð¸û¸Çý þÂì¸õ À¼õ (4.4.1) - ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú « ¨ÁÂð Î õ



படம் 4-4-1

K-¬ ÅÐ Ð¸Ç¢ý §Áø ¦ºÂüÀ Î õ ÒÈÅ¢¨º¸û, ¯ûÅ¢¨º¸û ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý Å¢¨Ç× Å¢¨º¸¨Ç Ó¨È§Â $\underline{F_k}, \underline{f_k}$ ±É ì¦¸¡û¸. «òÐ¸Ç¢ý Ó Î ì¸õ $\underline{\pm_k}$ -¬ ÉÐ $\underline{F_k}, \underline{f_k} = m_k \underline{\pm_k}$ ±ý Û õ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀ Î õ.

$\underline{F_k} = -m_k \underline{\pm_k}$ ±É ì¦¸¡û¸. «ô§À¡Ð K-¬ ÅÐ Ð¸Ç¢ý þÂì¸ò¾¢ü Ì¡¢Â ºÁýÀ¡ Î $\underline{F_k} + \underline{f_k} + \underline{F_k}' = 0$ ....(1) ¬ Ì õ

þ í Ì $\underline{F_k}' = -m_k \underline{ak}$ ±ýÀÐ K-Ð¸Ç¢ý §Áø ¦ºÂüÀ Î õ º¼òÐÅ Å¢¨ºÂ¡ Ì õ. (Inertia force) (1)-¬ ÅÐ ºÁýÀ¡ðÊý ÅÄôÒÈõ â î º¢ÂÁ¡Å¾¡ø, $\underline{F_k}, \underline{f_k}, \underline{F_k i}$ ±ý Û õ Å¢¨º¸û, «òÐ¸¨Ç þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âü ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨ÅôÀ¾¡¸ì ¸Õ¾ôÀ Î õ.

§ÁÖõ, ±ý Û õ ¦¾¡¼ì¸ôÒûÇ¢ ÀüÈ¢, «ùÅ¢¨º¸Ç¢ý ¾Õôò ¾¢È í ¸¨Çì¸¡ Ï õ §À¡Ð, $\underline{r_k} \wedge \underline{F_k} + \underline{r_k} \wedge \underline{f_k} + \underline{r_k} \wedge \underline{F_k}' = \underline{0}$.....(2) ¬ Ì õ.
§ÁüÜ¡¢Â (1), (2) - ±ý Û õ ºÁýÀ¡ Î ¸û, ¦¾¡ Ì ¾¢ÂÖûÇ ´ù¦Å¡Õ Ð¸Ù ì Ì õ ¦À¡ÕóÐÅ¾¡Å¾¡ø, « î ºÁýÀ¡ Î ¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Âü Üð Î ò ¦¾¡¨¸¸Ù õ â î º¢ÂÁ¡ Ì õ.

«¾¡ÅÐ, $\sum_{k=1}^{n} (\underline{F_k} + \underline{f_k} + \underline{F_k}') = \underline{0}$,

«¾¡ÅÐ, $\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{f_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{F_k i} = \underline{0}$.....(3)

$\sum_{k=1}^{n} \underline{f_k}$ ±ýÀÐ ¯ûÅ¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ ÌÀÂ¨É ì ÌÈ¢ôÀ¾¡ø, «¾ý Á¾¢ôÒ â î º¢ÂÁ¡ Ì õ, §ÁÖõ $\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} = R$ ±ýÀ¼¡ø, (3)-ÅÐ ºÁýÀ¡ Î ,

$$\underline{R} + \sum_{k=1}^{n} \underline{F_k}^{i} = \underline{0}$$

« ¾¡ÅÐ, $\underline{R} - \sum_{k=1}^{n} m_{\underline{k}} a_{\underline{k}} = 0$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ $\sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge (\underline{F_k} + \underline{f_k} + \underline{F_k}') = \underline{0}$ ¬ Ì õ.

« ¾¡ÅÐ $\sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{f_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k}' = 0$

« ¾¡ÅÐ $\sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k}' = 0$

« ¾¡ÅÐ $\underline{M_o} - \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge m_{\underline{k}} a_{\underline{k}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$ ¬ Ì õ.

(4) ÅÐ ºÁýÀ¡ðÊø, $-\sum_{k=1}^{n} m_{\underline{k}} a_{\underline{k}}$ ±ýÀÐ,

º¼òÐÅ Å¢¨º¸Ç¢ý Å¢¨ÇÅ¡ Ì õ. ¬¸§Å, Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢Â¢ø ¦ºÂüÀÎ õ ÒÈ Å¢¨º¸Ç¢ý Å¢¨Ç× Å¢¨ºÔõ, «ò¦¾¡Ì¾¢ì Ì¡¢Â º¼òÐÅ Å¢¨º¸Ç¢ý Å¢¨Ç×õ §º÷óÐ, Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢¨Â þÂì¸ þÂø ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åò¾¢Õì Ì õ ±ýÀÐ ¦ÀÈôÀÎ õ. þÐ§Å, Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢Ì¸¡É ¾ÄõÀ¡ðÊý ¾òÐÅÁ¡ Ì õ

(4), (5) ¬ÅÐ ºÁýÀ¡ Î¸û, ÒÈÅ¢¨º¸û, º¼òÐÅ Å¢¨º¸û ¬¸¢Â¨Å Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢Â¢ø ¦ºÂüÀðÎ «ò¦¾¡Ì¾¢¨Â þÂì¸ þÂø ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åò¾¢Õì Ì õ ±ýÀ¨¾ ¦ÅÇ¢ôÀÎòÐ¸¢ýÈÉ. «ÅüÈ¢ý ±ñ ½¢ôÀ¸¢÷×¸¨ÇÔõ, À¢ýÅÕÁ¡Ú ¦ÀÈÄ¡õ.

$\underline{R_k} - \sum m_{\underline{k}} a_{\underline{k}} = 0$ ±ýÀÐ,

$$R_x - \sum_{k=1}^{n} m k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = 0; R_y - \sum_{k=1}^{n} m k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = 0; R_z - \sum_{k=1}^{n} m k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = 0$$

±ýÛõ ãýÚ ±ñ ½¢î ºÁýÀ¡ Î¸¨Ç Å¨ÃÂÚì¸¢ýÈÉ.

« ùÅ¡§È $\underline{M_\circ} - \sum mk\,\underline{rk} \wedge \underline{ak} = \underline{0}$ ±ýÀÐ $M_{\circ x}\,\underline{i} + M_{\circ y}\,\underline{j} + M_{\circ z}\,\underline{k} - \sum mk$

$$\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ xk & yk & zk \\ \frac{d^2 x_k}{dt^2} & \frac{d^2 y_k}{dt^2} & \frac{d^2 z_k}{dt^2} \end{pmatrix} = 0,$$

$$M_{\circ x} - \sum mk\{yk \frac{d^2 z_k}{dt^2} - zk \frac{d^2 y_k}{dt^2}\} = 0$$

$$M_{\circ y} - \sum mk\{zk \frac{d^2 x_k}{dt^2} - xk \frac{d^2 z_k}{dt^2}\} = 0$$

$$M_{\circ z} - \sum mk\{xk \frac{d^2 z_k}{dt^2} - yk \frac{d^2 x_k}{dt^2}\} = 0$$

±ý Ûõ ã ýÚ ± ñ ½¢î ºÁýÀ¡¼¸ ¨ÇÔõ Å¨ÃÂÚì¸¢ýÈÉ.

§ÁÖõ $\underline{R} - \sum mk\underline{ak} = \underline{0}$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î, $\underline{R} - M\underline{a_c} = \underline{0}$........(6) ¬ Ì õ.

þÐ§Å Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢Â¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý þÂì¸ò¨¾ Å¨ÃÂÚì Ì õ ºÁýÀ¡¼¡ Ì õ.

4.4.4 Á¡¾¢¡¢ì¸½ì Ì ¸û
4.4.4.1 À¼õ (4.4.2)ø ¸¡ðÊÔûÇ «¨Áô¨Àô¦ÀüÈ ¦À¡Õð¦¼¡ Ì ¾¢ µö× ¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ Å¢Î Å¢ì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. A ±ý Ûõ ¦À¡Õû 2 Á£ð¼÷ þÂí¸¢ÂÀ¢ý «¾ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸,

$N = 50; \overline{F} = «N = 0.2 \times 50 = 10$

A ±ý Ûõ ¦À¡Õû 2 Á£ð¼÷ ¸¢¨¼Â¡¸ þÂí Ì õ§À¡Ð B ±ý Ûõ ¦À¡Õû 1.0 Á£ð¼÷ ¦¾¡¨Ä× ¸£ú§¿¡ì¸¢ þÂí Ì ¸¢ÈÐ, ±É§Å Bý ¾¢¨º§Å¸õ

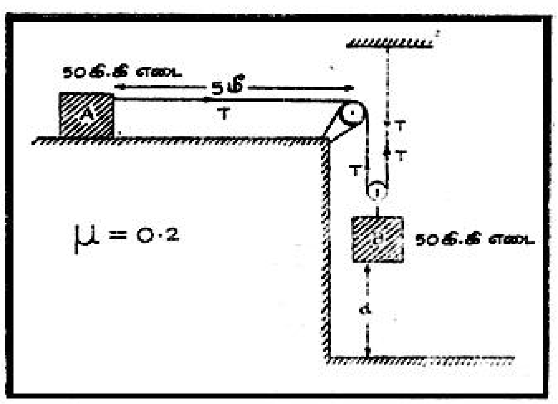
±É§Å = $= \frac{1}{2} \times A$; ý ¾¢¨º§Å¸õ $\therefore v_B + \frac{1}{2} v_A$

v_{1-2} = ¦À¡Õð¦¼¡ Ì ¾¢ ¦ºö¾§Å¨Ä $50 \times 1.0 - 10 \times 2 = 30$ Á£. ¸¢.¸¢. Å¢¨º ¦À¡Õð¦¼¡ Ì ¾¢Â¢ø ²üÀð¼ þÂì¸ ¬üÈø Á¡üÈõ

$$= \frac{1}{2}\frac{50}{g} v_A^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{50}{g} v_B^{\,2} = \frac{25}{g}(v_A^{\,2} + v_B^{\,2})$$

$$= \frac{25}{g} . \frac{5}{4} v_A^{\,2}$$

$$= \frac{125}{9.8 \times 4} v_A^{\,2}$$



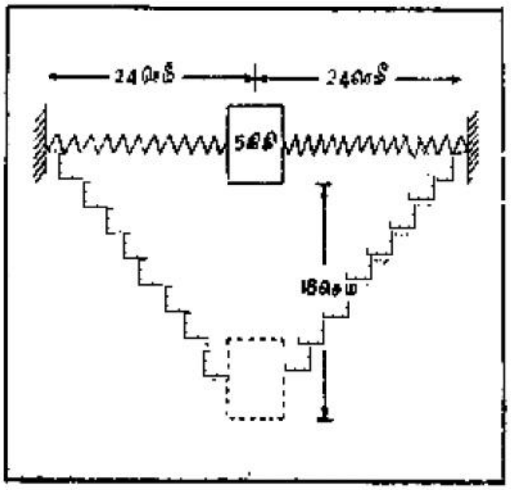
À¼õ 4-4-2

"§Å ¨ Ä-¬ üÈø" §¸¡ðÀ¡ðÊ ýÀÊ,

$$\frac{1.25{v_A}^2}{9.8\times 4} = 30$$

$$\therefore v_A = 3.068$$ Á/Å¢É¡Ê

4.4.4.2 5 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ ¦À¡Õ¦ÇýÚ þÕ ¾¢Õ Ì î Í ÕûÅ¢ø¸û À¢¨½ì¸ôÀð Î ûÇÉ. À¼õ 4.4.3ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, ÍÕûÅ¢ø¸û ¸¢¨¼Â¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð «ô¦À¡Õû µö×¿¢¨ÄÂ¢ÄÕóÐ Å¢Î Å¢ì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø ´ù¦Å¡ýÚõ 2¸¢¸¢ þØÅ¢¨º¨Âô ¦ÀüÚûÇÐ, «ô¦À¡ÕÇ¡ÉÐ 18 $\{[10^{-2}]மீ\}$ ¦¾¡¨Ä× ¸£ú§¿¡ì¸¢ þÂí Ìõ§À¡Ð, «¾ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸. ÍÕûÅ¢ø ´ù¦Å¡ýÚõ $k=0.5$¸¢¸¢ / $\{[10^{-2}]மீ\}$ ±ýÛõ Å¢øÁ¡È¢Ä¢¨Âô ¦ÀüÚûÇÐ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.



À¼õ 4-4-3

¿¢¨ÄÂ¢ø ¾¢Õ Ì î ÍÕûÅ¢ø ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ x_1 ¦º.Á «Ç× ¿£ðº¢ ²üÀÎ¸¢È¦¾É¢ø $T = kx_1; 2 = 0.5x_1; x_1 = 4$ $\{[10^{-2}]மீ\}$ ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ 18¦º.Á $\{[10^{-2}]மீ\}$ ¸£ú§¿¡ì¸¢ இÂí கிய§À¡Ð, ¾¢Õ Ì î ÍÕû ´ù¦Å¡ýÈ¢Öõ ²üÀð¼ ¿£ðº¢¨Â x_3 ெº.Á ±É×õ $x_2 = \sqrt{24^2 + 18^2 - 20 = 10}$ $\{[10^{-2}]மீ\}$ ±É×õ ¦À¡ÕÇ¢ý ¾¢¨º§வகத¨¾ v ¦º.Á/Å¢É¡Ê ±É×õ ¦¸¡û¸. ±É§Å ¾¢Õ Ì î ÍÕû ´ù¦Å¡ýÚõ ¦ºö¾§Å¨Ä

$$= \frac{1}{2}k({x_1}^2 - {x_3}^2) = -21$$ ¸¢¸¢ $\{[10^{-2}]மீ\}$.

5¸¢¸¢ ±¨¼ÔûÇ ¦À¡Õû ¦ºö¾ §Å¨Ä= $5\times 18 = 90$ ¸¢¸¢ ¦º.Á $\{[10^{-2}]மீ\}$

$\therefore V_{1-2}$ Å¢¨º¸Ç¨ ÉòÐõ ¦ºö¾ §Å¨Ä $= 2\times(-21+90 = 48$ ¸¢¸¢ $\{[10^{-2}]மீ\}$

þÂì¸ ¬üÈø Á¡üÈõ$= \frac{1}{2}\times\frac{5}{981}\times v^2 - 0 = \frac{5}{1962}v^2$

±É§Å §Å¨Ä¬üÈø ºÁýÀ¡ðÊýÀÊ,

- $\frac{5}{1962}v^2 = 48$ $\therefore v = 1.373$ Á£/Å¢É¡Ê

4.4.4.3 $W_1 = 54$ ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ ´Õ ÁÉ¢¾ý, $W_2 = 90$ ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ À¼Ì µýÈ¢ø, ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ þ¼òò¾¢Ä¢ÕóÐ À¼¸¢ø ¸¨Ã¨Â §¿¡ì¸¢ a=1.8 Á£ð¼÷ ¿¼óÐ ¦ºø¸¢È¡ý, «ô§À¡Ð «Åý ¸¨Ãì¸ «ôÀ¡ø ±ùÅÇ× ¦¾¡¨ÄÅ¢ø þÕôÀ¡ý ±Éì ¸¡ñ¸.

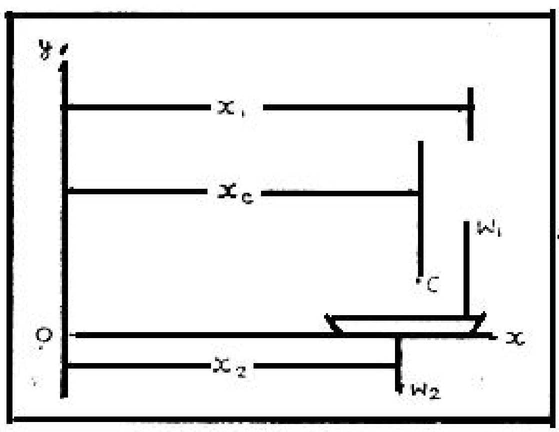
¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø ±É¢¾Ûõ, À¼Ìõ, ¸¨ÃÂ¢Ä¢ÕóÐ Ó¨È§Â, x_1, x_2 Á£ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø, À¡õ (4.4.10) - ø ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

C ±ýÛõ ÒûÇ¢ ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý ¦¾¡¼ì¸ò ¾¢½¢× ¨ÁÂò¨¾ì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. O - Å¢Ä¢ÕóÐ «¾ý ¦¾¡¨Ä¨Å x_c ±Éì¦¸¡û¸.

±É§Å $(m_1+m_2)x_c = m_1x_1 + m_2x_2$ ±ýÛõ ºÁýÀ¡Î,

$$\frac{1}{g}(W_1+W_2)x_c = \frac{1}{g}(W_1x_1+W_2x_2)......(1)$$

±ýÈ¡Ìõ.



À¼õ 4-4-10

¯ÁÉ¢¾ý À¼¸¢ø ¿¼óÐ ¦ºøÖõ§À¡Ð, «ÅÛìÌõ À¼ÌìÌõ þ¨¼§Â ¯ûÇ Å¢¨º¸û ¦ºÂÄÀðÎ, «Å¨ÉÔõ À¼¨¸Ôõ þÂí¸ Š ¦ºöÔõ. À¼ÌìÌõ ¾ñ½£ÕìÌõ þ¨¼§ÂÔûÇ ¯Ã¡ö×ò ¾¨... ÒÈì¸½¢ì¸ôÀ¼ÎÅ¾¡¸¢ø, ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý §Áø ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸Ç¢ý ÒÐõ ¿¢¨ÄÌÐ ¾¢¨ºÂ¢Ä ¨ÁÔõ.

$R_x = \frac{1}{g}(W_1+W_2)\frac{d^2x_c}{dt^2}$ ±ýÛõ ºÁýÀ¡ðÊø, $R_x = 0$ ±ýÈ¡Å¾¡ø $\frac{d^2x_c}{dt^2} = 0;$

$\frac{dx_c}{dt} = c_1$ ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡Ìõ.

¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø $\frac{dx_c}{dt^2} = 0$ என்பதால் $c_1 = 0$ ¬Ìõ.

$\therefore x_c = c_3$ ±ýÀÐ ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡Ìõ.

ÁÉ¢¾ý a ஐ Á¡ð¼÷ ¦¾¡¨Ä× ¸¨Ã¨Â §¿¡ì¸¢î ¦ºýÈ À¢ýÒ «ÅÛõ, À¼Ìõ ¸¨ÃÂ¢Ä¢ÕóÐ $x_1'x_2'$ Á¡ð¼÷ ¦¾¡¨Ä×¸Ç¢ø þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸,

x_c ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡Å¾¡ø, $\frac{1}{g}(W_1+W_2)x_c = \frac{1}{g}(W_1x_1'+W_2x_2').....(2)$

(1), (2) ±ýÛõ ºÁýÀ¡Î¸Ç¢Ä¢ÕóÐ $W_1x_1'+W_2x_2' = W_1x_1+W_2x_2.......(3)$ ¬Ìõ

ÁÉ¢¾Ûõ, À¼Ìõ ¦ÀüÈ º¡÷À¢Ä¡ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢¸û (absolute displacements) Ó¨È§Â $(x_1'-x_1),(x_2'-x_2)_2$ ¬Ìõ. ±É§Å,

$(x_1'-x_1),(x_2'-x_2) = -a.......(4)$ ¬Ìõ

(3), (4) ±ýÛõ ºÁýÀ¡Î¸Ç¢Ä¢ÕóÐ $(x_2'-x_2)$ ¨Å ¿¦ì¸,

$$W_1(x_1'-x_1)+W_2(x_1'-x_1+a)=0.......(5)$$

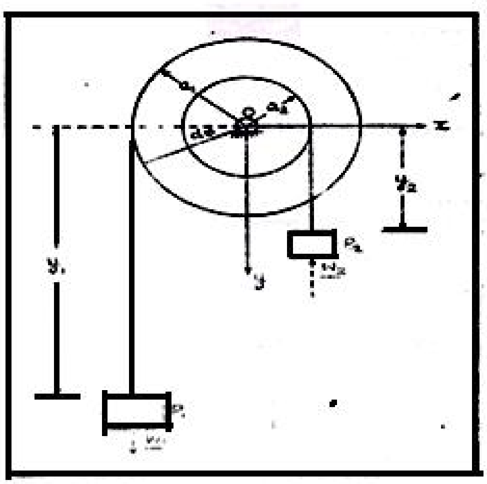
±ýÈ¡Ìõ

$$\therefore x_1'-x_1 = -\frac{aW_2}{W_1+W_2}............(6)$$ ¬Ìõ

þí Ì $x_1'-x_1-\frac{1.8\times 90}{54+90} = -1.25......(7)$ Á¡...........(7)

«¾¡ÅÐ ÁÉ¢¾ý 1.25 Á¡ð¼÷ ¦¾¡¨Ä× ¸¨Ã¨Â §¿¡ì¸¢ þÂí¸¢Â¢ÕôÀ¡ý.

4.4.4.4 $W_1,W_2(W_1>W_2)$ ±ýÛõ ±¨¼¸¨Çô¦ÀüÈ, p_1,p_2 ±ýÚ Ì È¢ì¸ôÀð¼ ¸ð¨¼¸û, þ§Äº¡ÉÐõ, ÁÆÁÆôÀ¡ÉÐõ, ¦À¡Ð ¨ÁÂò¾¢ø À¢¨½ì¸ô Àð¼Ð Á¡É, a_1,a_2 ±ýÛõ ¬¨Ã¸¨Çô ¦ÀüÈ þÕ ¿¢¨ÄÂ¡É ¸ôÀ¢¸Ç¢ø ÍüÈôÀð¼ ÁÇ ÅøÄ¢¾ ¸Â¢Ú¸Ç¢ÕóÐ À¼õ (4.4.11) ø ¸¡ð¼ÊÂÅ¡Ú, ¦¾¡í Ì¸¢ýÈÉ. þÂí Ìõ§À¡Ð ¸ð¼¨ ¸¸Ç¢ý ÓÎ ì¸ò¨¾ì ¸¡ñ ¸.



À¼õ 4-4-11

¸ôÀ¢¸Ç¢ý ¦À¡Ð ¨ÁÂò¾¢ý ÅÆ¢§Â Å¨ÃÂôõ ¸¢¨¼Ì§¸¡ð¨¼ x «îº¡¸×õ ¸¡ú§¿¡ì¸¢ Å¨ÃÂôõ §¸¡ð¨¼ y «îº¡¸×õ ¦¸¡û¸.

±ý Ûõ §¿ÃÒò¾¢ø p_1, p_2 ±ý Ûõ ¸ð¨¼¸û $(a_1, y_1)(a_2, y_2)$ ±ý ÛÁ¢¼í¸Ç¢ Ä¨ ÁÅ¾¡¸ Ì ¦¸¡û¸.

dt ±ý Ûõ Á¢¸ îº¢È¢Â §¿ÃÒò¾¢ø $d¤$ ±ý Ûõ ´Õ º¢È¢Â §¸¡½ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ ²üÀ Î õ §À¡Ð,

$dy_1 = a, d¤, dy_2 = -a_2 d¤$ ±ý Ûõ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢¸ ¨Ç ¸ð¨¼¸û Ó ¨È§Â ¸¢ú§¿¡ì ¸¢Ôõ, §Áø§¿¡ì ¸¢Ôõ ¦ÀÚ¸¢ýÈÉ.

$$\therefore \frac{dy_1}{dt} = a_1 \frac{d¤}{dt}, \frac{dy_2}{dt} = -a_2 \frac{d¤}{dt}$$ ¬ Ì õ.

§ÁÖõ $$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = a_1 \frac{d^2¤}{dt^2}, \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -a_2 \frac{d^2¤}{dt^2}$$ ¬ Ì õ.

$$\therefore \frac{d^2 y_1}{dt^2} / \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{a_1}{a_2}$$

«øÄÐ $$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{a_1}{a_2};$$

«øÄÐ $f_2 = -\frac{a_1}{a_2} f_1;$ ±ýÈ¡ Ì õ.

f_1 ±ý Ûõ Ó Î ì ¸õ ¸¢ú§¿¡ì ¸¢ÔûÇ¾¡ø, ¸ð¨¼¸Ç¢ý §Áø ¦ºÂüÀ Î õ º¼òÐÅÄ¢ ¨º¸û (inertia forces) Ó ¨È§Â

$$F_1' = \frac{1}{g} w_1 f_2;$$

$$F_2' = \frac{1}{g} w_2 f_2 = -\frac{a_2}{a_1} \frac{w_2}{g} f_1 ....(1)$$

$$= -a_2 \frac{w_2}{g}$$ ¬ Ì õ.

«ò¾¨ ¸Â º¼òÐÅ Å¢¨ º¸û ¦ºÂüÀ Î õ ¾¢¨ º¸û À¼õ (4.4.12) -ø ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú ¯ ûÇÉ. «Åü¨ÈÔõ ÒÈÅ¢¨ º¸§Ç¡ Î §º÷ì Ì õ§À¡Ð, §À¡Ðð¦¼¡ Ì ¾¢ þÂì ¸ þÂø « ¨Á¾¢ ¿¢ ¨ ÄÂ¢Ä¢Õì Ì õ.

O-ÅüÈ¢ «ùÅ¢ ¨º¸Ç¢ý ¾¢ÕôÒò¾¢Èí¸ ¨ Çì ¸ ½ì ¸¢¼,

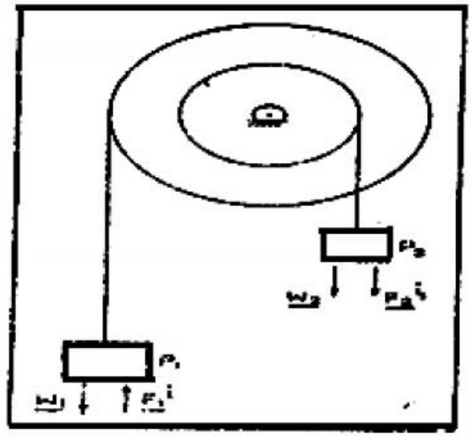
$(w_1 - F_1')a_1 = (w_2 - F_2')a_2 ....(2)$ ±ýÀÐ ¸¢ ¨¼ì Ì õ

(1),(2) ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î ¸ Ù ì Ì ò ¾£÷× ¸¡ Ï õ §À¡Ð,

$$f_1 = \left\{ \frac{w_1 a_1 - w_2 a_2}{w_1 a_1^2 + w_2 a_2^2} \right\} a_{1,g}$$

$$f_2 = -\left\{ \frac{w_1 a_1 - w_2 a_2}{w_1 a_1^2 - w_2 a_2^2} \right\} a_2, g ....(3)$$

¬ Ì õ.

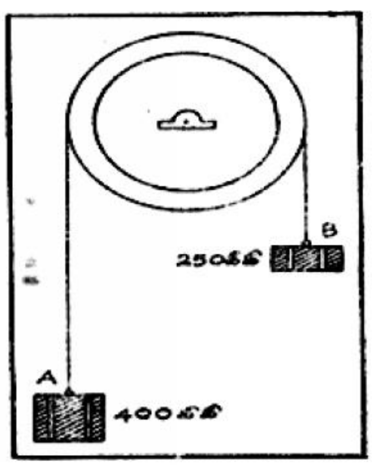


À¼õ 4-4-12

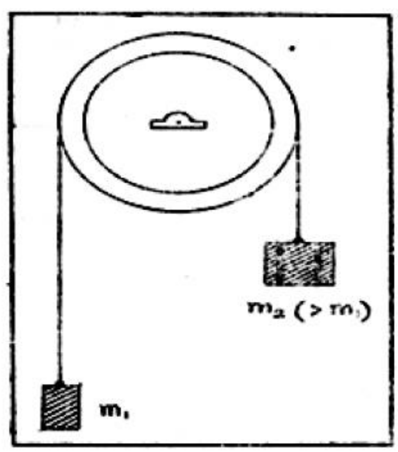
4.4.5 ÀÂ¢üº¢

4.4.5.1 400, 250¸¢¸¢ ±¨¼¸ Ù ¨¼Â A,B ±ý Ûõ þÕ ¸ð¨¼¸û ´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É ÅÆÅÆôÀ¡É, þ§Äº¡É ¸ôÀ¢Â¢ý Á¢Ð ¦ºøÖõ Á¢ûº¢ì¾¢ÂüÈ (inextensible) µ¡¢¨ÆÂ¢É¡ø þ¨½ì¸ôÀð Î, À¼õ (4.4.4)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, µö×¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ Å¢Î Å¢¸¸ôÀÎ ¸¢ýÈÉ, A ±ý Ûõ ¸ð¨¼ 10Á¢ ¦¾¡¨Ä¨Åì ¸¼ì Ì õ§À¡Ð «Ð ¦ÀÚõ ¾¢¨º§Å¸ í ¸¡ ñ ¸.

(Å¢¨¼: 7.314 Á¢ / Å¢É¡Ê)



À¼õ 4-4-4



À¼õ 4-4-5

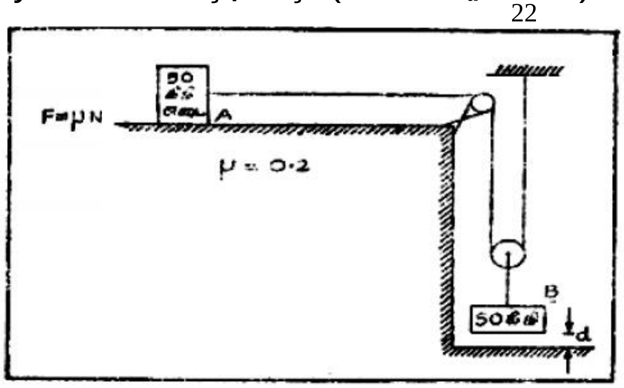
4.4.5.2 «ð×ð ±ó¾¢Ãõ (Atwood's Machine) ±ý Ûõ ¦À¡¡¢Â¡ÉÐ g-Â¢ý Á¾¢ô¨Àô ¦ÀÈô ÀÂýÀÎò¾ôÀÎ õ, «¾ý ±Ç¢Â ÅÊÅ «¨Áôò, À¼õ 4.4.5 -ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÐ. ¸ð¨¼¸Ç¢ý ¿¢¨È¸¨Ç $m_1, m_2 (m_2 > m_1)$ ±É×õ ¸ôÀ¢Â¡ÉÐ þ§Äº¡¸×õ, ÅÆÅÆôÀ¡¸×õ ¯ûÇÐ ±É×õ ¦¸¡ ñ Î, ´ö×¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ h Á¢ ¦¾¡¨Ä×, m_2 ±ý Ûõ ¿¢¨È ¸¢ú§¿¡ì¸¢ þÂì¸¢, v Á¢/Å¢É¡Ê ±ý Ûõ

¾¢¨º§Å¸ò¨¾ô ¦ÀÚÅ¾¡¸¢ø, g-Â¢ý Á¾¢ô¨À (m_1, m_2, v, h) ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ ì ¸¡ ñ ¸.

[Ì È¢ôÒ $(m_1 - m_2)h = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$]

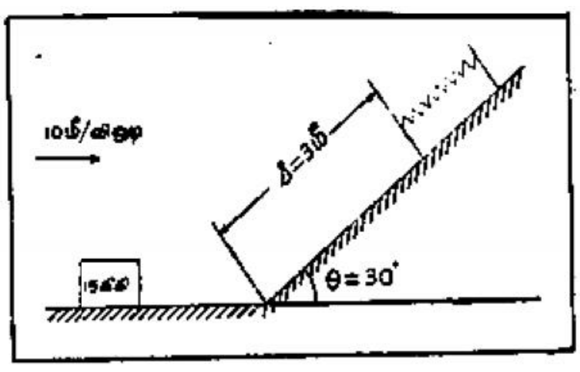
Å¢¨¼: $g = (\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1})\frac{v^2}{2h}$ Á/Å¢É¡Ê^2

4.4.5.3 À¼õ 4.4.6 ø ¸¡ðÊÔûÇ « ¨Áô¨Àô ¦ÀüÈ ¦À¡Õð¦¼¡ Ì ¾¢ ´ ýÚ µö× ¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ Å¢ Î Å¢ì ¸ôÀ Î ¸¢ÈÐ, B ±ý Ûõ ¦À¡Õû d Á£. ¦¾¡¨Ä× ¸£ú§¿¡ì ¸¢ þÂ í ¸¢Â×¼ý ¾ ¨Ã ¨Â þÊòÐ, ¸Â¢üÚô À Ì ¾¢ ¨Âò ¦¾¡öÅ¡ì Ì ¸¢ÈÐ (slack). A ±ý Ûõ ¦À¡Õû ¦Á¡ò¾Á¡¸ 5Á£. ¦¾¡¨Ä× þÂ í ¸¢, ´ö× ¿¢¨Ä¨Â « ¨¼¸¢È¦¾¡É¢ø, d-ý Á¾¢ô¨À ì ¸¡ ñ ¸. (Å¢¨¼: $d = \frac{25}{22}$ Á£)



À¼õ 4-4-6

4.4.5.4 W=15 ±¨¼ÔûÇ ¦À¡Õ¦Ç¡ýÚ, ÁÆÁÆôÀ¡É ¸¢¨¼òÇò¾¢ø, Å¢É¡Êì Ì 10Á£. §Å¸ò¾¢ø À¼õ 4.4.7-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÂ í Ì õ§À¡Ð, ¸¢¨¼òÇò¾¢ü Ì



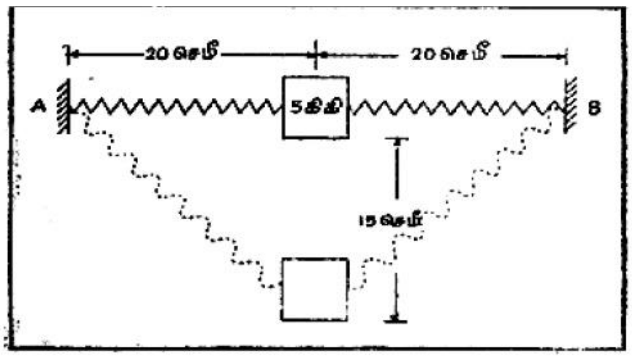
À¼õ 4-4-7

²üÈì§¸¡½ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇ ÁÆÁÆôÀ¡É º¡ö¾Çò¾¢ø, §Áø§¿¡ì ¸¢ÂÅ¡§È Å¢øÁ¡È¢Ä¢ k=2¸¢¸¢/¦º.Á£ ¯ûÇ ¾¢Õ Ì î ÍÕûÅ¢ø ´ ý ¨È §Á¡Ð¸¢ÈÐ. s=3 Á£. ±É¢ø «ô¦À¡Õû º¡ö¾Çò¾¢ø ¦ºýÈ¿¢¨Äì Ì òÐÂÃ Â¡Ð ±É ì ¸¡ ñ ¸.

(Å¢¨¼: 1.365 Á/Å¢É¡Ê)

4.4.5.5 þÕ ¾¢Õ Ì î ÍÕûÅ¢ø¸Ç¢ø À¢¨½ì¸ôÀð¼ 5 ¸¢.¸¢. ±¨¼ÔûÇ ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ, þÕ ¾¢Õ Ì Š ÍÕû Å¢ø¸ Ù¼ý À¢¨½ì¸ôÀð Î ûÇÐ. «î ÍÕû Å¢ø¸û À¼ý 4.4.8 -ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¸¢¨¼Â¡¸×ûÇ§À¡Ð, ¦À¡Õû µö× ¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ Å¢¼ôÀÎ¸¢ÈÐ, ÍÕûÅ¢ø Á¡È¢Ä¢ k=0.5¸¢¸¢/¦º.Á¢ ¬Ì õ. ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø ÍÕûÅ¢ø µù¦Å¡ýÈ¢Öõ, 1.5¸¢.¸¢ «Ç×ûÇ þØÅ¢¨º ²üÀÎ¸¢È¦¾É¢ø, «ô¦À¡Õû 8 $\left\{\left[10^{-2}\right]மீ\right\}$ ¸¢ú§¿¡ì¸¢ þÈí¸¢ÂÀ¢ý, «¾ý ¾¢¨º§Å¸õ ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ : 0.921Á¢/Å¢É¡Ê)



À¼õ 4-4-8

4.4.5.6 4.4.9 - ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ÀÉ¢ì¸ðÊÂ¢ý Á¢Ð ¦ºøÄ, ¯¾×õ ¿¢ñ¼ ÁÃîºÚì Ì ì ¸ð¨¼Â¢ý§Áø ¯ûÇ ´Õ ÁÉ¢¾ý, ºÚì Ä¢ø (ramp) ÒÅ¢Â¢÷ôÀ¡ø ²üÀ¼ìÜÊÂ Å¢¨º ´ýÈ¡§Ä§Â ¸¢ú§¿¡ì¸¢ þÂí Ì ¸¢È¡ý. «õÁÉ¢¾ý B-Â¢Ä¢ÕóÐ C-ì Ì þÂí Ìõ§À¡Ð, ¸¢¨¼Â¡¸ 30 Á¢ð¼÷ ¦¾¡¨Ä×¸¼óÐ, C-ø «¨Áì¸ôÀð Î ûÇ ÁÆÁÆôÀ¡É º¡ö¾Çò¾¢ø Á¢¸×õ ¦Áý¨ÁÂ¡¸ (very smoothly) þÈí¸ì Ü Î ¦ÁÉ¢ø ¯ ±ý Ûõ º¡ö¾Çò¾¢ý ²üÈì §¸¡½ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

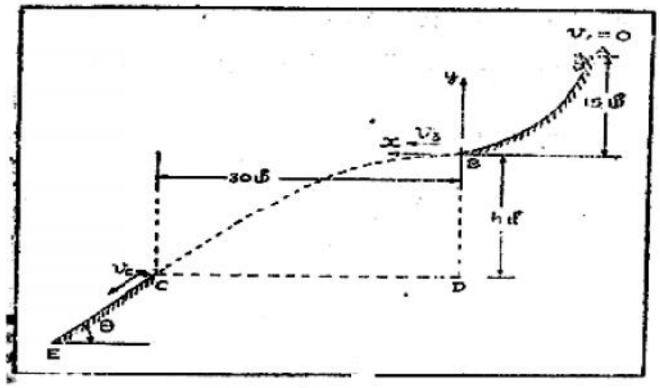
(Ì È¢ôÒ: $v_B = \sqrt{30g};BC$ ±ý ÀÐ ÀÃÅ¨Ç×ô À¡¨¾Â¡ Ì õ.

$$-h = -\frac{g(30)^2}{2{v_B}^2};h=15$$

$${v_c}^2 = {v_B}^2 + 30g = 60g$$

$$v_c \sin^{-} = \sqrt{2g \times 15}$$

(Å¢¨¼: $^{-} = 45^{\circ}$)

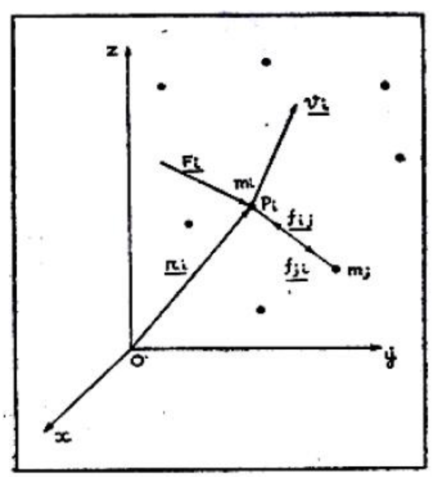


À¼õ 4-4-9

4.4.6 Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢ì Ì ¯¡¢Â §Å¨Ä-¬üÈø ºÁýÀ¡Î (Work-Energy Equation for a system of particles)

n Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡Ì¾¢Â¡ÉÐ À¼õ (4.4.13) - ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÕì¸ð Î õ mi, i=1,2,3,.....n ±ýÀÐ i--¬ ÅÐ Ð¸Ç¢ý ¿¢¨ÈÂ¡ Ìõ. «Ð $\underline{ri}$ ±ý Ûõ ¿¢¨Äò¾¢¨ ºÂ¢¨ Âô¦ÀüÈ $\underline{pi}$ ±ý Ûõ ÒûÇ¢Â¢ø t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

$\underline{Fi}$ ±ýÀÐ mi-±ý Ûõ Ð¸Ç¢ø ¦ºÂüÀÎõ ÒÈÅ¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¢¨º¨Âì Ì È¢ì¸ðÎõ. $\underline{f_{ij}}, (j=1,2,....n, j \neq i)$ ±ýÀÐ i-¬ ÅÐ Ð¸û j-¬ ÅÐ Ð¸Ç¢Ä¢ÕóÐ ¦ÀÚõ ¯ûÅ¢¨º¨Âì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. þò¾¨¸Â Å¢¨º¸Ç¡ø mi ±ý Ûõ Ð¸û ¾¡ì¸ôÀðÎ, «Ð $\underline{v_i}$ ±ý Ûõ ¾¢¨º §Å¸ò¾¢ø þÂí Ì¸¢È¾¡¸ì ¦¸¡û¸.



À¼õ 4-4-13

mi ±ý Ûõ Ð¸û ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¯ÕÅ «¨ÁôÀ¢Ä¢ÕóÐ (from one configuration) Áü¦È¡Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¯ÕÅ «¨ÁôÒì Ì Ì (to another configuration) ²§¾Û¦Á¡Õ À¡¨¾Â¢ø ¦ºøÅ¾¡¸¢ø, «òÐ¸ Ù ì Ì ¡¢Â "§Å¨Ä-¬üÈø" ºÁýÀ¡Î,

$$\int_1^2 \underline{F_i}.d\underline{ri} + \int_1^2 \left(n \sum_{j-1} \underline{F_{ij}}.d\underline{ri} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} mi\underline{vi}.\underline{vi} \right)_2 - \left(\frac{1}{2} mi\underline{vi}.\underline{vi} \right)_2$$

¬ Ì õ. þ í Ì ±ýÀ¨Å, Ó¨È§Â 1-ÅÐ, 2-ÅÐ ¯ÕÅ «¨ÁôÒ¸Ç¢ø i-ÅÐ Ð¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸í¸¨ÇÌ ÌÈ¢ì¸¢ýÈÉ.

þò¾¨¸Â ºÁýÀ¡ð¨¼ ´ù¦Å¡ÕÐ¸Ùì Ìõ Å¨ÃÂÚòÐ, «ÅüÈ¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Üð¼Î ò¦¾¡¨¸¨Âì ¸½ì¸¢¼Ä¡õ. «ô§À¡Ð,

$$= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} (m\, i\underline{v\,i}.\underline{v\,i})_2 - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} m\, i\underline{v\,i}.\underline{v\,i})_1$$

«¾¡ÅÐ, $U_{1-2} = T_2 - T_1$ ¬ Ì õ.

þ í Ì ±ýÀÐ ÒÈÅ¢¨º, ¯ûÅ¢¨º¸¨Ç¨ÉòÐõ Ó¾ø ¯ÕÅ «¨ÁôÀ¢Ä¢ÕóÐ, þÃñ¼¡ÅÐ ¯ÕÅ «¨ÁôÒìÌ Ð¸û þÂí ÌõÀ§À¡Ð ¦ºö¾§Å¨Ä¨ÂÌ ÌÈ¢ì¸¢ÈÐ. $T_2 - T_1$ ±ýÀÐ Ð¸û¸Ù ¨¼Â þÂì¸ ¬üÈø¸Ç¢ý §ÅÚÀ¡ð¨¼ì ÌÈ¢ì¸¢ÈÐ. §ÁÖõ Ð¸û¸Ùì Ì þ¨¼§Â º¡¡¢¼ô¦ÀÂ÷Î º¢ (relative displacement) ²üÀ¼ì ÜÊÂ¾¡ø, ¯ûÅ¢¨º¸¨ÇòÐõ ¦ºöÔõ §Å¨Ä¨Â Å¨ÃÂÚì Ìõ

$$\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 (\sum_{n=1}^{n} f\, \underline{ij} \cdot d\, \underline{r\,i})$$

±ýÛõ þÂü¸½¢¾ì§¸¡¨ÅÂ¢ý Á¾¢ôÒ âîº¢ÂÁ¡¸¡Ð.

º¢üº¢Ä §Å¨Ç¸Ç¢ø ÒÈÅ¢¨º, ¯ûÅ¢¨º¸Ç¢ø ±¨Å ¸¡ôÒ Å¢¨º¸û (Consevative forces) ±É ¯Ú¾¢Â¡¸ì ÜÈÓÊÔõ. «ùÅ¡¾¡ì¸¡ôÒÅ¢¨º¸Ùì Ì ²üÈ¾¡É ¿¢¨Ä ¬üÈø¸¨Çô ÀÂýÀÎòÐõ§À¡Ð, §ÁüÜÈ¢Â "§Å¨Ä-¬üÈø" ºÁýÀ¡Î,

$\Delta(T+V) = U_N$ ±ýÈ¡Ìõ.

þ í Ì V ±ýÀÐ ¸¡ôÒÅ¢¨ºì¦ÇÉì ¸Õ¾ôÀÎõ ÒÈ, ¯û Å¢¨º¸Ç¢ý ¦Á¡ò¾ ¿¢¨Ä ¬üÈ¨ÄÔõ V_N ±ýÀÐ ¸¡ôÒÅ¢¨º¸ÇÄ¡¾ ÒÈ, ¯û Å¢¨º¸û ¦ºö¾ ¿¢¸Ã§Å¨Ä¨ÂÔõ ÌÈ¢ì¸¢ýÈÉ.

4.4.7 ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý «ÊôÀ¨¼Â¢ø þÂì¸ ¬üÈø §¸¡¨Å Å¨ÃÂÚò¾ø (Kinetic energy expression based on Centre of mass)

t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø n Ð¸û¸Ç¢ý ¿¢¨Ä¨Á¸û À¼õ (4.4.14) -ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

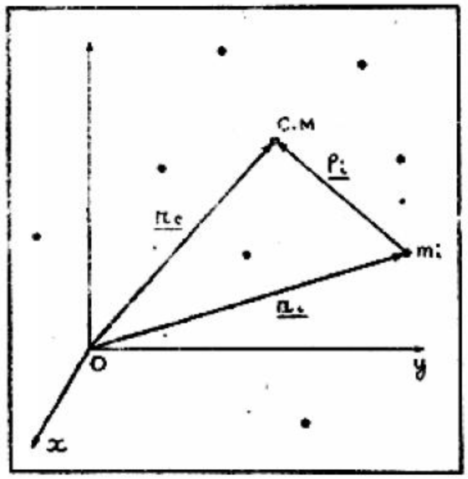
O-¨Å ÍðÎ¨ÁÂôÒ ÒûÇ¢Â¡¸ì ¦¸¡ñÎ mi ±ýÛõ Ð¸Ç¢ý ¿¢¨Äò¾¢¨ºÂ¢¨Â $\underline{r_1}$ எனவும் Ð¸û¸Ç¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò¨¾ Å¨ÃÂÚì Ìõ C.M. ±ýÛம் புள்ளியின் நிலைÂò¾¢¨ºÂ¢¨Â C.M. ±ýÚõ $\underline{r_c}$ ÒûÇ¢ ÀüÈ¢, mi -Â¢ý ¿¢¨Ä நித்திசையியை $\underline{P_1}$ எனவும் ¦¸¡û¸.

«ô§Àாது,

$\underline{r_1} = \underline{r_c} + \underline{P_1}$ ஆ Ì õ.

$$\therefore \frac{d\underline{r_1}}{dt} = \frac{d\underline{r_0}}{dt} + \frac{d\underline{p_1}}{dt}$$

« ¾¡ÅÐ $\underline{v_1} = \underline{v_c} + \underline{p_1}$



À¼õ 4-4-13

±É§Å, m_1 ±ý Ûõ Ð¸Çýþ ¾ý¨º§Å¸õ, ¾ý½ý× ¨ÁÂò¾ý ¾ý¨º§Å¸ò¨¾Ôõ, ¾ý½ý× ¨ÁÂõ ÌÈòÐ m_1 ±ý Ûõ Ð¸Çýþ º¡÷Òò¾ý¨º§Å¸ò¨¾Ôõ (velocity relative to the mass centre) §º÷òÐ ¯ ñ¼¡ Ìõ Åý¨ Ç×ì Ì Š ºÁÁ¡ Ìõ.

t ±ý Ûõ §¿Ãò¾ýø Ð¸û¸Ç¨ ÉòÐõ ¦ÀÚõ þÂì¸ ¬üÈø

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m\ i\,(\underline{v\ i}.\underline{v\ i})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i} mi\left(\underline{v_c} + P_i\right)\cdot\left(\underline{v_c} + \underline{P_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i} mi\left(v_c^{2} + 2v_c.\underline{P_i} + P_i^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum miv_c^{2} + \sum mi\underline{v_c}.\underline{P_i} + \frac{1}{2}\sum miP_i^{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\sum mi\right)v_c^{2} + \underline{v_c}.\sum miP_i + \frac{1}{2}\sum miP_i^{2}$$

þ í Ì $\sum mi$ ±ýÀÐ Ð¸û¸Çýþ ¦Á¡ò¾ ¿ý¨È¨Âì ÌÈýì¸ýÈÐ. « ¨¾ M ±É ì ¦¸¡û¸; §ÁÖõ

$$\sum mipi = \sum mi\frac{d}{dt}(mi\,\underline{pi}) = \frac{d}{dt}\sum mi\,\underline{pi}$$

¬ Ìõ. ±ýÀÐ ¾ý½ý× ¨ÁÂõ ÌÈòÐ ±Î ì Ìõ Ó¾üÀÊ ¦ÀÕì Ìò¦¾¡¨¸Â¡ Ìõ ¬¾Ä¡ø þ¾ý Á¾ýôÒ âîºýÂÁ¡ Ìõ. ±É§Å, Ð¸¦¼¡ Ì¾ýÂý þÂì¸ ¬üÈø ¬¸§Å, ´Õ ¿ý¨ÄÂ¡É ÌÈôÀýð¼î Í Ó¨È¨Âì ÌÈòÐ Ð¸û¸Çýþ ¦¾¡ Ì¾ýì Ì ¯¡ýÂ þÂì¸ ¬üÈø §¸¡¨Å þÕ Å¨¸Â¡É ¬üÈø¸Ç¡¸ô

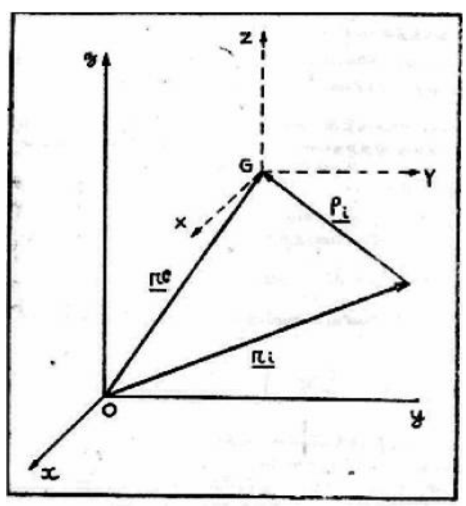
À¢¡¢ì¸ôÀð Î ûÇÐ¬ Ìõ. $\sum mi\underline{pi}$ ±ýÀÐ ¾¢½¢×¨Á¨Âõ ÌÈ¢òÐ ±Î ì Ìõ Ó¾üÀÊ ¦ÀÕì Ìò ¦¾¡¨¸Â¡ Ìõ (First moment about the mass centre). ¬¾Ä¡ø þ¾ý Á¾¢ôÒ âî º¢ÂÁ¡ Ìõ. ±É§Å, Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢Â¢ý þÂì¸ ¬üÈø

$= \frac{1}{2} M\ v_c{}^2 + \frac{1}{2} m\ iP_i{}^2$ ஆகும்.

¬¸§Å, ´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É ÌÈ¢ôÀ¢ð¼î Í Ó¨È¨Âì ÌÈ¢òÐ Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì¾¢ì Ì ¯¡¢Â þÂì¸ ¬üÈø §¸¡¨Å þÕ Å¨¸Â¡É ¬üÈø¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸ôÀð Î ûÇÐ.

Ó¾ø Å¨¸Â¢ø, $\frac{1}{2} M v_c{}^2$ ±ýÀÐ ¦¸¡ Î ì¸ôÀð¼ Ð¸û¸Ç¢ý ¦Á¡ò¾ ¿¢¨È¨Âô ¦ÀüÈ Ð¸¦Ç¡ ýÚ, ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾Ä¨ÁóÐ, ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø, ¿¢¨ÄÂ¡É ÌÈ¢ôÀ¢ð¼î Í Ó¨È¨ÂŠ º¡÷óÐ þÂí Ìõ þÂì¸ ¬üÈ¨Äì ÌÈ¢ôÀ¾¡ Ìõ. «øÄÐ Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì¾¢Â¡ÉÐ. «¾ý ¾¢½¢× ¨ÁòÐ¼ý þÂí Ìõ§À¡Ð, ¦ÀÚõ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ì Ìò ¾Ì¾¢Â¡É þÂì¸ ¬üÈø ±É ì (Kinetic energy due to translation of the system) ¦¸¡ûÇôÀ Î õ.

þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¨¸Â¢ø $\frac{1}{2}\sum m_i \underline{P_i^2}$ ±ýÀÐ ±Î ò¾ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼î Í, «¨ÁôÀ¢Ä¢ÕóÐ §¿¡ì Ìõ §À¡Ð, ¾¢½¢× ¨ÁÂò¨¾Š º¡÷óÐ, Ð¸û¸û þÂí Ì Å¾¡¸ì ¸Õ¾¢ « ¨Å ´ù¦Å¡ýÚõ ¦ÀÚõ þÂì¸ ¬üÈø¸Ç¢ý Ü Î ¾¨Äì ÌÈ¢ôÀ¾¡ Ìõ. «øÄÐ Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢ì Ì ¯¡¢Â ¾¢½¢×¨ÁÂõ ÅüÈ¢, Ð¸û¸Ç¢ý þÂì¸ò¾¡ø ²üÀÎ õ þÂì¸ ¬üÈ¨Äì ÌÈ¢ôÀ¾¡¸×õ (Kinetic energy of the motion of particles relative to the mass centre) ¦¸¡ûÇôÀ Î õ.



À¼õ 4-4-15

±É§Å Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢Â¢ý þÂì¸ ¬üÈø = (Ð¸ð¦¼¡ Ì¾¢ ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý þÂì¸ ¬üÈø) +(¾¢½¢×¨ÁÂõ ÀüÈ¢ò Ð¸û¸Ç¢ý þÂì¸ ¬üÈø)

Kinetic energy of the system = Kinetic energy of the Centre of mass + Kinetic energy about the Centre of mass

Pi^2 - ±ýÀ¾ý Á¾¢ôÒ À¢ý ÅÕÁ¡Ú ¸½¢ì¸ôÀ Î õ

$$Pi^2 = [(\frac{dP_i}{dt})_{xyz}]^2 = [(\frac{d\,\underline{P_i}}{dt})_{xyz}]^2$$

$$= [(\frac{d\,\underline{P_i}}{dt})_{xyz} + \underline{w} \wedge \underline{P_i}]^2$$

þ í Ì XYZ ±ýÀÐ ¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢ C.M. ¯¼ý þÂ í Ì õ Íð¼¨ÁôÒ Ó¨È¨ÂÌ ÌÈ¢Ì Ì õ. À¼õ (4.4.15) - ³ô À¡÷Ì¸

$\underline{w}$ ±ýÀÐ ¿¢¨ÄÂ¡É xyz ÌÈ¢ôÀ¢ð¼î Í « ¨Áô¨Àî º¡÷óÐ þÂ í Ì õ XYZ-ý §¸¡½ò¾¢¨º§Å¸Á¡ Ì õ.

4.4.8 ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý «ÊôÀ¨¼Â¢ø Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ ´ýÈ¢ü Ì ²üÈ¾¡É "§Å¨Å-¬üÈø" §¸¡¨Å¸¨ÇÌ ¸¡ Ï ¾ø: (Work-kinetic energy expressions based on centre of mass)

¿¢ä ð¼É¢ý þÃ ñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ, Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ ´ýÈ¢Û¨¼Â ¾¢½¢×¨ÁÂò¾¢ý þÂÌ¸õ $\underline{F} = M\dfrac{d^2r_c}{dt^2} = Mv_c$ ¬ Ì õ.

«ò¾¨¸Â ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ü Ì ¡¢Â "§Å¨Ä-¬üÈø" ºÁýÀ¡ Î

$$\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r_c} = (\frac{1}{2}Mv_c^{\,2})_2 - (\frac{1}{2}Mv_c^{\,2})_1....(1)$$

þ í Ì ÅÄÐÒÈò¾¢ÖûÇ Á¾¢ôÒ, Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢¦Â¡ýÚ ¦ÀÚõ, Ó¾ø À Ì ¾¢Ì¸¡É (First part) þÂÌ¸ ¬üÈÄ¢ý §ÅÚÀ¡ð¨¼Ì ÌÈ¢Ì¸¢ÈÐ. þùÅ¢¾ þÂÌ¸ ¬üÈø À Ì ¾¢Â¡ÉÐ, Ð¸û¸Ç¢ý ¦Á¡ò¾ ¿¢¨È¸¨Çô ¦ÀüÚõ, ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢Ä¨ÁóÐõ ¯ûÇ ´Õ ¸üÀ¨É ÉÂ¡É Ð¸Ç¢ý§Áø, ÒÈ Å¢¨º¸Ç¨ É òÐõ ¦ºöÔõ §Å¨ÄÔ¼ý ¦¾¡¼÷ÒôÀÎ ò¾ôÀð Î ûÇ ¨¾, (1) ±ýÛõ ºÁýÀ¡ Î ¦ÅÇ¢ôÀÎ òÐ¸¢ÈÐ.

þÂÌ¸ ¬üÈÄ¢ý ÁüÈ¦¡Õ À Ì ¾¢Ì Ì õ, Å¢¨º¸Ù Ì Ì ÓûÇ ¦¾¡¼÷¨ÀÌ¸¡½, m_i ±ýÛõ 21 ¿¢¨ÈÔ¨¼Â i-¬ÅÐ Ð¸Ç¢ý þÂÌ¸ ¬üÈø ºÁýÀ¡ð¨¼ ¬Ã¡Â §Å ñ ÊÅÕ¸¢ÈÐ.

¿¢ä ð¼É¢ý þÃ ñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ,--- ±ýÛõ Ð¸Ç¢ý þÂÌ¸ò¨¾ Å¨ÃÂÚ Ì Ì õ ºÁýÀ¡ Î

$$\underline{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} = mi\,\frac{d^2r\underline{i}}{dt^2} = mi\,\frac{dvi}{dt}$$ ¬ Ì õ.

þ í Ì $\underline{f_{ij}}$ ±ýÀÐ, j-¬ÅÐ Ð¸û, i-¬ÅÐ Ð¸Ç¢ý§Áø ¦ºÖòÐõ ¯û Å¢¨º¨ÂÌ ÌÈ¢Ì¸¢ÈÐ. §ÁÖõ, À¼õ (9.23)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú.

$\underline{ri} = \underline{rc} + \underline{Pi}$

$d\,\underline{ri} = d\,\underline{rc} + d\,\underline{pi}$

(2),(3) ±ýÛõ ºÁýÀ¡Î¸Ç¢ø «¨ÁÔõ ¾¢¨ºÂ¢¸Ç¢ý ±ñ ½¢ô ¦ÀÕÌ¸¢¨Â Å¨ÃÂÚòÐ, -- ÅÐ ¯ÚôÒ « ¨ÁôÀ¢Ä¢ÕóÐ, 2ÅÐ ¯ÚôÒ¨ÁôÒÌ Ì, --

±ý Ûõ Ð¸û ²§¾Û ¦Á¡Õ À¡ ¨¾Â¦Ä¦Â í Ìõ§À¡Ð, «¾ü Ì ²üÈ¾¡É "§Å ¨Ä-¬üÈø" ºÁýÀ¡ Î ¦¾¡ ¨ ¸ Ñ ñ ¸ ½¦¾ Ó ¨ÈôÀÊ,

$$\int_1^2 \left(\underline{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \right) \left(d\,\underline{r_c} + d\,\underline{P_i} \right)$$

$$= \int_1^2 m\,i \frac{d\,\underline{\underline{v\,i}}}{d\,t} . d\;\underline{r\,i}$$

$$= \int_1^2 m\,i \frac{d\,\underline{\underline{v\,i}}}{d\,t} . \frac{d\,\underline{\underline{r\,i}}}{d\,t} d\,t$$

$$= \int_1^2 m\,i \left(\frac{d\,\underline{\underline{v\,i}}}{d\,t} . \underline{v\,i} \right) d\,t$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 m\,i \frac{d}{dt} (\underline{v\,i} . \underline{v\,i}) d\,t$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 m_i d \left(v_i . v_i \right) = \frac{1}{2} \int_1^2 m_i d \left(v_i^{\,2} \right) = \frac{1}{2} \int_1^2 m_i \left\{ \left(v_i .^{2} \right)_2 - \left(v_i .^{2} \right)_1 \right\}$$

i = ¬ ÅÐ Ð¸Ç¦ý þÂì ¸ ¬ üÈø Á¡üÈÁ¡ Ìõ.

þ ùÅ¦¾ "§Å ¨ Ä-¬ üÈø" ºÁ ýÀ¡ Î , ´ù ¦Å¡Õ Ð¸ Ù ì Ìõ ¦À¡ÕóÐ Å¾¡ø, §Áü ÜÈ¦Â ºÁ ýÀ¡ðÊ ý Üð Î ò¦¾¡ ¨ ¸Â¡ø, n-Ð¸ û ¸Ç¦ý ¦¾¡ Ì ¾¦ì Ì ¡¦Â "§Å ¨ Ä-¬ üÈø" ºÁ ýÀ¡ð ¨¼ô ¦ÀÈÄ¡õ. ¬ ¾Ä¡ø,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\underline{F\,i} + \sum_{j=1}^{n} \underline{f\,ij} \right) . (d\,\underline{r\,c} + d\,\underline{P\,i}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m\,i (v\,i^2)_2 - \frac{1}{2} \sum m\,i (v\,i^2)_2 ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \underline{F\,i} . d\,\underline{r\,c} + \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \underline{F\,i} . d\,\underline{P\,i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \cdot d\underline{r_c} + \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \cdot d\underline{P_i}$$

Ð¸ û ¸ û « ¨ Éò¾¦ü Ì Á¡ É þÂì ¸ ¬ üÈø, Á¡üÈÁ¡ Ìõ

$$= \Delta \left[K E \right]_{1,2}$$

$$= \Delta \left\{ \frac{1}{2} M\,v_c^{\,2} + \frac{1}{2} \sum m\,i P\,i^2 \right\}$$

$$= \Delta \left(\frac{1}{2} M\,v_c^{\,2} \right) + \Delta \left(\frac{1}{2} \sum m\,i P\,i^2 \right)$$

§ÁÖõ,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \underline{F\,i} . d\;\underline{r\,c} = \Delta \left(\frac{1}{2} M\;v_c^{\;2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \sum_{j=1}^{n} \underline{f\,ij} . d\;\underline{r\,c} = \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underline{f\,ij} \right) . d\;\underline{r\,c}$$

$$= \int_1^2 \underline{0}.d\,\underline{rc},; \; = 0$$ (¯û Å¢¨º¸Ç¢ý ÌÈ¢Â¢Âø Ü𠸮 ò¦¾¡¨¸ â̺¢ÂÁ¡ Ìõ)

$$\sum_{i=1}^{n}\int_1^2\sum_{j=1}^{n}\underline{fij}.d\,\underline{Pi} = \int_1^2\sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{n}(\underline{fij}.d\,\underline{Pi}); \pm 0;$$ ±ýÀ¾¡ø,

(4) ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ðÊý þÚ¾¢Â¡É ¿¢¨Ä

$$\sum_{i=1}^{n}\int_1^2 \underline{Fi}.d\,\underline{P1} + \sum_{i=1}^{n}\int_1^2\sum_{j=1}^{n}(\underline{fi}.d\,\underline{P1});$$

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\sum miPi^2\right)..........(5)$$

¬¸§Å, (1)-±ý Ûõ ºÁýÀ¡Î, ÒÈÅ¢¨º¸Ç¢ý Å¡Â¢Ä¡¸, ¾¢½¢×¯¨ÁÂò¾¢ý þÂì¸ò¨¾ Å¢Å¡¢ì¸¢ÈÐ. ¬É¡ø (5)-±ý Ûõ ºÁýÀ¡Î, ÒÈ, ¯û ±ýÈ þÕÅ¨¸Â¡É Å¢¨º¸û ¦ºöÔõ §Å¨Ä¸Ç¡ø, ¾¢½¢×¨ÁÂò¨¾Î º¡÷óÐ, Ð¸û¸Ç¢ý þÂì¸ò¨¾ Å¢Çì Ì¸¢ÈÐ.

4.4.9 Á¡¾¢¡¢ì ¸½ì Ì¸û

4.4.9.1 2¸¢.¸¢, 6¸¢.¸¢ ¿¢¨È¸¨Çô ¦ÀüÈ þÕ¦À¡Õû¸û, ¿¢¨ÄÂ¡É ÅÆÅÆôÀ¡É, þ§Ä¡º¡É ´Õ ¸ôÀ¢Â¢ýÁ¢Ð ¦ºøÖõ Á¢ÇÅøÄ¡¾ ¸Â¢Ú ´ýÈ¢ø þ¨½ì¸ôÀðÎ ´§ÃÁð¼¼ò¾¢Ä¢ÕóÐ Å¢Î Å¢ì¸ôÀÎ ¸¢ýÈÉ. 100: $\left\{\left[10^{-2}\right]$மீ$\right\}$ ¦¾¡¨Ä× þÂí¸¢ÂÀ¢ý, «ò¦¾¡ Ì¾¢ ¦ÀÚõ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

þí Ì ¦À¡Õû¸Ç¢ý ±¨¼¸û Áð Î§Á §Å¨Ä¨ÂÎ ¦ºö¸¢ýÈÉ. ±É§Å, ±¨¼¸û ¦ºö¾ §Å¨Ä

$[2(-1.0) \times 9.81 + 6(1.0) \times 9.81]$ f¤ø¸û

$= 39.24$ f¤ø¸û.

¸Â¢Ú Á¢ûºì¾¢ÂüÈ¾¡¨¸Â¡ø, þÕ¦À¡Õû¸Ç¢ý §Å¸í¸û ºÁÁ¡ Ìõ((V:வே¸õ) ±É§Å,

þÂì¸ ¬üÈÄ¢ø Á¡üÈõ

þÚ¾¢ þÂì¸ ¬üÈø - ¦¾¡¼ì¸ þÂì¸ ¬üÈø $= \frac{1}{2}(2+6)v^2 - 0 = 4v^2$

"§Å¨Ä-¬üÈø" ¾òÐÅôÀÊ,

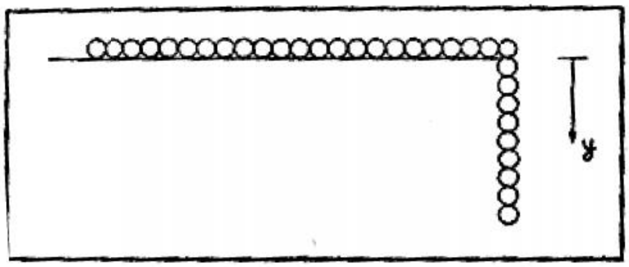
$4v^2 = 3924$

$v^2 = 9.81$

$v = 3.132$ Á/Å¢É¡Ê

4.4.9.2 6¸¢.¸¢ ±¨¼Ôõ, 1.8Á ¿ÇÓûÇ º¡í¸¢Ä¢Â¢ý 1.2 Áð¼÷ ¿ÇÓûÇ À Ì¾¢ ÅÆÅÆôÀüÈ §Á¨ºÂ¢ýÁ¢Ð « ¨ÁÔÁ¡Úõ, Á¾¢Ó ûÇ 0.6Á À Ì¾¢ ÅÆÅÆôÀ¡É §Á¨ºÂ¢ý Å¢Ç¢õÒ ÅÆ¢Â¡¸ Î ¦ºÖò¾ôÀð Î ¦¾¡í¸¢ÂÅ¡_ñ ½õ «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ø, À¼õ 4.4.16ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, ¨Å ì¸ôÀð Î ûÇÉ. ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.3 º¡í¸¢Ä¢

Å¢Î Å¢ì¸ôÀð Î º í ¸¢Ä¢Â¢ý þÚ¾¢ì ¸ ñ ½¢ §Á ¨ º ¨ ÂÅ¢ð Î Å¢Ä Ì õ ¾Õ½ò¾¢ø, «¾ý ¾¢ ¨ º§Å¸ò ¨ ¾ì ¸¡ ñ ¸.



À¼õ 4-4-16

¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø º í ¸¢Ä¢Â¢ý ¾¢½¢× ¨ ÁÂõ

$\overline{yo} = \dfrac{4x0 + 2x0.3}{4+2} = \dfrac{1}{10}$ Á¦.± ý Û õ ¦¾¡ ¨ ÄÅ¢ø ¯ ûÇÐ.

º í ¸¢Ä¢Â¢ý þÚ¾¢ì ¸ ñ½¢ §Á ¨ º ¨ ÂÅ¢ð Î Å¢Ä Ì õ§À¡Ð $\overline{y_1} = 0.9$ Á¦ð¼÷ ¬ Ì õ.

±É§Å, º í ¸¢Ä¢Â¢ý ¦ºö¾ §Å ¨ Ä = 6 (0.9-0.1) = 4.8 Á¦ð¼÷ ¸¢.¸¢ ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¾Õ½ò¾¢ø (Á¦ð¼¡¢ø) ¦¾¡ í ¸¢ì ¦¸¡ ñ ÊÕì Ì õ ¿¦Çò ¨ ¾ì Ì È¢ì ¸ð Î õ. ±É§Å dy ±ýÛ õ µ÷ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢Â¢ø, ¯Ã¡ö×Å¢ ¨ º ¦ºöÔõ (±¾¢÷)§Å ¨ Ä =-0.3 $\left(\dfrac{1.8-v}{1.8}\right)x6dy = -(1.8-y)dy$ ±É§Å, ¦Á¡ò¾ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢Â¢ø, ¯Ã¡ö×Å¢ ¨ º ¦ºöÔõ (±¾¢÷)§Å ¨ Ä

$$= -\int_{0.6}^{1.8} (1.8-y)dy = -0.72;$$ =-0.72 Á¦ð¼÷ ¸¢¸¢ ¬ Ì õ.

«ô¦À¡ØÐ "§Å ¨ Ä-¬üÈø" ºÁýÀ¡ðÊýÀÊ

4.8-0.72= $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6}{9.81}\right)v^{2;}$

«¾¡ÅÐ, $v = 3.653$ Á¦/Å¢É¡Ê

Áü¦È¡Õ ÅÆ¢;§Á ¨ ºÂ¢ý Å¢Ç¢õÒ ÅÆÅÆôÀ¡¾¡Â¢ÕôÀ¾¡ø º í ¸¢Ä¢Â¢ý þØÅ¢ ¨ º «¾ý ¿¦Çõ ÓØÅ¾¢Öõ ´§Ã «Ç× ¨ ¼Â¾¡¸ þÕì Ì õ. «ùÅ¢ØÅ¢ ¨ º ¨ Â T ±Éì¦¸¡û¸. º í ¸¢Ä¢Â¢ø ´ÕÅ¢¾ ¿¦ðº¢Ôõ þøÄ¡¾ ¸¡Ã½ò¾¡ø §Á ¨ ºÁ¢Ð ¯ ûÇ º í ¸¢Ä¢ôÀÌ¾¢ ¦ÀÚõ §Å¸Óõ, ÓÎì¸Óõ ¦ºí ÌòÐò ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦¾¡í ¸¢ì ¦¸ ¡ ñ ÊÕì Ì õ º í ¸¢Ä¢ô ÀÌ¾¢Â ¨ ¼Ôõ §Å¸ò¾¢üÌ õ, ÓÎì¸ò¾¢üÌ õ Ó ¨ È§Â ºÁÁ¡ Ì õ. ,a ±ýÀ ¨ Å Ó ¨ È§Â ¦À¡Ð§Å¸ò ¨ ¾Ôõ, ÓÎì ¨ ¾Ôõ Ì È¢ì ¸ð Î õ.

²§¾Û ¦Á¡Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ §¿Ãò¾¢ø ¦¾¡í ¸¢ì ¦¸ ¡ ñ ÊÕì Ì õ º í ¸¢Ä¢ô ÀÌ¾¢Â¢ý ¿¦Çõ x ¬ Ì õ. «ôÀÌ¾¢ ¨ Â ¾É¢ôÀÎ òÐõ§À¡Ð, «¾ý§Áø «¾üÌ ¡¢Â ± ¨ ¼Ôõ, þØÅ¢ ¨ ºÔõ ¦ºÂøÀÎ ¸¢ýÈÉ.

±É§Å $\dfrac{x}{l}w - T = \dfrac{xw}{\lg}a$ ¬ Ì õ.

«ùÅ¡§È §Á¨ºÂ¢ý À Ì ¾¢¨Âò ¾É¢ôÀ Î ò¾ ¯Ã¡ö×Å¢¨ºÔõ. þØÅ¢¨ºÔõ «ôÀ Ì ¾¢Â¢ý §Áø ¦ºÂøÀ Î ¸¢ýÈÉ.

±É§Å, $T-«(l-x)\frac{w}{l}=\frac{l-w}{l}\frac{w}{g}a$ ¬ Ì õ.

þ î ºÁý À¡ Î ¸ ¨ Ç ´ ý Ú §º÷ò¾¢¼,

$$\frac{w}{l}\left[x-«(i-x)\right]=\frac{w}{g}a=\frac{w}{g}v\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{g}{l}\int_{l/3}^{l}\left[(l+«)x-«l\right]dx=\int_{o}^{v}v\,dv$$

$$\therefore \frac{2gl}{9}(2-«)=\frac{v^{2}}{2}$$

$$\therefore v=\frac{2}{3}\sqrt{gl(2-«)};$$

þ í Ì $l=1.8$; Á¢ $g=9.81$ Á¢/Å¢É¡Ê ^{2} ; $«=0.3$

¬ ¸§Å $v=\frac{2}{3}\left[9.81\times1.8(2-0.3)\right]1/2$ Á¢/Å¢É¡Ê

$=3.6527$ Á¢ Å¢É¡Ê.

4.4.9.3 m = 6¸¢¸¢, m = 10¸¢.¸¢ ¿¢¨È¸ ¨Çô ¦ÀüÈ þÕ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¾Õ Ì ÍÕûÅ¢ø ´ý¨È ¦¿Õ í ¸¢Â ¿¢¨ÄÂ¢ø ¨Åò¾Õì¸¢ýÈÉ. ¦À¡Õû¸¨Ç Å¢ Î Å¢ì Ì õ§À¡Ð, ÍÕûÅ¢ø †¤ì¸¢ý Å¢¾¢¨Âô À¢ýÀüÈ¢ Á¢û¸¢ÈÐ. ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø ÍÕûÅ¢øÄ¢ø þØÅ¢¨º 16 ¿¢äð¼ý¸Ç¡¸×õ. À¢È Ì 4 $\left\{\left[10^{-2}\right]மீ\right\}$ Á¢ð¼¢¨Âô ¦ÀÚõ§À¡Ð, þØÅ¢¨º 8 ¿¢äð¼ý¸Ç¡¸×õ þÕì Ì §Á ¬É¡ø «ó§¿Ãò¾¢ø, 6¸¢¸¢ ¿¢¨È¨Âô ¦ÀüÈ ¦À¡ÕÇ¢ý ¾¢¨º§Å¸õ ¸¡ ñ ¸.

¾Õ Ì ÍÕûÅ¢ø †¤ì¸¢ý Å¢¾¢¨Â À¢ýÀüÚÅ¾¡ø, F= -KX ¬ Ì õ. «Ð Á¢ð¼¢¨Âô ¦ÀÚõ§À¡Ð, ¦ºö¾§Å ¨Ä

$$=\int_{x_o}^{x}f\,dx=-\frac{1}{K}\int_{F\circ}^{F}F\,dF=\frac{1}{2k}(F_o^{\,2}-F^{\,2})=\frac{1}{2k}(F_o+F(F_o-F);$$

$$=\frac{1}{2}(F_o+F)(x-x_o)=\frac{1}{2}(16+8)\ (0.04\text{-}0)$$

= 0.48 *ƒ*¤ø.

ÍÕûÅ¢ø 4 $\left\{\left[10^{-2}\right]மீ\right\}$ Á¢ð¼¢¨Âô¦ÀÚõ ¾Õ½ò¾¢ø, ¦À¡Õû¸Ç¢ý §Å¸ í ¸ ¨ Ç Ó ¨È§Â v,v' ±É ì ¦ ¸ ¡û ¸.

ÍÕûÅில்லின் இØÅ¢¨º, ¦À¡Õû¸Ç¢ý§Áø ´§Ã §¿÷§¸¡ðÊø ºÁÛõ ±¾¢Ã¡ ¸ î செயற்படுவதா¡ø, ÒÈÅ¢¨º¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂý âî º¢ÂÁ¡ Ì õ. ±É§Å §¿÷§¸¡ð Î உந்தக்காப்பு Å¢¾¢ôÀÊ,

$mv+m'v'=0$;

$v'=-\frac{mv}{m'}$ஆகும்.

¦À¡Õð¦¼¡ Ì¾¢Â¢ø ²üÀð¼ þÂì¸ ¬üÈÄ¢ø Á¡üÈõ.

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'\left(-\frac{mv}{m}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2\left[1+\frac{m}{m'}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times 6\left[1+\frac{6}{10}\right]v^2 = 4.8v^2$$

¦À¡Õð¦¼¡ Ì¾¢ì Ì¡¢Â "§Å¨Ä-¬üÈø" ºÁý À¡ðÊý ÀÊ,

$$4.8v^2 = 0.48$$

$$\therefore v = 0.36 = \text{Á¢/Å¢É¡Ê}$$

4.4.9.4 2.7Á¦ ¿¦ÇÓõ, 9¸¢¸¢ ±¨¼ÔûÇ º í¸¢Ä¢¦Â¡ýÈ¢ý ¸¢ú Ó¨É ¾¨Ã¨Âò ¦¾¡ Î Á¡Ú ¿¦Úò¾¢ ¨Åì¸ôÀð டு பிஎ் Ò ¸§ÆÅ¢ØÁ¡Ú Å¢¼ôÀ நிகிறது. º í¸¢Ä¢Â¢ý ¸¨¼¢ì ñ ½¢ ¾¨Ã¨Âò ¦¾¡ நம்பே¡Ð, ¾¨ÃÂ¢ø ²üÀÎõ ±³நர்த்தர ì¸ Å¢¨ºÂ¢ý ºÃ¡º¡¢ Å¾¢ôÒ Â¡Ð?

º í¸¢Ä¢Â¢ý ¿¦Çò¨¾ l என×õ, «¾ý ¿¢¨È¨Â m என ×õ ¦¸¡û¸. f ±ýÀÐ ¾¨ÃÂ¢ý ±¾¢÷¾¡ì¸ சராசரி Å¢¨º¨Ãì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. சங்¸¢Ä¢Â¢ý ±¨¼ (w)Ôõ ¾¨ÃÂ¢ý §Áø§¿¡ì¸¢A f ±ýÛõ ±¾¢÷ò¾¡ì¸Óõ, º í¸¢Ä¢Â¢ý§Áø செÂøÀÎõ ÒÈÅ¢¨º¸Ç¡Ìõ.

t ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø y ¿¦ÇÓûÇ º í¸¢ÄôÀÌ¾¢ ¾¨ÃÂ¢ý§Áø þÕôÀ¾¡¸ì கெ¡û¸. «ÎòÐÅÕõ Δt ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ø Δy ±ýÛõ «Ç×ûÇ º í¸¢Ä¢ v ±ýÛõ §Å¸òÐ¼ý ¾¨Ã¨Â «¨¼Ôõ§À¡Ð ²üÀÎõ ¯ó¾Á¡üÈõ $-=\frac{m}{l}\Delta yv;$ ஈ¡É ¦ÅÇ¢Â¢ÖûÇ º í¸¢Äô ÀÌ¾¢யின் ¯ó¾õ «ùÅô¦À¡Øது ÒÅ¢Â¢÷ôÒ ÓÎì¸õ ¸¡Ã½Á¡¸ «¾¢¸¡¢òÐÌ ¦¸¡ñ §¼Â¢Õì¸¢ÈÐ. «ò¾¨¸Â ¯ó¾Á¡üÈõ §¾¡Ã¡ÂÁ¡¸, $=m\left(1-\frac{y}{l}\right)g\Delta t;$ ¬Ìõ. «¾üÌ þ¨ºóÐ ²üÀÎõ ¾¡ì¸Ç¨Å=(w-f) Δt ¾¡ì¸Ç¨Å -¯ó¾ ¾òÐÅò ºÁý À¡ðÊý ÀÊ,

$$m\left(1-\frac{y}{l}\right)g\,\Delta t - \frac{m}{t}v\,\Delta y = (w-f)\,\Delta t$$

«¾¡ÅÐ $m\left(1-\frac{y}{l}\right)g - \frac{m}{t}v\frac{\Delta y}{\Delta t} = w - f$

Δt ±ýÀÐ â î º¢Âò ¨ ¾ « ¨ ¼Ôõ§À¡Ð, §Áü Ü È¢Â ºÁ ý À¡ Î ,

$m\left(1-\frac{y}{1}\right)g-\frac{m}{l}v^{2}=w-f=mg-f$ ¬ Ì õ.

±É§Å $f=\frac{mv^{2}}{l}+\frac{y}{l}mg;$

´ù¦Å¡Õ ¸ ñ ½¢Ĥõ g என்ý Ûõ ஒ Î கைத்து¼ý ¸¦ú§¿¡ì ¸¢ Å¢ØÅ¾¡ø, t என்ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø ¾¢ ¨ ºவேகம்.

$v=\sqrt{2gy}$ எý È¡ Ìம்.

$f=3\frac{y}{l}w$ ஓ í Ì $y=l$ என் Úû Ç§À¡Ð

$f=3w=3\times9=27;$ ¸¢.¸¢. ¬ Ì õ.

(Áü¦È¡Õ Å Æ¢) t ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø, y ¿¦ÇÓ û Ç º í ¸¢Ä¢ôÀ Ì ¾¢ ¾ ¨ ÃÂ¢ø þÕôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ¸ . «ô¦À¡ØÐ ¾¢ ½¢× ¨ ÁÂò¾¢ ý y- « î Í ò¦ ¾¡ ¨ Ä×, $\overline{y}$ ¬ ÉÐ, $l\overline{y}=y\times(0)+(l-y)\times\left[\frac{l-y}{2}\right]$ ¬ Ì õ.

t-³ ì Ì È¢òÐ, §Áü Ü È¢Â ºÁ ý À¡ðÊ ý Å ¨ ¸ ì ¦ ¸ Ø ¨ Å ì ¸ ¡ Ï õ§À¡Ð, $l\dot{\overline{y}}=-(l-y)\dot{y}$

$\dot{\overline{y}}=-\left(1-\frac{y}{l}\right)\dot{y}$ ¬ Ì õ.

±É§Å, ¯ó¾õ $m\dot{\overline{y}}=+m\left(1-\frac{y}{l}\right)(-\dot{y})$ ¬ Ì õ.

$$\sum_{i=1}^{n}\underline{li}=\left(\sum mi\right)\left(\underline{v_c}\right)_2-\left(\sum mi\underline{v_c}\right)_1$$

±ý Ûõ ºÁ ý À¡ðÊø (vc)₁ ±ýÀ ¨ ¾ Á¡È¢Ä¢Â¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ ñ Î , Å ¨ ¸ ì ¦ ¸ Ø ¨ Å ì ¸ ¡ Ï õ¦À¡ØÐ,

$$\sum\underline{Fi}=\frac{d}{dt}\left\{\underline{v_c}\sum mi\right\}_2$$ ¬ Ì õ.

þ í Ì $f=w+\frac{d}{dt}(m\dot{y})=\frac{d}{dt}\left\{m\left(1-\frac{y}{l}\right)(-\dot{y})\right\}=\frac{m\dot{y}^{2}}{l}+m\left(1-\frac{y}{l}\right)(-\ddot{y})$

$\dot{y}^{2}=2gy,\ \ddot{y}=g$ ± ý È ¡ Ä ¾ ¡ ø

Óý§À¡Ä§Å $f-w=\frac{2mgy}{l}-mg+\frac{mgy}{l},$

$\therefore f=\frac{3wy}{l}$ ¬ Ì õ.

þ í Ì f = 3w = 27 ¸¢.¸¢ ¬ Ì õ.

4.4.10 Ð¸ û ¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ²üÈ¾¡ É §¿÷§¸¡ð Î ¯ó¾ò ¨ ¾ì ¸ ¡ Ï ¾ø,
(To find the linear momentum of a system of particles).

mi, i=1,2 ..... n ±ý Û õ ¿¢ ¨ È¸ ¨ Çô¦ÀüÈ n Ð¸ û¸ û «¼í ¸¢Â ¦¾¡ Ì தி
´ ý ¨ È§¿¡ì Ì ¸ . «ò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ ý ¯ûÅ¢ ¨ º¸ û, þÃð ¨ ¼¸ Ç¡ ¸ (in pairs) ´ §ரு
§¿÷§¸¡ðÊø ºÁ Û õ ±¾¢ÕÁ¡ö ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ø «ÅüÈ¢ ý Ì È¢Â¢Âü Ü Î ¾ல்
â î º¢ÂÁ¡ Ì õ. «ò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ø ¦ºÂüÀ Î õ ÒÈÅ¢ ¨ º¸ Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢ ¨ º ¨ Â $\underline{F}$ ±É ì ¦¸ ¡û ¸ .

¿¢ä ð¼É¢ ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ, «ò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ ý þÂ ì ¸ ò ¨ ¾,

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} m\, i \frac{d\, vt}{dt};$$

±ý Û õ ºÁ ýÀ¡ Î Å ¨ ÃÂÚ ì ¸¢ÈÐ. þò¾ ¨ ¸Â Å¢ ¨ º, Ð¸ û¸ Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ ý §Áø, $(t_2 - t_1)$ ¸¡Ä «ÇÅ¢ü Ì î ¦ºÂüÀ Î Á¡Â¢ ý ,

$$\int_{t_1}^{t_3} \underline{F}\, dt = \underline{I} \quad \text{ÒÈ} = \int_{t_1}^{t_3} \left(\sum_{i=1}^{n} m i \frac{d\, \underline{v} i}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{1}^{2} \sum_{i=1}^{n} d\left(m_i \underline{v_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2} d\left(m_i \underline{v_i} \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i} \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i} \right)_1$$

±É§Å, Ð¸ û ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ ý §Áø, ´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸¡Ä «ÇÅ¢ü Ì î ¦ºÂüÀ Î õ ÒÈÅ¢ ¨ Ç× Å¢ ¨ º¢ ý ¾¡ì ¸ Ç ¨ Å (Impulse) «ì ¸¡Ä þ ¨ ¼¦ÅÇ¢Â¢ø Ð¸ û¸ Ç¢ ý §¿÷§¸¡ð Î ¯ó¾ò¾¢ø ²üÀ Î õ Á¡ÚÀ¡ Î ¸ Ç¢ ý Üð Î ò¦¾¡ ¨ ¸ ì Ì î º¢ÂÁ¡ Ì õ.

¦ÀÕõÀ¡Öõ, ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢Ä¼í ¸¢Â Ð¸ û¸ û ´ ù¦Å¡ ý È¢ ý þÂ ì ¸ ò ¨ ¾Ôõ «È¢Â§Å ñ ÊÂ ¿¢ ¨ Ä ¨ Á ¸ û þÃ¡Ð. ¦Á¡ò¾ò¾¢ø ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ ý þÂ ì ¸ ò ¨ ¾ô ÀüÈ¢Â Å¢ÅÃí ¸§Ç §¾ ¨ ÅôÀ Î õ. «ùÅ¢¾ ¿¢ ¨ Ä ¨ Á ¸ Ç¢ø, ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ ý ¾¢ ½¢× ¨ ÁÂò¾¢ ý þÂ ì ¸ §Á º¢Èô ¨ ÀÀô ¦ÀÚõ.

¾¢ ½¢× ¨ ÁÂò¾¢ ý ¿¢ ¨ Ä ¨ Â Å ¨ ÃÂÚ ì Ì õ ºÁ ýÀ¡ Î ,

$$M\, \underline{r_c} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \underline{r_i} \quad ¬ Ì õ.$$

§ÁüÜÈ¢Â ºÁ ýÀ¡ð ¨ ¼ t - ³ ì Ì È¢òÐ ´ÕÓ ¨ È Å ¨ ¸Â¢ Î ¦ºöÔõ§À¡Ð (differentiating once with respect to t)

$$M\, \underline{v_c} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \underline{v_i}$$

±ýÀÐ ¸¢ ¨ ¼ì ¸¢ÈÐ.

þ î ºÁ ýÀ¡ Î , Ð¸ û¸ Ç¢ ý ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â ¦Á¡ò¾ ¯ó¾õ, Ð¸ û¸ Ç¢ ý ¦Á¡ò¾ ¿¢ ¨ È ¨ Âô ¦ÀüÚõ, ¾¢ ½¢× ¨ ÁÂò¾¢ø ¨ ÁóÐõ. «ò¾¢ ½¢× ¨ ÁÂò¾¢ ý

¾¢¨º§Å¸ò¨¾ô ¦ÀüÚõ, ¸üÀ¨ ÉÂ¡ø ¯ÕÅ¡ì¸ôÀð¼ÐÁ¡É Ð¸û ´ýÈ¢ý ¯ó¾ò¾¢ü Ì î ºÁÁ¡ Ì õ ±ýÀ¨ ¾ «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ.

(1)-ÅÐ ºÁýÀ¡ðÊý ÅÄôÒÈ Á¾¢ô¨À, (2)-ÅÐ ºÁýÀ¡ð¼¡ø ®Î ¦ºöÔõ§À¡Ð,

$$= \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\, dt = \underline{I} = M\left(\underline{v_c}\right)_2 - M\left(\underline{v_c}\right)_1$$ ±ýÀÐ ¸¢¨¼ì¸¢ÈÐ.

±É§Å, ÒÈò¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¡ø ¦ºÂüÀð Î þÂí Ì õ, Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢ ´ýÈ¢ø ²üÀ Î õ ¯ó¾Á¡üÈõ, Ð¸Ç¢ý ¦Á¡ò¾ ¿¢¨È¨Âô ¦ÀüÚõ, ¦¾¡ Ì ¾¢ì Ì ¡¢Â ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý þÂì¸ò¨¾ô ¦ÀüÚõ ¸üÀ¨ ÉÂ¡ø ¯ÕÅ¡ì¸ôÀð¼ÐÁ¡É Ð¸û ´ýÈ¢ø ²üÀ Î õ ¯ó¾Á¡üÈò¾¢ü Ì î ºÁÁ¡ Ì õ.

þìÜ¨È þÂì¸ Å¢¨ºÂ¢Âø ÀÂÉÇ¢ì Ì õ Å¨¸Â¢ø À¢ýÅÕÁ¡Úõ ¦¾¡¢ÅôÀÐ ÅÆì¸õ.

´Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸¡Ä þ¨¼¦ÅÇ¢ø Ð¸ð¦¼¡ Ì ¾¢ ´ýÈ¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ø ²üÀ Î õ ¯ó¾Á¡üÈõ, «ò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ý §Áø ¦ºÂüÀ Î õ ÒÈò¾¡ì¸Ç¨Å¸Ç¢ý Ü Î ¾¡Ö Ì î ºÁÁ¡ Ì õ.

Ì È¢Â£ Î Ò¨ÈÂ¢ø, þìÜÚ

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{I_i} = \left(\sum m_i\right)\left(\underline{v_c}\right)_2 - \left(\sum m_i\right)\left(\underline{v_c}\right)_1$$

±ý Û õ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀ Î õ.

4.4.11 ¯ó¾ì¸¡ôÒ «øÄÐ ¾¢½¢× §Å¸ì¸¡ôÒ (Conservation of Momentum)

¾ó¾¦¾¡Õ §¿Ãò¾¢ø Ð¸û¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ¾¢Â¡ÉÐ ±ùÅ¢¾ô ÒÈÅ¢¨º¸Ù Ì õ ¸ð Î ôÀ¼¡ÁÄ¢Õì Ì õ ¦ÀÕ¢ø, «ó§¿Ãò¾¢ø ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ø ²üÀ Î õ ¯ó¾Á¡üÈõ â º¢ÂÁ¡ Ì õ.

«¾¡ÅÐ, $\int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt = \left(\sum_{i=1}^{n} mi\underline{vi}\right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{n} mi\underline{vi}\right)_1$ ±ý Û õ

ºÁýÀ¡ðÊø, $\underline{F} = 0$; ¬Å¾¡ø,

$$\int_{t_1}^{t_2} F\, dt = 0$$ ¬ Ì õ.

±É§Å, $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i}\right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i}\right)_1 = 0$

«¾¡ÅÐ, ¯ó¾Á¡üÈõ â º¢ÂÁ¡¸¢ÈÐ,

¬¸§Å, $\underline{F} = 0$ ±ýÚûÇ§À¡Ð,

$\left(\sum m_i \underline{v_i}\right)_2 - \left(\sum m_i \underline{v_i}\right)_1 =$ ´Õ Á¡È¢Ä¢ Ì õ.

þÐ§Å "§¿÷§¸¡ð Î ¯ó¾ì¸¡ôÒ Å¢¾¢" (Law of conservation of Linear Momentum) ±ÉôÀ Î õ. þùÅ¢¾¢¨Âô À¢ýÅÕÁ¡Ú ÅÃÂÚì¸Ä¡õ.

ÒÈÅ¢ ¨ º ì ¸ ½ ò ¾¡ ì ¸ Ç ¨ Å ¸ Ç¢ ý ¿¢ ¸ ÃÁ¾¢ôÒ â î º¢Â ¦ Á É¢ø, Ð ¸ ð ¦ ¼¡ Ì ¾¢Â¢ ý ¯ó¾õ ±ó§¿¡Ãò¾¢Öõ ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡ Ì õ.

ÁüÚõ, (2)-ÅÐ ºÁ ý À¡ðÊø, F = 0 ± ý È¡ Ì õ§À¡Ð,

$M(\underline{v_c})_2 - M(\underline{v_c})_1 = 0$ ¬ Ì õ.

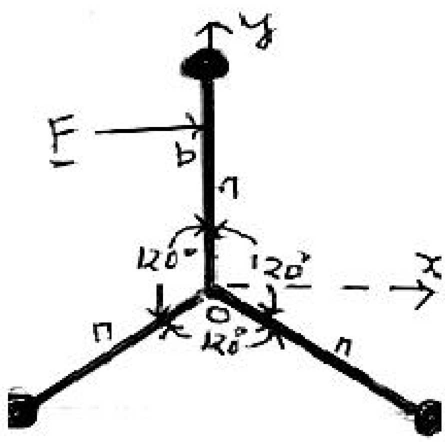
« ¾¡ ÅÐ, $M(\underline{v_c})_2 - M(\underline{v_c})_1 = 0$ ´Õ Á¡È¢Ä¢.

¬ ¾Ä¡ ø, À¢ ý ÅÕõ Ü üÈõ ¯¼É ÊÂ¡ ¸ ô ¦ ÀÈôÀ Î õ.

±ùÅ¢¾ô ÒÈÅ¢ ¨ º ¸ Ù ì Ì õ ¸ ð Î ôÀ¼¡¾ Ð ¸ ð ¦ ¼¡ Ì ¾¢ ´ ý È¢ ý ¾¢ ½ ¢× ¨ ÁÂõ, ´Õ §¿÷§¸ ¡ðÊ§Ä§Â º£Ã¡É ¾¢ ¨ º§Å ¸ òÐ¼ ý þÂ í Ì õ.

4.4.12 ÀÂ¢üº¢

4.4.12.1(1) 0-ø ÀüÈ ¨ Å ì ¸ ôÀð¼ Å¢ ¨ ÈôÀ¡É ºÁÀì ¸ Ó ì §¸ ¡ ½ õ Á¢ ¸ ì Ì ¨ ÈÅ¡É ¿¢ ¨ È ¦ ¸ ¡ ñ ¼ ºð¼¦Á¡ ý È¢ø, ´§Ã m ¿¢ ¨ È ¦ ¸ ¡ ñ ¼ ã ý Ú ÀóÐ ¸ û À¼ò¾¢ø ¸ ¡ðÊÂÅ¡Ú « ¨ ÁóÐûÇÐ. þùÅ ¨ ÁôÒî ºð¼õ ÁÆÁÆôÀ¡É ¸ ¢ ¨ ¼Â¡É §ÁüÀÃôÒ ´ ý È¢ø ¿¢ ¨ Ä ¦ ¸ ¡ ñ Î ûÇÐ. ±¾¢÷À¡Ã¡¾ ¿¢ ¨ Ä ¨ ÁÂ¢ø ¸ ¢ ¨ ¼Â¡ ¸ Å¢ ¨ º $\underline{F}$ ´ ý Ú Àð ¨ ¼ ´ ý È¢ø À¼ò¾¢ø ¸ ¡ðÊÂÅ¡Ú ÅÂ ý À Î ò¾ôÀ Î ¸ ¢ÈÐ.



(a) 0-ÒûÇ¢Â¢ ý Ó Î ì ¸ õ (b) ºð¼ò¾¢ ý §¸ ¡ ½ Ó Î ì ¸ õ ¯ ¬ ¸ ¢ÂÅü ¨ Èò ¾÷Á¡ É¢ì ¸ .

(Å¢ ¨ ð $(a)\underline{a} = \underline{ao} = \frac{F}{3m}\underline{i}; (b)\underline{\quad} = \frac{fb}{3mn^2}$)

(2) ã ý Ú ¬ ¨ Ãì ¸ ¡ø ¸ Ù õ ¾ ¨ ¼ÂüÈ Å ¨ ¸ Â¢ø 0-ø ÍÆÖõÀÊ §ÁüÜÈ¢Â §ÁÖûÇ Å¢É¡Å¢ø « ¨ ÁÔ ¦ Á É¢ø,

(a) (b) § ¸ ¡ ½ Á¾¢ôÒ ¸ û ¬ ¨ Ãì ¸ ¡ø ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢ø Á¡ÚÀ Î ¸ ¢ ý ÈÉ. ±É§Å §¸ ¡ ½ þÂì ¸ í ¸ û Á¡ÚÀ Î ¸ ¢ ý ÈÉ.

t=2.2 Å¢É¡Ê¢ø, 5 Ð ¸ û ¸ Ç¢ ý ¦ ¾¡ Ì ¾¢Â¢ ý §¿÷§¸ ¡ð Î ò¾¢ ½ ¢× §Å ¸ õ $\frac{G}{2.2}$ =3.4 $\underline{i} - 2.6\underline{j} + 4.6\underline{k}kgm/s$ ± ý ÚûÇÐ. t=2.4 Å¢É¡Ê¢ø §¿÷§¸ ¡ð Î ò ¾¢ ½ ¢×§Å ¸ õ. $\frac{G}{2.4} = 3.7\underline{i} - 2.2\underline{j} + 4.9\underline{k}kg.m/s$ ± ý Ú Á¡ÚÀ Î ¸ ¢ÈÐ. §¿÷ ¨ ¼¦ÅÇ¢ ¦ ¾¡ Ì ¾¢Â¢ø

¦ºÂøÀÎõ ¦ÅÇ¢Å¢¨º¸Ç¢ன் விசை Ç× Å¢¨ºÂ¢ý §¿Ãº¡Ã¡º¢¡¢ì Ì¡¢Â $\underline{F}$ Å¢¨ºÂ¢ý ÀÕÁ¨Éì (magnituide) ¸¡ண்க.
(Å¢¨¼ F=2.92N)

4.4.12.2 ¾¢½¢× ¨ÁÂõ G-ல் ³óÐ À¢¨½ì¸ôÀð¼ Ð¸û¸Ç¢ý ¾¢½ிவு 0.6kg ±ýÚ ¦¸¡Îì¸ôÀð Îû Çது. ஒÕ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¸½ò¾¢ø (Instant) G குÈ¢òÐ ¦¾¡Ì¾¢ì Ì¡¢Â ÍÆø ¯ó¾õ = 1.20 $\underline{x}$ kg.m/s ±ýÚõ a-ý ¾¢¨ºÂ¢ §Å¸òகிற்கு¡¢Â x ÁüÚõ y À Ì¾¢ì ÜÚ¸û Ó¨È§Â 3m/s, 4m/s ±ýÚõ ¦¸¡Îì¸ôÀð Îû ÇÉ.
0 Ì È¢òÐ ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý ÍÆø ¯ó¾ò¨¾ì ¸¡ñ¸.
(Ì È¢ôÒ ox, oy «îÍ¸û Ì È¢òÐ G-ý «îÍò¦¾¡¨Ä×¸û Ó¨È§Â 0.4m, 0.3m ±ýÚ ¦¸¡Îì¸ôÀð Îû ÇÐ.

(Å¢¨¼ $\underline{Ho} = 3.3\underline{k}kg.m^2/s$]

4.4.12.3 ¸¢¨¼Â¡É À¡¨¾Â¢ø þÂí¸¢ì ¦¸¡ñ ÊÕì Ìõ A ±ýÛõ 15mg ±¨¼ÔûÇ §Á¡ð¼¡÷Å ñÊ 1.5Å¢É¡Ê §Å¸ò¾¢ø «¾üÌ ÓýÅ¡¸ þÂí¸¢ì ¦¸¡ ñ ÊÕì Ìõ 12mg ±¨¼Ôõ 0.75Å¢É¡Ê §Å¸Óõ ¦ÀüÈ B ±ýÛõ Ä¡¡¢¨Â §¿Å¡¸ ±¾¢÷¦¸¡û¸¢ÈÐ. þÃ ñ Î ¯óÐÅ ñ Ê¸Ùõ ºó¾¢ìÌõ §¿Ãò¾¢ø «ùÅ¢Ã ñ Îõ À¢¨½ì¸ôÀÎ¸¢ýÈÉ.
(a) À¢...½ó¾×¼ý þÃ ñ Î Å ñ Ê¸Ç¢ý §Å¸ò¨¾Ôõ, ÁüÚõ (b) À¢¨½ôÒ 0.8வினா¡ÊÂ¢ø ¿¢¸Ø¦ÁÉ¢ø «ÅüÈ¢üÌ þ¨¼§Â ¦ºÂøÀÎõ. º¡º¡¢ Å¢¨º¨ÂÇம் தீர்மாÉ¢ì¸×õ
(a) x-ன் நேர்¾¢¨ºÂ¢ø §Å¸õ=0.5 Á/ Å¢É¡Ê
(b) F சராசரி =18.8 KN

4.4.12.4 15kg ±¨¼ÔûÇ ºÚì Ì Å ñ Ê (Toboggan) ¸¢¨¼Â¡¸ ¿¢¨ÄÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð «¾ý À¢ýÉ¡ø, 40kg ±¨¼ÔûÇ º¢ÚÅý «¾ý§Áø ¿¢ü¸¢È¡ý. º¢ÚÅý Å ñ ÊÂ¢ý A ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ 2Á ¦¾¡¨ÄÅ¢ÖûÇ Å ñ ÊÂ¢ÖûÇ 3 ÒûÇ¢¨Â §¿¡ì¸¢ ¿¼ó¾×¼ý, ¿¢ýÚÅ¢Î¸¢È¡ý ºÚì Ì Å ñ Ê ¿¸÷ó¾ ¦¾¡¨Ä¨Åì ¸¡ñ¸. (¸¢¨¼ò¾Çõ ÀÉ¢ì¸ðÊ¾ÇÁ¡¸ì ¦¸¡û¸ ¯Ã¡ö× Å¢¨º¨Â ±Îò Ðì¦¸¡ûÇ §Å ñ ¼¡õ)
(Å¢¨¼ (¦¾¡¨Ä× = 1.45Á)

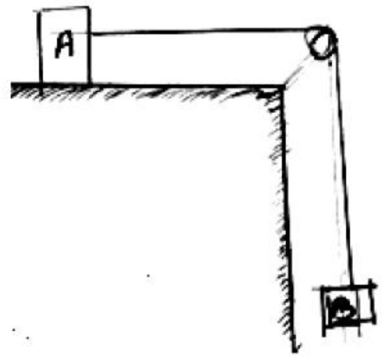
4.4.12.5 ¿¦îºø ÌÇò¾¢ø ¿¢¨ÄÂ¡¸ «¨Áò¾ §Á¨¼ ´ýÈ¢Ä¢ÕóÐ 750N (=75kg) ±¨¼ÔûÇ ÁÉ¢¾ý ´ÕÅý (M) «Õ¸¢ø ¿¡¢ø «¨ÁóÐûÇ துÅì¸ò¾¢ø ¿¢¨ÄÂ¡¸ ¯ûÇ À¼Ì (B) ´ýÈ¢ý§Áø ¾¡Å¢ì Ì¾¢ì¸¢È¡ý. «õÁÉ¢¾É¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý ¸¢¨¼«îÍò ¦¾¡¨Ä×ìÜÈ¢ý §Å¸õ 1Á/Å¢É¡Ê (À¼¸¢ø Ì¾¢ìÌ ÓýÒ) ±É¢ø, À¼Ì (ÁÉ¢¾ý Ì¾¢ò¾ À¢ýÒ) 0.5Á/Å¢É¡Ê §Å¸ò¨¾ô ¦ÀüÈ¢Õì Ì¦ÁÉ¢ø, À¼¸¢ý ±¨¼¨Âì ¸¡ñ¸.

4.4.12.6 ºÁÁ¡É W ±¨¼ÔûÇ þÕÐ¸û¸û ±¨¼ÂüÈ¾¡ì ¸Õ¾ôÀÎõ ¸Â¢Ú ´ýÈ¡ø À¢¨½ì¸ôÀðÎ «ì¸Â¢Ú ¯Ã¡öÅüÈ ¸ôÀ¢ ´ýÈ¢ý§Áø ¦ºøÖõÀÊ ¯ûÇÉ. ´Õ Àì¸ò¾¢ø w(<w) ±¨¼ÔûÇ Áü¦È¡Õ º¢È¢Â¦À¡Õû §º÷ì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. ¯¼ÉÊÂ¡¸ º¢È¢Â¦À¡Õû à ì¸¢ ±È¢ÂôÀÎ¸¢ÈÐ. W ±¨¼ÔûÇ

Ð¸û¸û ÐÅì¸òந்தில் «¨Á¾¢¿¢¨ÄÂ¢ÕóÐ þÂí Ì Å¾¡¸ì ¦¸¡ñ Î ¦¾¡ Ìò¾¢ì Ì¡¢Â Ó Îக்கத்தைச் ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ : a=g$\frac{W}{(2W+W)}$)

4.4.12.7. 25kg ±¼¨Ôû¨Ç ¦À¡Õû ´ýÚ ¸¢¨¼Â¡¸ «¨ÁóÐû¨ÇÐ §Á¨ f ´ýÈ¢ø «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ø ¯Ã¡öÅüÈ ¸ôÀ¢ ´ýÈ¢ý ÅÆ¢Â¡¸ ¸ÂÚ ´ýÈ¡¸ À¢¨½ì¸ôÀð Î, ¸Â¢È¢ý þÚ¾¢ôÒû¨Ç¢Â¢ø 3.75 ±¨¼¦¸¡ñ¼ Áü¦È¡Õ¦À¡Õû ´ýÚ¼ý ¸ úú§¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø À¢¨½ì¸ôÀð Îû¨ÇÐ. (À¼õ 4.4.18)



À¼õ 4-4-18

4.4.12.8 §Á¨ f ìÌõ, 25kg ¦ÀüÈ ¦À¡ÕÙììÌõ þ¨¼Â¢Öû¨Ç ¯Ã¡ö× þÂì¸ò¨¾ §À¡ÐÁ¡É «Ç× ¿¢ÚòÐÅ¾¡¸ ¯û¨ÇÐ. 3.75 ±¨¼Ô¼ý, 1.25kg ±¨¼ §º÷ì¸ôÀð¼¡ø, ¿¢¨È¸Ç¢ý Ó Îì¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ a=0.40g Á/Å¢É¡Ê^2)

4.4.12.9 ¯Ã¡ö× « =0.6 ¯û¨Ç þÕ ÓÃ¼¡É ¾Çí¸û Ó¨È§Â 30° ÁüÚõ 60° §¸¡½í¸¨Ç ¸¢¨¼ì§¸¡ðÎ¼ý «¨ÁòÐì ¦¸¡ñÎû¨Ç «ò¾Çí¸û §ºÕÁ¢¼ò¾¢ø ¸ôÀ¢ý ´ýÈ¢ý ÅÆ§Â ¦ºøÖõ ¸Â¢Ú¼ý þÕ ¦À¡Õû¸Ùõ þ¨½ì¸ôÀð Îû¨ÇÉ. Å¢¨Ç× Ó Îì¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸

(Å¢¨¼ a=0.368 Á/Å¢É¡Ê^2)

4.4.12.10 12Å¢É¡Ê¸Ùì Ì §Á§Ä 640N ±¨¼Ôû¨Ç Å¢¨º, 150N ±¨¼Ôû¨Ç ¦À¡Õû ´ýÈ¢ý§Áø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. Å¢¨ºÂ¢ý ¦¾¡¼ì¸ ¾¢¨º§Å¸õ 6Á/ Å¢É¡Ê ±É¢ø (a) விசைÂ¢ý ¾¢¨ºÂ¢ø Å¢¨ÇÅ¢ì¸ôÀð¼ Ó Îì¸õ, ÁüÚõ (b) 12 Å¢É¡Ê¸Ç¢ø பொருû ¿¸÷ó¾ ¦¾¡¨Ä×- ¬¸¢ÂÅü¨Èò ¾£÷Á¡É¢ì¸×õ.

4.4.12.11 m_A =280kg ÁüÚõ $m_B = 420kg$ ¿¢¨ÈÔû¨Ç þÕ¸ð¨¼¸û ¿¦ð¼¢ì Ì ¯ðÀ¼¡¾ ¸Â¢று ஒýÈ¡ø À¢¨½ì¸ப்பð Î, ¸ð¨¼ A - ¸¢¨¼Â¡¸ «¨ÁóÐû¨Ç ¦º¡Ã¦º¡ÃôÀ¡É §Á¨º ´ýÈ¢ø ¿¢லைC¸¡ñ Îû¨ÇÐ. ¸ð¨¼ A-ìÌõ, §Á¨ f ìÌõ þ¨¼Â¢Ä¨ÁÔõ ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø μ=0.30 ±Éì¦¸¡Îì¸ôÀð Îû¨ÇÐ. «¨ÁôÒ ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø «¨Á¾¢ ¿¢¨ÄÂ¢ø உள்ளÐ. ¦ÀðÊ ´ù¦Å¡ýÚõ 3.5Á ¦¾¡¨Ä× þÂí¸¢Â À¢ÈÌ «ÅüÈ¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼: ¦ºö¾§Å¨Ä $U_{i-f} = 11536.56 Nm$.

¬ üÈÄ¢ø Á¡üÈõ $= T_f - T_i = 350 N^2$

$$\left[(V_A)_f = (V_B)_f = N \right]$$

±É§Å $U_{i-f} = T_f - T_i = 11536.56 = 350N^2 - 0$

$\therefore$ N=5.741 Á¦ /(Å¢É¡Ê)

(Ì È¢ôÒ: ¸Â¢È¢ý þØÅ¢¨º §¾¨ ÅôÀð¼¡ø, ¿¢ä ð¼É¢ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ,

$$N_{+}^{2} = No^{2} + 2as$$

$$(5.741)^2 = 0 + 2a(3.5)$$

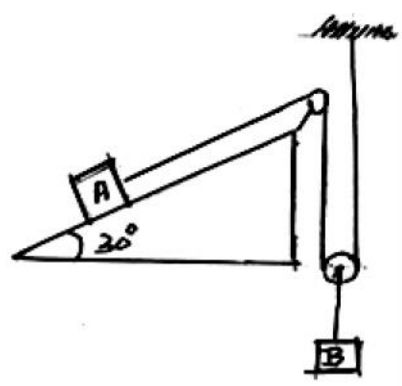
$\therefore a = 4.708$ Á¦ / (Å¢É¡Ê) ^{2}

§ÁÖõ $T + 420a - 4120.2 = 0$

$T = 2142.84N;$]

4.4.12.12 ¦¾¡டர்Å ñ டி þÂì Ì ¦À¡È¢ 600KN ±¨¼ÔûÇ Å ñ Ê ´ ý ¨È $\frac{1}{100}$ «Ç× º¡ö×ûÇ ¾ ñ ¼Å¡Çò¾¢ø 4.5 ¸¢.Á¦/Á½¢ §Å¸ò¾¢ø þØòÐî ¦ºø¸¢ÈÐ. ¯Ã¡ö×ì Ì ¡¢Â ¾¨¼ 8 N/KN ±É¢ø ¦À¡È¢Â¢ý ¾¢È¨ É ì ¸¡ ñ ¸. (Å¢¨¼: ¾¢Èý 13.5kw)

4.4.12.13 À¼ò¾¢ø ¸¡ðÊÔûÇÀÊ ¦¾¡ Ì ¾¢ ¦¾¡¼ì ¸ò¾¢ø அ ¨Á¾¢¿¢¨ ÄÂ¢ø ¯ûÇÐ. «¾¢ø 750N 1500N Ó¨ È§Â ±¨¼ÔûÇ A,B ±ýÈ இரு ¸ Éô¦ÀðÊ¸û ¸Â¢Ú ´ ýÈ¡ø À¢¨ ½ì ¸ôÀð Î ¸ôÀ¢ ´ ýÈ¢ý ÅÆ¢§Â ¦ºýÚ நிலò¾¢ø ¯ûÇÐ. ¦ÀðÊ A º¡ö× ¾Ç í ¸ Ù ì Ì þ ¨¼Â§ÂÔûÇ ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø μ=0.2 ±ýÈ¡ø, A ¦ÀðÊ, º¡ö×¾Çò¾¢ø 1.5Á¦ ¦¾¡ ¨Ä× §Á§Ä ¦ºøலும்¦À¡Ð, «¾ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ ñ ¸. (¸ôÀ¢ ¯Ã¡öÅüÚõ, ±¨¼ÂüÈÐÁ¡¸ ì ¦¸¡ûÇ×õ)



À¼õ 4-4-19

(Å¢¨¼: $v_A = 2.532$ Á¦ /Å¢É¡Ê)

4.5. Ð¸¦Ç¡ýÈ¢ü Ì¡¢Â ¾¡ì¸Ç¨Å - ¯ó¾ì§¸¡ðÀ¡Î (IMPULSE MOMENTUM PRINCIPLE OF PARTICLE)

Óó¾¢Â «ò¾¢Â¡Â¡í¸Ç¢ø ¿¢äð¼É¢ý §À¡üÈò¾ì¸¾¡É þÃñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢,´Õ Ð¸Ç¢ý þÂì¸ôÀ¡¨¾¨Â Å¨ÃÂÚì¸ô ÀÂýÀÎò¾ôÀð¼Ð. «¾ý Å¢¨ÇÅ¡¸, Å¨¸ì¦¸ØîºÁý À¡Î ´ýÚ Å¨ÃÂÚì¸ôÀðÎ, «¨¾ò ¦¾¡¨¸Â¢Î ¦ºöÔõ§À¡Ð, þÂì¸ò¨¾ôÀüÈ¢Â Å¢ÅÃí¸¨Çô ¦ÀÈ ÓÊó¾Ð. þùÅò¾¢Â¡Âò¾¢Öõ, «ÊôÀ¨¼ þÂì¸î ºÁýÀ¡Î¸¨Çò ¦¾¡¨¸Â¢Î õ§À¡Ð, Å¨º, ÓÎì¸õ ±ýÀ¨Å¸Ù ìÌî º¢ÈôÀ¢¼õ «Ç¢ì¸¡Áø, ¯ó¾õ, ¬üÈø ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý «Æ¢Å¢ý ¨Áò ¾òÐÅò¨¾ §Áü¦¸¡ñ Î, «ùÅ¢¾ ¸ÕòÐ¸Ùììî º¢ÈôÀ¢¼õ «Ç¢ì¸ôÀð Î, þÂì¸õ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

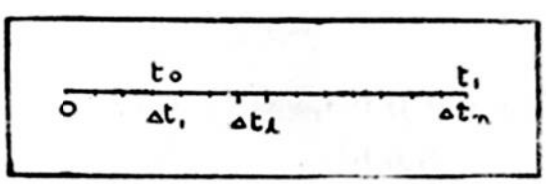
4.5.1 ¾¡ì¸Ç¨Å (Impulse)

$\underline{F}$ ±ýÛõ Á¡È¡Å¢¨º¦Â¡ýÚ, ´Õ ¦À¡ÕÇ¢ýÁ¢Ð $(t_1 - t_0)$ ¸¡Ä «ÇÅ¢ü Ìî ¦ºÂüÀÎÁ¡Â¢ý, «ùÅ¢¨ºÂ¢ý ¾¡ì¸Ç¨Å,$\underline{I}$ ±ýÀÐ «ùÅ¢¨º, «Ð ¦ºÂüÀÎõ ¸¡Ä«Ç× ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¦ÀÕì¸üÀÄÉ¡Ìõ.

$$\underline{I} = \underline{F}\left(t_1 - t_0\right) \text{ ¬¸§Å,}$$

þÐ ´Õ ¾¢¨ºÂ¢Â¡Ìõ. þ¾ý ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º Á¡È¡Å¢¨ºÂ¢ý ¾¢¨ºÂ¢Ä¨ÁÔõ. ¦À¡ÕÇ¢ý Á¢Ð ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º Á¡ÚÀÎÁ¡Â¢ý, ¾¡ì¸Ç¨Å À¢ýÅÕÁ¡Ú «ÇÅ¢¼ôÀÎõ.

¾ó¾¦¾¡Õ¸¡Ä þ¨¼¦ÅÇ¢ $(t_1 - t_0)$ ³ À¼õ (4.5.1)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, $\Delta t_i, i = 1, 2, ...dt_n$ ±ýÛõ n º¢È¢Â ¸¡Ä þ¨¼¦ÅÇ¢¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸×õ. Δt_i ±ýÛõ þ¨¼¦ÅÇ¢Â¢ø, ²§¾Ûõ ¦Á¡Õ §¿Ãò¾¢ø, Á¡ÚÅ¢¨º $\underline{F}$ ¬ÉÐ, $\underline{F_1}$ ±ýÛõ $\underline{F_1}$ Á¾¢ô¨Àô ¦ÀÚÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «îº¢È¢Â Δt_1 §¿Ãò¾¢ø, $\underline{F_1}$ ±ýÀÐ ´Õ Á¡È¡Å¢¨ºÂ¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ.



À¼õ 4-5-1

«ô§À¡Ð, $\underline{F_1}$ ý ¾¡ì¸Ç¨Å = $\underline{F_i}\Delta t_1$ ¬Ìõ.

±É§Å, $(t_1 - t_0)$ ¸¡Ä þ¨¼¦ÅÇ¢Â¢ø $\underline{F_i}$ ±ýÛõ Á¡ÚÅ¢¨ºÂ¢ý ¾¡ì¸Ç¨Å

$$\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}\Delta t_i \text{ ¬Ìõ.}$$

Δt_i §¿Ãò ¨ ¾ Á¢ ¸ î º¢È¢Â¾¡ ¸ î ¦ºöÐ ¦ ¸ ¡ ñ §¼ ¦ º ý Ú, þÚ¾¢Â¡ ¸ « Ð â î º¢Âò ¨ ¾ « Ï Ì õ§À¡Ð, $\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \Delta t_i$ ± ý ÀÐ, « ¾ ý ±ø ¨ Ä Á¾¢ô ¨ À « ¨ ¼Å¾¡ ¸¢ø, « ù ¦ Åø ¨ Ä Á¾¢ôÒ Á¡ÚÅ¢ ¨ ºÂ¢ ý ¾¡ ì ¸ Ç ¨ ÅÂ¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ÇôÀ Î õ.
±É§Å,

$$\underline{I} = \lim_{t\to 0} \sum_{i}^{n} \underline{F}_i \Delta t_i = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F} dt$$

$(t_i - t_0)$ ¸ ¡Ä þ ¨ ¼¦ÅÇ¢Â¢ø, $\underline{F}$ ²ü Ì õ Á¾¢ôÒ ¸Ç¢ ý ºÃ¡º¡¢ Å¢ ¨ º ì Ì ¡¢Â ¾¢ ¨ º ¨ Â, I ± ý Ûõ ¾¡ ì ¸ Ç ¨ ÅÂ¡ÉÐ ¦ÀüÚ û Ç¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ÇôÀ Î õ. ²§¾Û ¦Á¡Õ Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø, ¾¡ ì ¸ Ç ¨ Åò ¾¢ ¨ ºÂ¢-þ ý À ¸ ¢÷×. «ò¾¢ ¨ ºÂ¢Ä ¨ Áó¾ Á¡ÚÅ¢ ¨ ºÂ¢ ý À ¸ ¢÷× ì Ì ¡¢Â ¾¡ ì ¸ Ç ¨ Å ì Ì î ºÁÁ¡ Ì õ. ² ¦ É É¢ø, $\underline{E}$ ± ý ÀÐ, Ì È¢ôÀ¢ð¼ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø, ´Õ ¿¢ ¨ ÄÂ¡É (Fixed)µÃÄ Ì ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¨ Â ì Ì È¢ì Ì õ§À¡Ð

$$\underline{I}_E = (\underline{I}.\underline{E})\underline{E} = \underline{E}(\underline{E}.\underline{I})$$

$$= \underline{E}\left(\underline{E}.\int_{t_2}^{t_1} \underline{F} dt\right)$$

$$= \underline{E}\left(\int_{t_2}^{t_1} \left(\underline{E}.\underline{F}\right) dt\right)$$

$$= \underline{E}\int_{t_2}^{t_1} \left(\underline{F}.E\right) dt$$

¬ Ì õ.

$\underline{E}$ ± ý ÀÐ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, ¾¢ ¨ ºÂ¢ ¸ ¨ Ç ì Ì È¢ì Ì õ§À¡Ð,

$$\underline{I}_i = \underline{i}\int_{t_0}^{t_1} \left(\underline{F}.\underline{i}\right) dt = \underline{i}\int_{t_0}^{t_1} F_x dt,$$

$$\underline{I}_j = \underline{j}\int_{t_0}^{t_1} \left(\underline{F}.\underline{j}\right) dt = \underline{j}\int_{t_0}^{t_1} F_y dt,$$

$$\underline{I}_k = \underline{k}\int_{t_0}^{t_1} \left(\underline{F}.\underline{k}\right) dt = \underline{k}\int_{t_0}^{t_1} F_z dt,$$

$$\therefore \underline{I} = \underline{I}_i + \underline{I}_j + \underline{I}_k$$

$$= \underline{i}\int_{t_0}^{t_1} F_x dt + \underline{j}\int_{t_0}^{t_1} F_y dt + \underline{k}\int_{t_0}^{t_1} F_z dt$$

¬ Ì õ.

§ÁÖõ, $\underline{F_i}, t = 1, 2, ...n$ ±ýÀ¨Å ´ÕÓ¨É Å¦¨º¸Ç¡Ìõ. «ÅüÈ¦ý ¦¾¡ÌÀÂý Å¦¨º, $\underline{R}$ ¬Ìõ. ¾ÃôÀð¼ $(t_i - t_0)$ ¸¡Ä þ¨¼¦ÅÇ¢Â¢ø, ¦¾¡ÌÀÂý Å¦¨º¢Âý ¾¡ì¸Ç¨Å, Å¦¨º¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢üÌõ ¯¡¢Â ¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¦ý ÌÈ¢Â¢Âø Üð¼Ä¦¾¡ÌÌÌî ºÁÁ¡Ìõ.

$\underline{I}$ ±ýÀÐ, ¦¾¡ÌÀÂý Å¦¨ºìÌ¡¢Â ¾¡ì¸Ç¨Å ±É¦ø,

$$\underline{I} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{R}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F_1} \right) dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}_i\, dt$$

$$= \underline{I_1} + \underline{I_1} + ... + \underline{I_n}$$

¬Ìõ.

4.5.2. Å¨ÃÀ¼ Ó¨ÈÂ¢ø ¾¡ì¸Ç¨Å¨Âì¸½ì¸¦¼ø:

´Õ Å¦¨º¢Â¦ý ¾¡ì¸Ç¨Å "Å¦¨º-¸¡Ä" Å¨ÃÀ¼ò¾¦ø, (Force-time graph), T ¸¡Ä «ÇÅ¦ø, t = 0, t = T ±ýÛõ Ìò¾¡Âí¸Ùì Ì þ¨¼ôÀð¼ ÀÃôÀ¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸ $\underline{F} = 4t\underline{i} - 9\underline{j} + 6t^2\underline{k}$ ±ýÛõ Å¦¨º ´Õ Ð¸Ç¦ø t = 0, t = T ±ýÛõ þ¨¼¸¡Ä §¿Ãò¾¦ø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. $\underline{F}$ ý ¿¦¸Ã¾¡ì¸Ç¨Å

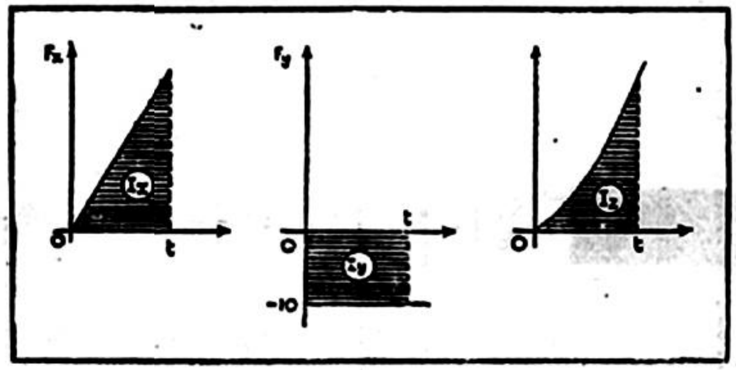
$$\underline{I} = \int_0^T \underline{F}\,dt = \int_0^T \left(4t\underline{i} - 9\,\underline{j} + 6t^2\,\underline{k} \right) dt$$

$$= 2T^2\underline{i} - 9T\,\underline{j} + 2T^3\underline{k}$$

¬Ìõ.

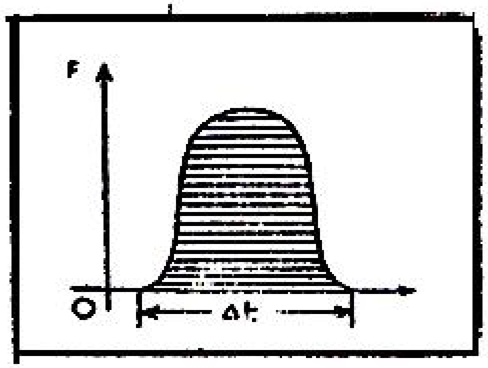
þíÌ ¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¦ý À¸¦÷×¸û, §¿Ãò¨¾î º¡÷óÐ (4.5.2)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú Å¦¨ºôÀ¸¦÷× Å¨Ç×ôÀ¡¨¾Ì Ìõ, t «îÍÌ Ìõ, t = T ±ýÛõ ¿¦¨ÄÌ§¸¡ðÎ ÌÌõ þ¨¼Â¦ÖûÇ ÀÃôÀÇ× Å¨ÃÂÚÌ Ìõ.

¿¨¼Ó¨ÈÌ ¸½ÌÌ¸Ç¦ø, Å¦¨ºÂ¦ý ÅÊÅ¨ÁôÒ ¦¾¡¦Â¡Á§Ä§Â, «¾ý ¾¡ì¸ÇÅÂ¡ÉÐ «ÇÅ¦¼ÌÜÊÂÐ. ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸, Áð¨¼ ´ ýÈ¡ø (bat) ´Õ Àó¨¾ «ÊÌÌõ§À¡Ð, ÀÂýÀÎò¾ôÀð¼ Å¦¨º¨Â Å¨ÃÂÚôÀÐ ¸ÊÉÁ¡Ìõ. «ùÅ¦¾ Å¦¨º¢Âý ±ñ Á¾¦ôÀ¦ø ²üÀÎõ Á¡ÚÀ¡Î, À¼õ (4.5.3)-¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÕì¸ÌÜÎõ. ¾¡ì¸¦Î §¿Ãõ Á¦¸î º¦È¢Â¾¡¸ þÕôÀ¦Ûõ, Å¦¨º¢ÂÉÐ ¦À¡¢Â¾¡¸ þÕì¸ÌÜÎÁ¡¾Ä¡ø, ¾¡ì¸Ç¨Å ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ «Ç× Á¾¦ô¨Àô ¦ÀÈò¾Ì¸¾¡¸ ¯ûÇÐ.



À¼õ 4-5-2

±É§Å ¾¡ì¸Ç¨Å - ¯ó¾ Ó¨È (Impulse - Momentum Method) Â¢ø, Å¢¨º¸Ç¢ý Á¾¢ôÒ¸¨Ç «È¢Â¡Á§Ä§Â, «¨Å¸û Å¢¨ÇÅ¢ìÌõ ¯ó¾ Á¡üÈò¨¾ «Çó¾È¢Â ÓÊÔõ.



À¼õ 4-5-3

4.5.3.Ð¸Ùì Ì¡¢Â ¾¡ì¸Ç¨Å - ¯ó¾ò ¾òÐÅò¨¾ «È¢Å¢ìÌõ ºÁýÀ¡ð¨¼ Å¨ÃÂÚò¾ø.

m ¿¢¨È¨ÂÔ¨¼Â Ð¸û ´ýÈ¢ø, $\underline{F}$ ±ýÛõ Å¢¨º ¦ºÂüÀÎ Å¾¡¸ì ¦¸¡û¸. ¿¢äð¼É¢ý þÃñ¼¡Ð Å¢¾¢ôÀÊ

$\underline{F} = m\underline{a}$ ¬Ìõ.

¿¢¨È ´Õ Á¡È¢Ä¢Â¡¸ ¾¡Ä¡ø,

$\underline{F} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\underline{v})$ ±É×õ ÌÈ¢ì¸Ä¡õ.

þíÌ $(m\underline{v})$ ±ýÛõ ¾¢¨ºÂ¢Â¡ÉÐ, §¿÷ì§¸¡ð¼ ¯¿¾õ (Linear momentum) ±ÉôÀÎõ. ±É§Å, ¿¢äð¼É¢ý þÃñ¼¡Ð Å¢¾¢¨Â ¸¡ü Ì¸¡Ð ÀÈ¢¦¾¡Õ Å¨¸Â"´Õ ¦À¡ÕÇ¢ý ¯ó¾ Á¡ÚÀ¡Î ÅÃ¡É¾¡ÉÐ, «¾ýÁ¢Ð ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨ºìÌ §¿÷Å¢¸¢¾ ºÁÁ¡ö «¨ÁÅ§¾¡Î «ùÅ¢¨º ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¢Â§Ä§Â ¯ó¾Á¡ÚÀ¡Îõ ²üÀÎõ."

§ÁÖõ, $\underline{F}$ – ¬ÉÐ $(t_1 - t_0)$ ¸¡Ä «ÇÅ¢üÌò Ð¸Ç¢ý §Áø ¦ºÂüÀÎÁ¡Â¢ý, Ññ¸½¢¾ Ó¨ÈÂ¢ø, $\underline{F} - = \frac{d}{dt}(m\underline{v})$ ±ýÛõ ºÁýÀ¡ð¨¼ò ¦¾¡¨¸Â¢Îõ§À¡Ð,

$$\underline{I} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(m\underline{v}\right) dt$$

$$= \int_{\underline{v_0}}^{\underline{v_1}} d\left(m\underline{v}\right)$$

$$= m\underline{v_1} - m\underline{v_0}$$

±ýÀÐ ¯ó¾Á¡üÈÁ¡Ìõ.

±É§Å, ¯ó¾Á¡üÈò¾¡ø, ¾¡ì¸Ç¨Å «ÇÅ¢¼ôÀÎõ ±ýÀÐ ¸¢¨¼ì¸¢ÈÐ. ¬¸§Å, ¿¢äð¼É¢ý þÃñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ìÌô À¢ýÅÕõ ÅÊÅò¾¢ø Å¢Çì¸õ ¦¸¡Îì¸Ä¡õ.

¦¸¡Îì¸ôÀð¼ ´Õ §¿Ãò¾¢ø, Ð¸¦Ç¡ýÈ¢ý ¯ó¾Á¡üÈõ, «¾¨É Å¢¨ÇÅ¢ìÌõ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¡ì¸Ç¨ÅìÌî ºÁÉ¡ö, «§¾ ¾¢¨ºÂ¢Ä¢ÕìÌõ.

4.5.4 Ð¸û ´ýÈ¢ý Å¢¨ºò¦¾¡Ì¾¢ ´ýÚ ¦ºÂüÀÎõ§À¡Ð, ¾¡ì¸Ç¨Å ¯¾ò ¾òÐÅò¨¾ Å¢ÇìÌ¾ø.

m ¿¢¨ÈÔ¨¼Â Ð¸û ´ý $\{\underline{F_i}\}, i = 1, 2, ...u$ ±ýÛõ Å¢¨º¸û ¦ºÂüÀÎÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ÌÀÂ¨É, $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_1}$ ±ýÛõ ¾¢¨ºÂ¢ Å¨ÃÂÚìÌõ.

¿¢äð¼É¢ý þÃñ¼¡ÅÐ Å¢¾¢ôÀÊ,

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = ma$$ ¬Ìõ.

«ùÅ¢¨ºò ¦¾¡Ì¾¢ Ð¸Ç¢ø $(t_1 - t_0)$ ¸¡Ä «ÇÅ¢üÌî ¦ºÂüÀÎÁ¡Â¢ý, Ññ¸½¢¾ Ó¨ÈÂ¢ø,

$$\underline{I} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{R} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} m\,\underline{a} dt$$

«¾¡ÅÐ

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \underline{F_i} dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\underline{v}}{dt} dt$$

$$= \int_{v_0}^{v_1} m d\underline{v}$$

« ¾¡ÅÐ

$$\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_1 = m\underline{v}_1 - m\underline{v}_0$$ = ¯ó¾ Á¡üÈÁ¡ Ì õ.

±É§Å, ¦¾¡ Ì ÀÂ ý Å¢¨ºÂ¢ ý ¾¡ì¸Ç¨ÅÔõ ¯ó¾Á¡üÈò¾¡ø «ÇÅ¢¼ôÀÎõ.

4.5.5. ¾¡ì¸¨Å - ¯ó¾ò ¾òÐÅî ºÁýÀ¡ðÊý ±ñ½¢ôÀ¸¢÷׸¨Çì ¸¡Ï¾ø.

$$\underline{I} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}dt = m\underline{v}_1 - m\underline{v}_0$$

Å¢¨º, ¾¢¨º§Å¸õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý À¸¢÷׸û, $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ¾¢¨º¸Ç¢ø,

$\underline{F} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ ±É×õ

$\underline{v} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$

$\underline{v} = v_X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ ±É×õ ¦¸¡ûÇôÀÎõ.

±É§Å,

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}\right)dt = m\left(V_x\underline{i} + V_y\underline{j} + V_z\underline{k}\right)$$

$$- m\left(v_{0x}\underline{i} + v_{0y}\underline{j} + v_{0z}\underline{k}\right),$$

« ¾¡ÅÐ,

$$\underline{i}\int_{t_0}^{t_1}(Xdt + \underline{j}\int_{t_0}^{t_1}Ydt + \underline{k}\int_{t_0}^{t_1}Zdt = m(v_{1x} - v_{0x})\underline{i} + m(v_{1y} - v_{0y})\underline{j} + m(v_{1z} - v_{0z})\underline{k}$$

¬Ìõ.

$$\therefore \int_{t_0}^{t_1}(Xdt = m(v_{1x} - v_{0x})$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Ydt = m(v_{1y} - v_{0y})$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Zdt = m(v_{1z} - v_{0z})$$

±ýÛõ ±ñ½¢î ºÁýÀ¡Î¸û ¸¢¨¼ì¸¢ýÈÉ.

[ÌÈ¢ô¨: ¾¡ì¸¨Å-¯ó¾î ºÁýÀ¡Î, Å¢¨ºìÌõ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢üÌõ ¯ûÇ ¦¾¡¼÷¨À ¦ÅÇ¢ôÀÎòи¢ÈÐ. «ùÅ¢¾î ºÁýÀ¡ðÊüÌò ¾¢÷׸¡½, ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨¸ $\underline{F}$ ¬ÉÐ, Á¡È¡Å¢¨ºÂ¡¸§Å¡ «øÄÐ §¿Ãò¾¢ý º¡÷ÀÄÉ¡¸§Å¡ þÕ츧ÅñÎõ.]

4.5.6. ¾¡ì¸Ç¨Å, ¯ó¾õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý À¡¢Á¡½ í¸û

¾¡ì¸Ç¨Å = ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º × «ùÅ¢¨º ¦ºÂüÀÎõ §¿Ãõ

$$\therefore [I]=[F\times T]=[FT]$$ ¬Ìõ.

§ÁÖõ, ¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ "M.K.S." Ó¨ÈÂ¢ø ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ Å¢¨º-Å¢É¡Ê «Ä¸¡ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ.

«ùÅ¡§È,

¯ó¾õ = ¿¢¨È × ¾¢¨º§Å¸õ

$$= [M]\times[L/T]$$

4.5.7 Á¡¾¢¡¢ì¸½ì Ì¸û

4.5.7.1 12 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ Å¢¨º¦Â¡ýÚ, 5 Å¢É¡Ê¸Ùì Ì, $12\underline{i}-20\underline{j}+9\underline{k}$ ±ýÛõ ¾¢¨ºÂ¢ìÌ þ¨½Â¡É ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. z — «îÍò ¾¢¨ºÂ¢ø ¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¢ý ±ñ ½¢ôÀ¸¢÷¨Åì ¸¡ñ¸.

$12\underline{i}-20\underline{j}+9\underline{k}$ ±ýÛõ ¾¢¨ºÂ¢ ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨ºÂ¢ø µÃÄÌò ¾¢¨ºÂ¢

$$\frac{1}{25}\left(12\underline{i}-20\underline{j}+9\underline{k}\right)$$ ¬Ìõ.

$$\therefore \underline{I_z}=\underline{k}\int_0^5\left(\underline{F}.\underline{k}\right)dt$$

$$=\underline{k}\int_0^5\frac{12}{25}\left(12\underline{i}-20\underline{j}+9\underline{k}\right)k.dt$$

$$=\frac{108}{25}\underline{k}\int_0^5 dt$$

$$=21.6\underline{k}$$ ¸¢.¸¢.Å¢É¡Ê

$$\therefore I_z=21.6$$ ¸¢.¸¢.Å¢É¡Ê

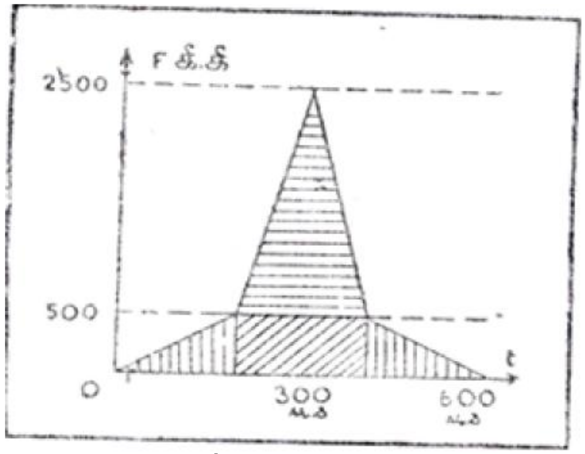
4.5.7.2 §¿Ãò¨¾î º¡÷óÐûÇ ´Õ Å¢¨ºÂ¢ý ±ñ Á¾¢ôÒ,

À¼õ (4.5.4)-ø ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú «¨Á¸¢ÈÐ. «ùÅ¢¨ºìÌ ²üÈ¾¡É ¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¢ý ±ñ Á¾¢ô¨ÀìÌ ¸¡ñ¸.

¾¡ì¸Ç¨Å = Å¢¨º º¡÷ÀÄÛìÌ ¯¡¢Â À¡¨¾, t «îÍ¼ý ²üÀÎòÐõ ÀÃôÀÇ×

$$=\left(\frac{1}{2}\times200\times500+200\times500+\frac{1}{2}\times200\times2000+\frac{1}{2}\times200\times500\right)$$ ¸¢.¸¢. ¨Áì§Ã¡ Å¢É¡Ê

= 0.4 ¸¢.¸¢. Å¢É¡Ê



À¼õ 4-5-4

4.5.7.3. 100 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ ¸ð¨¼¦Â¡ýÚ, ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.2 ±ýÚûÇ ÅÆÅÆôÀüÈ ¸¢¨¼¾Çò¾¢ø µö× ¿¢¨ÄÂ¢ÖûÇÐ. 75 ¸¢.¸¢. Å¢¨º ±ñ Á¾¢ô¨Àì ¦¸¡ñ¼ Å¢¨º ´ýÚ ¸¢¨¼ì§¸¡ðÊüÌ 30° ²üÀì §¸¡½î º¡¢Å¢ø À¼õ (4.5.5) ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, ¸ð¨¼Â¢ý §Áø 3 Å¢É¡Ê¸û ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. «ó§¿Ãò¾¢ø ¸ð¨¼ ¦ÀüÈ þÚ¾¢§Å¸õ Â¡Ð?

N ±ýÀÐ ±¾¢÷¾¡ì¸ Å¢¨º,

F = «N ±ýÀÐ ¯Ã¡ö× Å¢¨ºÂ¡Ìõ.

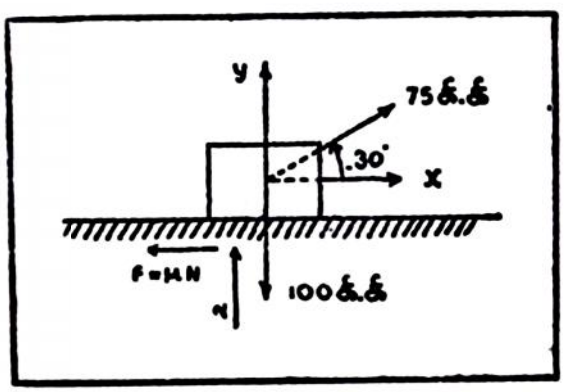
¸ð¨¼ ¸¢¨¼¾Çò¾¢ÄÂ í Ì Å¾¡ø

$\sum f_{iy} = 0$ ¬ Ìõ.

$$\therefore 75\times\frac{1}{2}-100+N=0$$

±É§Å, $N = 625$ ¸¢.¸¢. Å¢¨º

$F = N = 0.2\times 62.5$ =12.50 ¸¢.¸¢.Å¢¨º



À¼õ 4-5-5

¸¢¨¼ò¾¢¨ºÂ¢ø ¸ð¨¼Â¢ý §Áø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º

$$= 75\cos 30^\circ - «N$$

$$= 75 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 12 \cdot 50$$

$= 52 \cdot 44$ ¸¢.¸¢.Å¢¨º

$$\therefore \int_0^3 F\,dt = m v_1 - m v_0$$

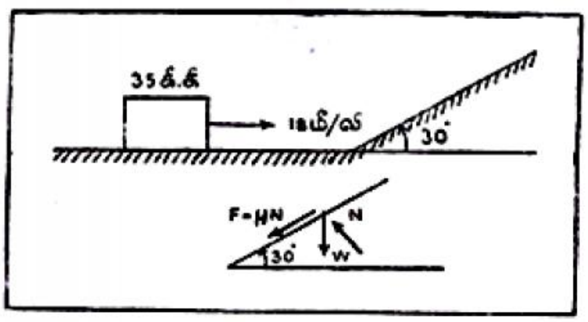
±ýÀ¾¡ø,

$$\int_0^3 52.44dt = \frac{100}{9.81} v_1 - 0$$

$$\therefore v = \frac{9.81}{100} \times 52.44 \times 3$$

$=15.44$ Á£/Å¢É¡Ê.

4.5.7.4. 35 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ ¦À¡Õ¦Ç¡ýÚ Å¢É¡ÊìÌ 18 Á£ð¼÷ §Å¸ò¾¢ø þÂí Ìõ§À¡Ð «Ð 30° ²üÈì§¸¡½îº¡¢¨Åô ¦ÀüÈ ÅÆÅÆôÀüÈ º¡ö¾Çò¨¾ «¨¼¸¢ÈÐ, ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.3 ±É¢ø, «ô¦À¡Õû º¡ö¾Çò¾¢ø µö×¿¢¨Ä¨Âô ¦ÀÚÅ¾ü Ì ±Î ì Ìõ§¿Ãõ Â¡Ð?



À¼õ 4-5-6

º¡ö¾Çò¾¢ü Ìî ¦ºí Ìò¾Ðò ¾¢¨ºÂ¢ø ¦À¡Õ Ù ì Ì þÂì¸Á¢øÄ¡ ¨ÁÂ¡ø, $\sum f_{iy} = 0$ ¬ Ìõ.

$$\therefore N - W\cos 30^\circ = 0$$

«¾¡ÅÐ,

$N = 35 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30.31$ ¸¢.¸¢

$F =$ ¯Ã¡ö× Å¢¨º

$= «N$

$= 0.3 \times 30 \cdot 31 = 9.093$ ¸¢.¸¢

t Å¢É¡Ê¸Ù ì Ì À¢ý, ¦À¡Õû º¡ö¾Çò¾¢ø µö×¿¢¨Ä¨Âô ¦ÀÚÅ¾¡¸¢ø,

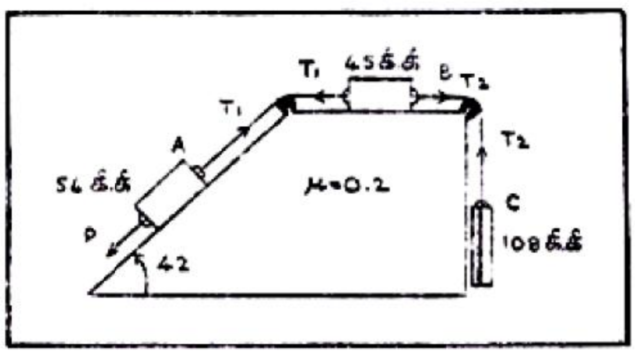
$$\int_0^t \left(-35\sin 30^\circ - 9.093\right)dt = 0 - \frac{35}{9.81}\times 18$$

$$(17.5+9.093)t = \frac{70}{1.09}$$

$$\therefore\ t = \frac{70}{1.09\times 26.593}$$

$= 2.415$ Å¢É¡Ê¸û.

4.5.7.5 108 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ ¯Õ¨Çì¸ð¨¼ ´ýÚ ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø Å¢É¡ÊìÌ 3 Á£ð¼÷ §Å¸ò¾¢ø §Áø§¿¡ì¸¢ þÂíÌ¸¢èÐ. P ±ýÛõ Á¡È¡Å¢¨º ´ýÚ À¼õ (4.5.7) ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, 20 Å¢É¡Ê¸Ç¢ø «ì¸ð¨¼ Å¢É¡ÊìÌ 6 Á£ð¼÷ §Å¸ò¨¾ô ¦ÀÚÁ¡Ú þØì¸¢èÐ. ¸ôÀ¢¸û þ§Äº¡É¨Å ±É×õ, ÁÆÁÆôÀ¡É¨Å ±É×õ, ¾Çò¾¢üÌ ²üÈ ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.2 ±É×õ, ¸Â¢Ú¸û Á£ûºì¾¢ «üÈ¨Å ±É×õ ¦¸¡ñÎ $\underline{P}$−À¢ý Á¾¢ô¨Àì ¸¡ñ¸.



À¼õ 4-5-7

¸Â¢Ú¸û Á£ûºì¾¢ «üÈ¨Å¸Ç¡É¾¡ø, ãýÚ ¦À¡Õû¸Ùõ, ±ó§¿Ãò¾¢Öõ, ´§Ã «Ç×ûÇ §Å¸ò¨¾ô ¦ÀÈò¾ì¸¨ÅÂ¡Ìõ.

§ÁÖõ ¸ôÀ¢¸û þ§Äº¡¸×õ, ÁÆÁÆôÀ¡É¾¡¸×õ ¯ûÇ¾¡ø, ¸ôÀ¢¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢ý þÕÒÈí¸Ç¢Ä¨ÁÔõ ¸Â¢Ú¸Ç¢ø ¦ºÂüÀÎõ þØÅ¢¨º¸Ùõ ºÁÁ¡Ìõ.

±É§Å, $T_1 = T_2$ þõ ãýÚ ¦À¡Õû¸¨Çò ¾É¢ôÀÎò¾¢Â «¨ÁôÒ À¼õ (4.5.8) ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ.

´ù¦Å¡Õ ¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸ò¾¢üÌ ²üÈ¾¡É, ¾¡ì¸¨Å ¯ó¾îºÁýÀ¡Î À¢ýÅÕÁ¡Ú.

¸ ð ¨ ¼ A:

$$=\left[P+54\sin 42^{\circ}-0.2\left(54\cos 42^{\circ}\right)-T_1\right]\times 20$$

$$=\frac{54}{9.81}(6-3)$$

¸ ð ¨ ¼B:

$$\left[T_1\text{-}T_2-0.2(45)\right]\times 20=\frac{45}{9.81}(6-3),$$

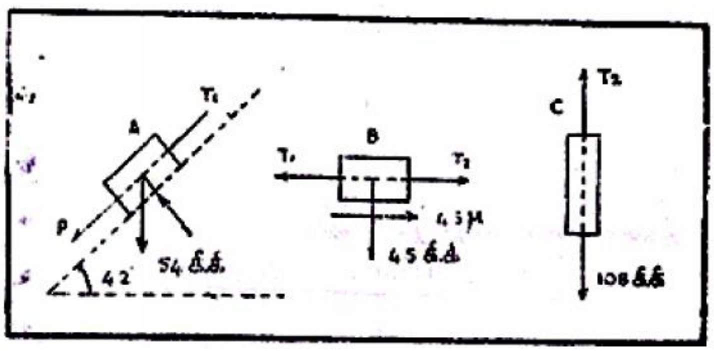
¸ ð ¨ ¼ C:

$$\left[T_2-108\right]\times 20=\frac{108}{9.81}(6-3),$$

þõã ýÚ ºÁýÀ¡ Î ¸ ¨ ÇÔõ Üð¼

$$\left[P+54\sin 45^{\circ}-0.2(54\cos 45^{\circ})-9-108\times 20\right]$$

$$=\frac{\left(54+45+108\right)}{9.81}\times 3$$



À¼õ 4-5-8

« ¾¡ÅÐ,

$$(P+36\cdot 130-8.026-9-108)\times 20$$

$$=\frac{207\times 3}{9.81}$$ ¸¢.¸¢. Å¢¨º

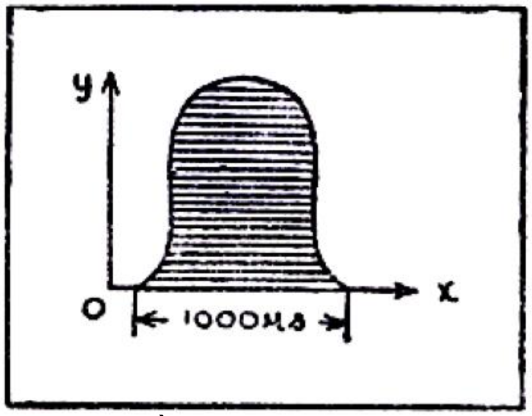
$$\therefore\ P-88.896=3.120$$

$$\therefore\ P=3.120+88\cdot 896=92.016$$

P =3.120 +88896= 92.016

4.5.8 ÀÂ¢üº¢

4.5.8.1 ´Õ Å¢¨º 1000 ¨Áì§Ã¡Å¢É¡Ê¸Ç¢ø, À¼õ (4.5.9)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, 500 ¿¢äð¼ý-Å¢É¡Ê «Ç×ûÇ ¾¡ì¸Ç¨Å¨Â ²üÀÎò¾¢ÔûÇÐ ±É¢ø, «ùÅ¢¨ºÂ¢ý º¡º¡¢ ±ñ Á¾¢ôÒ Â¡Ð?
[Å¢¨¼: 5×10^5 ¿¢äð¼ý]



À¼õ 4-5-9

4.5.8.2 ´Õ ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÔûÇ Ð¸¦Ç¡ýÚ ¦¾¡¼ì¸ôÒûÇ¢Âø µö×¿¢¨ÄÂ¢ÖûÇÐ. §¿Ãò¨¾î º¡÷óÐÁ¡Èì ÜÊÂ $\underline{F}=t^2\underline{i}+(6t+10)\underline{j}+1.6t^3\underline{k}$ ¸¢.¸¢ ±ý Ûõ Å¢¨º «¾ý§Áø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. 5 Å¢É¡Ê¸û ¦ºýÈÀ¢ý, Ð¸Ç¢ø ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.
[Å¢¨¼: $(41.666\underline{i}+125\underline{j}+250\underline{k})$ Á/Å¢É¡Ê]

4.5.8.3 3.27 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ Ð¸¦Ç¡ýÈ¢ø, $\underline{F}=t^2\underline{i}-2\underline{j}+0.4t\underline{k}$ ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ Å¢¨º ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. §¿Ãõ t=3 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð, Ð¸Ç¢ÉÐ, $\underline{v_0}=(3\underline{i}-2\underline{j}+\underline{k})$ Á / Å¢É¡Ê ±ý Ûõ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ô ¦ÀüÚûÇÐ. t = 3 Å¢É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð, «¾ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.
[Å¢¨¼: $(30\underline{i}-20\underline{j}+6.4\underline{k})$ Á/Å¢É¡Ê]

4.5.8.4 98.1 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ ¸ð¨¼¦Â¡ýÚ, ÁÆÁÆôÀ¡É ¸¢¨¼ò¾Ç¦Á¡ýÈ¢ø µö×¿¢¨ÄÂ¢ÖûÇÐ. «¾ý§Áø $(10-2t)$ ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ Å¢¨º ´ýÚ, ¸¢¨¼ò¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎ¸¢ÈÐ. «òÐ¸û ±ó§¿Ãò¾¢ø, Á¢¸ô¦À¡¢Â §Å¸ò¨¾ô¦ÀÚõ?«ô§À¡Ð «¾ý §Å¸ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.
[Å¢¨¼: 5 Å¢É¡Ê¸û : ¯îº§Å¸õ = Á/Å¢É¡Ê]

4.5.8.5 3 ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ¿¦¨ÈÔûÇ Ð¸û ´ýÈ¦ý§Áø, $14t^2$ ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ±ñÁ¾¦ôÒûÇ Å¦¨º ´ýÚ, $(3\underline{i}-6\underline{j}+2\underline{k})$ ±ýÛõ ¾¦¨ºÂ¦ìÌ þ¨½Â¡¸î ¦ºÂøÀÎ¸¦ÈÐ. t = 0 ±ýÛõ §¿Ãò¾¦ø, $(6\underline{i}+9\underline{j}+5\underline{k})$ Á¦ð¼÷ ¾¦¨º§Å¸ò¾¦ø þÂí Ì ¦ÁÉ¦ø, t = 3 Å¦É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð, «¾ý ¾¦¨º§Å¸õ Â¡Ð?

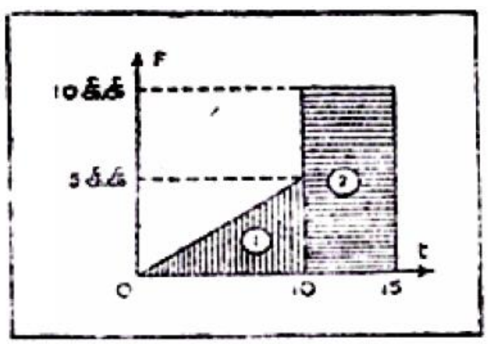
[Å¦¨¼: $(182\cdot58\underline{i}-344\cdot16\underline{j}+122\cdot72\underline{k})$ Á¦/Å¦É¡Ê]

4.5.8.6. 50 ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ¿¦¨ÈÔ¨¼Â Ð¸û ´ýÈ¦ø, t Å¦É¡Ê §¿Ãò¾¦ø ¦ºÂøÀÎõ $\left(1.5696\underline{i}-1.5\underline{j}+2.7468\underline{k}\right)$ Å¦¨ºò¦¾¡ Ì¾¦Â¦ý Å¦¨Ç× Å¦¨º $\underline{F}=3t^2\underline{i}-7\underline{k}$ ¸¦.¸¦. Å¦¨ºÂ¡ Ìõ. §¿Ãõ t = 0 ±ýÚûÇ§À¡Ð, Ð¸û $\underline{V_n}=1.5\underline{j}$ Á¦/Å¦É¡Ê ±ýÛõ ¾¦¨º§Å¸òÐ¼ý þÂí Ì¸¦È¦¾É¦ø, t = 2 Å¦É¡ÊÂ¡¸ ¯ûÇ§À¡Ð, «¾ý ¾¦¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

[Å¦¨¼: Á¦/Å¦É¡Ê]-

4.5.8.7. µö×¿¦¨ÄÂ¦ÖûÇ Ð¸¦Ç¡ýÈ¦ý§Áø, §¿Ãò¨¾î º¡÷óÐ Á¡Úõ Å¦¨º ´ýÈ¦ý «¨Áôô, À¼õ (4.5.10) ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ûÇÐ. Ð¸Ç¦ý ¿¦¨È 3 ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ±É×õ «Ð ´Õ §¿÷ì§¸¡ðÊø, Å¦¨º ¦ºÂüÀÎõ ¾¦¨ºÂ¦§Ä§Â ¿¸÷Å¾¡¸×õ ¦¸¡ñ Î, 15 Å¦É¡Ê¸Ç¦ø «Ð ¦ÀÚõ §Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

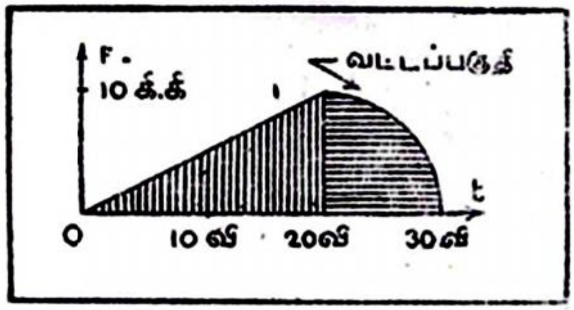
[Å¦¨¼ : $(1\cdot5696\underline{i}-1\cdot5\underline{j}+2\cdot7468\underline{k})$ Á¦/Å¦É¡Ê]



À¼õ 4- 5-10

4.5.8.8 ´Õ ÌÈ¦ôÀ¦ð¼ ¾¦¨ºÂ¦ø ¦ºÂüÀÎõ Å¦¨º ´ýÚ 2 ¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ¿¦¨ÈÂô¦ÀÚÈ Ð¸û ´ý¨È. «Ð µö× ¿¦¨ÄÂ¦ø ¯ûÇ§À¡Ð ¾¡ìÌ¸¦ÈÐ. «ùÅ¦¨ºÂ¦ý ¾¡ì¸Ç¨Å Á¾¦ôÒ, À¼õ (4.5.11)-ø ¸¡ðÊÔûÇ ÀÃôÀÇÅ¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ ±É¦ø, 30 Å¦É¡Ê¸û ¦ºýÈÀ¦ý, Ð¸û¦ÀÚõ §Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

[Å¦¨¼: 89.27 Á¦/Å¦É¡Ê]



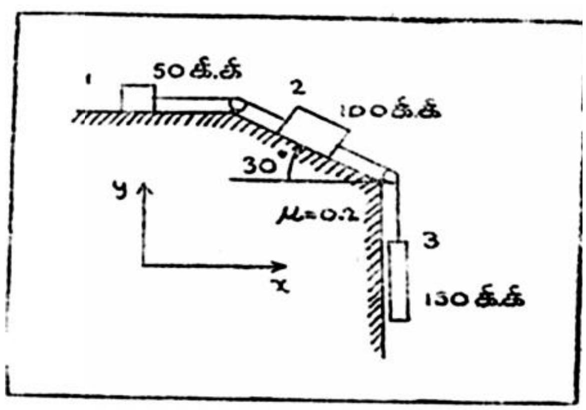
À¼õ 4-5-11

4.5.8.9 À¼õ (4.5.12)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, ¦À¡Õð¦¼¡Ì¾¢ ´ýÚ, µö× ¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ ÒÈôÀðÎ 10 Å¢É¡Ê¸û ¦ºýÈ À¢ý, «ÅüÈ¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

4.5.8.8 ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎõ Å¢¨º ´ýÚ 2 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÂô¦ÀüÈ Ð¸û ´ý¨È. «Ð µö× ¿¢¨ÄÂ¢ø ¯ûÇ§À¡Ð ¾¡ì Ì¸¢ÈÐ. «ùÅ¢¨ºÂ¢ý ¾¡ì¸Ç¨Å Á¾¢ôÒ, À¼õ (4.5.11)-ø ¸¡ðÊÔûÇ ÀÃôÀÇÅ¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ ±É¢ø, 30 Å¢É¡Ê¸û ¦ºýÈÀ¢ý, Ð¸û¦ÀÚõ §Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

[Å¢¨¼: 89.27 Á/Å¢É¡Ê]

4.5.8.9 À¼õ (4.5.12)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú, ¦À¡Õð¦¼¡Ì¾¢ ´ýÚ, µö× ¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ ÒÈôÀðÎ 10 Å¢É¡Ê¸û ¦ºýÈ À¢ý, «ÅüÈ¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.



À¼õ 4-5-12

¸õÀ¢¸û Áûºì¾¢ÂüÈ¨Å ±É×õ, ¸õÀ¢¸û ÁÆÁÆôÀ¡É ¨Å ±É×õ ¦¸¡û¸.
[Å¢¨¼: 56.45Á/Å¢É¡Ê]

4.5.9 ¸½ò¾¡ì Ì Å¢¨º¸û (Impulsive Forces) m ¿¦¨ÈÔ¨¼Â ¦À¡Õû ´ýÈ¦ý Á¦Ð P - ±ýÛõ Å¦¨ºÂ¡ÉÐ, T §¿Ãò¾¦ü Ìò ¾¡ì ÌÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. þó¾ §¿Ãò¾¦ý ¦¾¡¼ì¸ò¾¦Öõ þÚ¾¦Â¦Öõ «ô¦À¡ÕÇ¦ý §Å¸í¸û Ó¨È§Â v_1, v_2 ±É ì ¦¸¡û¸.

$$Pt = m(v_2 - v_1)$$

¸¡Äò¨¾î º¦È¦¾¡ì¸¦ì¦¸¡ñ Î Å¦¨º¸¨Çô ¦À¡¦¾¡ì¸¦ì ¦¸¡ñ Îõ ¦ºøÖõ§À¡Ð, «ÅüÈ¦ý ¦ÀÕì¸õ ÓÊ×ûÇ¾¡¸ þÕì¸ìÜ Îõ. «ò¾¨¸Â Á¦ô¦ÀÕ Å¦¨ºÂ¦ý Å¦¨Ç×, «ùÅ¦¨º Å¦¨ÇÅ¦ìÌõ ¯ó¾Á¡üÈò¾¡ø «È¦ÂôÀÎõ. ¬¸§Å, ÌÚ¸¦Â ¸¡Äò¾¦ø ¦ºÂüÀÎõ Á¦ô¦ÀÕÅ¦¨ºÂ¡ÉÐ ¸½ò¾¡ìÌ Å¦¨º ±ÉôÀÎõ.

Å¨ÃÂ¨È
´Õ ¸½ò¾¡ìÌ Å¦¨º ´Õ Á¦¸îº¦È¦Â §¿Ãò¾¦§Ä ¾¡ìÌ¸¦ýÈ ´Õ Á¦¸ô¦À¡¦Â Å¦¨ºÂ¡Ìõ. ¬Â¦Ûõ. «ùÅ¦¨º ´Õ Ð¸Ç¦ýÁ¦Ð ¾¡ìÌõ §¿Ãò¦ø «òÐ¸Ç¦ý ¿¦¨ÄÁ¡üÈõ (change in position) ÒÈì¸½¦ì¸ôÀ¼Ä¡õ. «¾ý ÓØÅ¦¨Ç×õ «¾ý ¯ó¾Á¡üÈò¾¡ø «ÇÅ¦¼ôÀÎõ.

¯ñ¨ÁÂ¦ø «ò¾¨¸Â ÓÊÅ¦üÌ Á¦¸ììÚ¸¦Â ´Õ ¸¡Äò¾¦üÌ ¾¡ìÌ¸¦ýÈ ´Õ Å¦¨º¨Âô ¦ÀÚÅÐ ÓÊÂ¡¾¾¡Ìõ. ¬Â¦Ûõ ºõÁðÊÂ¡ø ¦¸¡Îì¸ôÀÎõ ¾¡ìÌ, ¸¦¡¦ì¦¸ð Àó¾¦ý Á¦Ð Àó¾Êì Ìõ Áð¨¼ ¦¸¡Îììõ «Ê ¬¸¦Â¨Å «ò¨¾¸Â ¸½ò¾¡ìÌ Å¦¨º¸¨Çô ¦À¡¦Ðõ ´ò¾Õì¸ìÜÊÂ ±ÎòÐì¸¡ðÎ¸Ç¡Ìõ.

4.5.10 þÕ ÁÆÁÆôÀ¡É ¦À¡Õû¸Ç¦ý §Á¡Ð¨¸

A, B ±ýÛõ þÕ ¦À¡Õû¸û ´ý§È¡¦¼¡ýÚ §Á¡Ðõ§À¡Ð ¿¦äð¼É¦ý ãýÈ¡ÅÐ þÂì¸Å¦¾¦ôÀÊ, «¨Å ´ý¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡Îõ ´ù¦Å¡Õ ¸½ò¾¦Öõ, B Â¦ý ÁÐûÇ A ý ¾¡ì¸Ç¨Å, A Â¦ý ÁÐûÇ B Â¦ÉÐ ¾¡ì¸Ç¨Åì ÌÆ Ì î ºÁÛ¦Á¾¦ÕÁ¡Â¦Õì Ìõ. þ¾¦Ä¦Õó B Â¦ÉÐ ¯ó¾Á¡üÈõ, A Â¦ÉÐ ¯ó¾Á¡üÈò¾¦ü Ìî ºÁÛ¦Á¾¦ÕÁ¡ÔÁ¦Õì Ì¦Áý ÀÐ ¦ÀÈôÀÎõ. ¬¸§Å þùÅ¦¾¦ Á¡üÈí¸Ç¦ý ¦Á¡ò¾õ, ¦À¡Ðî ¦ºí§¸¡¦ðÎ ¾¦¨ºÂ¦ø «Çì¸ôÀÊý âî¦ºÂ¡Ìõ. ±É§Å «ùÅ¦Õ ¦À¡Õû¸Ù¨¼Â ¯ó¾¦Á¡ò¾õ ´§Ã ¾¦¨ºÂ¦ø «ÅüÈ¦ý §Á¡¾¨Ä¸Â¡ø Á¡È¡Ð. «¾¡ÅÐ $mu + mu' = mv + mv'$ þîºÁýÀ¡Î, '§¿÷§¸¡ð¼ ¯ó¾ì ¸¡ôÒÅ¦¾¦' ±É ìÜÈôÀÎõ.

4.5.11 ´Õ Ì ñ Î ‚ÐôÀ¡ì¸¦ ¬¸¦ÂÅüÈ¦ý þÂì¸õ

´Õ ÐôÀ¡ì¸¦ ¦ÅÊ Ì ñ ¨¼î Í Î¸¦ÈÐ. «ô¦À¡ØÐ «¾Ûû þÕìÌõ àû ¾¦Ë¦ÃÉ Á¦¸×Â÷ó¾ «Øò¾ò¾¦ø Å¡äÅ¡¸ Á¡È¦ò¾ý Å¦¦Å¡ø «¾üÌûÇ Ì ñ ¨¼ ¦ÅÇ¦§Â ¦ºÖòÐ¸¦ÈÐ. «ì Ì ñ Î ÐôÀ¡ì¸¦¨ÂÅ¦ð Î ¦ÅÇ¦ì¸¦Ç õÒ Óý Â¡§¾¡Û ¦Á¡Õ ¸½ò¾¦ø «¾ýÁÐ ÓüÀì¸Á¡¸ ²üÀð¼ Å¦¨º «òÐôÀ¡ì¸¢Â¢ý ÁÐ À¢üÀì¸Á¡¸ ²üÀð¼ Å¢¨ºìÌî ºÁÛ¦Á¾¢ÕÁ¡Â¢ÕìÌõ. ¬¸§Å, «ìÌñÊý ÁÐûÇ þùÅ¢¨ºÂ¢ý ¾¡ìÌ, «òÐôÀ¡ì¸¢Â¢ý ÁÐûÇ Å¢¨ºÂ¢ý ¾¡ìÌìÌî ºÁÉ¡¸×õ, ±¾¢Ã¡¸×õ þÕìÌõ. ±É¢ý, «ìÌñÊø À¢Èì¸ôÀð¼ Óý§É¡ì¸¢Â ¯ó¾õ, ÐôÀ¡ì¸¢ þÂíÌÁ¡Ú ¸ðÊýÈ¢ ¿¢ýÈ¡ø, «Ð ÐôÀ¡ì¸¢Â¢ø À¢ÈôÀ¢ì¸ôÀð¼ À¢ý§É¡ì¸¢Â ¯ó¾ò¾¢üÌî ºÁÛ¦Á¾¢ÕÁ¡Â¢ÕìÌõ.

Ìñ Î, ÐôÀ¡ì¸¢ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¿¢¨È¸û Ó¨È§Â m m_s ¬¸×õ, Ìñ Î ¦ÅÇ¢§Â ÀÈìÌõ Ó¸ôÒ §Å¸õ v_s ¬¸×õ, ÐôÀ¡ì¸¢Â¢ý À¢ýÛ¨¾ôÒ §Å¸õ À¢ýÛ¨¾ôÒ §Å¸õ v_g ¬¸×Á¢Õó¾¡ø, §¿÷ì§¸¡ðÎ ¯ó¾ì¸¡ôÒ Å¢¾¢Â¢ýÀÊ $m_s v_s + m v_g = 0$ ¬É¡ø ÐôÀ¡ì¸¢ì ÌÆ¡ö §Áø§¿¡ì¸¢î º¡¢Å¡¸ ¨Åì¸ôÀðÊÕó¾¡ø, ÐôÀ¡ì¸¢Â¢Ûû ÙÕõ Ì½ò¾¢ý ¯ó¾ò¾¢üÌî ºÁÉ¡Ôõ, ±¾¢Ã¡ÔÕõ þÕì¸¡Ð. ÐôÀ¡ì¸¢Â¢ý ¸¢¨¼Á¼ð¼¾¢¨º¢Âø ¯ûÇ ¯ó¾õ. Ìñ Êý ¸¢¨¼Á¼ò¾¢¨ºÂ¢ø ¯ûÇ ¯ó¾ò¨¾§Â º¡¢ì¸ðÎõ. §ÁÖõ, ÐôÀ¡ì¸¢ìÌì ¦¸¡Îì¸ôÀð¼ ²§¾Û¦Á¡Õ ¿¢¨ÄìÌòÐ ¯ó¾Á¡ÉÐ, «Ð ¿¢üÌõ ¾Çò¾¢ýÁÐ ²üÀÎõ ¸½ò¾¡ìÌ «Øò¾ò¾¡ø ®Î ¦ºöÂôÀÎõ.

4.5.12. Á¡¾¢¡¢ì¸½ìÌ¸û

4.5.12.1 50 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ ÐôÀ¡ì¸¢ Ã¨Å ¸¢¨¼Â¡¸ Å¢É¡Êì Ì 81 Á£ð¼÷ §Å¸òÐ¼ý ÅÆÅÆôÀ¡É ¸¢¨¼§Á¨ºÂ¢ý ÁÐûÇ 4 ¸¢.¸¢ ¿¢¨È¦¸¡ñ¼ ´Õ ÁÃì¸ð¨¼Ìû ° ÎÕ×Á¡Ú Í¼ôÀÎ¸¢ÈÐ. «ó¾ Ã¨Å ÁÃì¸ð¨¼Ìû Ò¨¾óÐ ÁÃì¸ð¨¼Â¢ý §Å¸¦Áý É?

ÐôÀ¡ì¸¢Ã¨Å ÁÃì¸ð¨¼Ìû Ò¨¾ó¾À¢ý, «¨ÅÂ¢Ãñ Îõ ´§Ã ¦À¡ÕÇ¡¸ v ±ýÛõ §Å¸òÐ¼É¢Â¢Âí ÌÅ¾¡¸ì¦¸¡û¸. §Á¡Ð¨¸Â¡ø ¦Á¡ò¾ ¯ó¾ò¾ø Á¡ÚÀ¡Î ²Ðõ þøÄ¡¾¾¡ø, §Á¡Ð¨¸ìÌ Óý ÛûÇ ¦Á¡ò¾ ¯ó¾õ = §Á¡Ð¨¸ìÌô À¢ýÛûÇ ¦Á¡ò¾ ¯ó¾õ ¬Ìõ.

$$\frac{50\times 81}{1000} + 4\times 0 = \left(\frac{50}{1000} + 4\right) v$$

$v = 1$ Á£ð¼÷/Å¢É¡Ê.

4.5.12.2 20 ¦Áð¡¢ì ¼ý¸û ¿¢¨ÈÔ¨¼Â ´Õ ÀÃí¸¢Â¡ÉÐ 40 ¸¢.¸¢. ¿¢¨ÈÔ¨¼Â ÐôÀ¡ì¸¢ìÌñ ¨¼ Å¢É¡Êì Ì 350 Á §Å¸ò¾¢ø Í Î¸¢ÈÐ. «¾ý À¢ýÉ¨¼ôÒ 2 ¦Áð¡¢ì ¼ý¸û ±¨¼ìÌî ºÁÁ¡É Å¢¨ºÂ¢É¡ø ¾¨¼ôÀð¼¡ø, «ôÀÃí¸¢ ±ò¾¨É ¦¾¡¨Ä× À¢ýÉÊìÌõ?

ÀÃí¸¢Â¢ý À¢ýÉÊôÒ §Å¸õ u ±É¢ø,

$$20 \times 1000 \times u = 40 \times 350$$

$$\therefore\ u = \frac{7}{10}$$ Á/Å¢É¡Ê

$$\therefore\ 0 - \frac{1}{2} \times \frac{20 \times 1000}{9.8} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = -2 \times 1000s$$

¬üÈø §¸¡ðÀ¡ðÊýÀÊ, ÀÃí¸¢Â¢ý þÚ¾¢ þÂì¸ ¬üÈø-ÀÃí¸¢Â¢ý ¦¾¡¼ì¸ þÂì¸ ¬üÈø = À¢ý ÉÊôÒ Å¢¨º ¦ºö¾ ±¾¢÷§Å¨Ä.

$$\therefore s = 25$$ ¦º.Á.

4.5.12.3 5000 ¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ ´Õ ÀÃí¸¢Ì ñ Î, Å¢É¡Ê¸û 500 Áð¼÷ §Å¸ò§¾¡Î ¦ÅÊì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. «¾ý þÂì¸ ¬üÈ¨Ä ±÷ì Ì¸Ç¢ø ¸¡ñ¸. «ôÀÃí¸¢ì Ì 100 ¸¢.¸¢. ¿¢¨ÈÔõ þÂí Ì Å¾ü Ì ì ¸ðÊý ¨ÁÔõ (Free of Recoil) ¯ñ ¦¼É¢ý, «¾ý À¢ý ÉÊôÒ ¬üÈ¨Äì ¸¡ñ ¸.

ÀÃí¸¢ì Ì ñ Êý þÂì¸ ¬üÈø

$$= \frac{1}{2} \times 5000 \times 500 \times 500 \times 10^4$$

$$= 625 \times 10^{10}$$ ±÷ì Ì ¸û

ÀÃí¸¢Â¢ý À¢ý ÉÊôÒ §Å¸õ u ¬ Ìõ.

$\therefore$ ¯ó¾ì ¸¡ôÒ Å¢¾¢ôÀÊ.

$$5000 \times 500 \times 100 = 100 \times 1000 \times u$$

$$\therefore u = 2500$$ ¦º.Á / Å¢É¡Ê

ÀÃí¸¢Â¢ý À¢ý ÉÊôÀ¡üÈø

$$\frac{1}{2} \times 100 \times 1000 \times 2500 \times 2500$$

$$= 3125 \times 10^8$$ ±÷ì Ì ¸û.

4.5.12.4 Å¢É¡ÊìÌ 28 Áð¼÷ ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý ¸¢¨¼Â¡¸ þÂí Ìõ 155 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ ¸¢¡¢ì¦¸ð ÀóÐ §¿Ã¡¸ Å¢É¡ÊìÌ 16 Áð¼÷ ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý ¾¢ÕôÀ¢ «ÊìÌ¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. Àó¾ÊìÌõ Áð¨¼ Àó¨¾ò ¦¾¡Îõ§¿Ãõ $\frac{1}{18}$ Å¢É¡Ê¦ÂÉ¢ø Àó¾ÊìÌõ Áð¨¼ ¦ºÄøÀÎòÐõ ºÃ¡º¡¢ ¸½ò¾¡ìÌ Å¢¨º¨ÂÌ ¸¡ñ ¸.

P ±ýÀÐ Àó¾Êì Ì õ Áð¨¼, Àó¾¢ý §Áø ¦ºÂøÀÎòÐõ ºÃ¡º¡¢ ¸½ò¾¡ì Ì Å¢¨ºÂ¡ Ì ¸. «ùÅ¢¨ºÂ¢ý ¸½ò¾¡ì ¸õ I ±É¢ø

$I=$ ¯ó¾Á¡üÈõ $=155\left[2800-\left(-1600\right)\right]$

$= 155 \times 4400$ ¸¢Ã¡õ ¦º.Á¦.

¬É¡ø $I = Pt$

$$\therefore\ P = \frac{I}{t} = \frac{155\times 4400}{\left(\frac{1}{18}\right)} = 18\times 155\times 4400$$

¨¼ý ¸û

$$= \frac{18\times 155\times 4400}{981}$$ ¸¢Ã¡õ ±¨¼

$=12.513$ ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼

4.5.12.5 12 ¦Áð¡¢ì¼ý ¸û ¿¢¨ÈÔûÇ ÐôÀ¡ì ¸¢, 25ì Ì 7 ±ýÛõ ´Õ ÅÆÅÆôÀ¡É º¡¢Åý ¸¦úôÀÌ¾¢Â¢ø Óð Î ¸Ç¢ý ¯¾Å¢Â¡ø µöÅ¢ø þÕì¸¢ÈÐ. «Ð 50 ¸¢.¸¢. ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ Ì ñ ¨¼ Å¢É¡Ê¸û 240 Á¦ð¼÷ ±ýÛõ §Å¸ò§¾¡ Î ¸¢¨¼Â¡¸ î Íð Î î º¡¢Å¢ø À¢ý ÉÊò¾Ð. «Ð º¡¢Å¢ø ±ò¦¾¡¨Ä× À¢ý ÉÊì Ì õ?

ÐôÀ¡ì ¸¢Â¢ý À¢ý ÉÊôÒ §Å¸õ Å¢É¡Êì Ì v ±Éì ¦¸¡û¸. Ì ñ Êý ¯ó¾õ ÐôÀ¡ì ¸¢Â¢ý ¸¢¨¼Áð¼ò¾¢¨ºÂ¢ø ¯ûÇ ¯ó¾ò¨¾Î º¡¢ì ¸ð Î õ. §ÁÖõ º¡ö¾Çì§¸¡½õ ~ ±É¢ø, ÐôÀ¡ì ¸¢Â¢ý ¸¢¨¼ò¾¢¨º§Å¸õ $v\cos\sim$ ¬ Ì õ. ±É§Å ¯ó¾ì§¸¡ðÀ¡ðÊýÀÊ,

$$50\times 240\times = 10\times 1000\times v\cos\sim\ = 10\times 1000\times v\times\frac{24}{25}$$

$\therefore v = 125$ ¦º.Á¦/Å¢É¡Ê.

«Ð À¢ý ÉÊòÐî ¦ºøÖõ ¦¾¡¨Ä× s ¦º.Á¦. ¬ Ì õ.

$$\therefore\ 0^2 = 125^2 - 2\times 981\times\frac{7}{25}s$$

$$= -g\sin\sim\ = -981\times\frac{7}{25}$$

º¡¢Å¢ø ÒÅ¢Â¢÷ôÒ Ó Î ì ¸õ $\therefore s = 28.44$ ¦º.Á¦.

4.5.12.6 M ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ ÐôÀ¡ì¸¢ m ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ Ì ñ ¨¼ ¸¢¨¼Â¡¸î Í Î ¸¢ÈÐ. ¦ÅÊÂ¢ý ¬üÈø Ì ñ ¨¼ ¿¢¨Äì Ìò¾¡¸ h ¯ÂÃò¾¢ü Ì î ¦ºÖò¾ì Ü Î õ ±É¢ý. ÐôÀ¡ì¸¢Â¢ý À¢ý ÉÊôÒ §Å¸õ

$$\left[\frac{2m^2gh}{M(M+m)}\right]^{\frac{1}{2}}$$ ±É ì ¸¡ð Î ¸.

ÐôÀ¡ì¸¢Â¢ý À¢ý ÉÊôÒ §Å¸õ, Ì ñ Êý Óý§É¡ì¸¢Â §Å¸õ ¬¸¢Â ¨Å Ó ¨È§Â u,v ¯ó¾ì§¸¡ðÀ¡ðÊýÀÊ

$$Mu = mv$$

¦ÅÊÂ¢ý ¦Á¡ò¾ þÂì¸ ¬üÈø

$$= \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}M.\frac{m^2v^2}{M\ 2} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m}{M}+1\right) = \frac{1}{2}\frac{m(M+m)}{M}v^2$$

þùÅ¡üÈø Ì ñ ¨¼¿¢¨Äì Ìò¾¡¸ h ¯ÂÃò¾¢ü Ì î ¦ºÖòÐÅ¾¡¸¢ø

$$\frac{1}{2}(m/M)(M+m)v^2 = mgh$$

$$\therefore v^2 = \frac{2Mgh}{M+m}; \therefore v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$$

$u=$ ÐôÀ¡ì¸¢Â¢ý À¢ý ÉÊôÒ §Å¸õ

$$= \frac{mv}{M} = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}}$$

4.5.12.7 M ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ ºõÁðÊ h Á¦ð¼÷ ¯ÂÃò¾¢Ä¢ÕóÐ m ¸¢.¸¢. ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ À¾¢¸¡ø à ½¢ý (Pile) ¯î º¢ì Ì §Áø Å¢ØóÐ «¾¨É ¿¢Äò¾¢ü Ì û§Ç 'a' Á¦ð¼÷ ¬Æõ ¦ºÖòÐ¸¢ýÈÐ. ¿¢Äò¾¨¼¨Â (Ground Resistance) Á¡È¢Ä¢Â¡¸ ×õ, À¾¢¸¡ø à ñ Á¦ûº ì¾¢ÂüÈ¾¡¸×õ ¦¸¡ ñ Î ¿¢Äò¾¨¼¨Âì ¸¡ ñ ¸. §ÁÖõ À¾¢¸¡ø à ñ þÂì¸ò¾¢Ä¢ÕóÐ¾ §¿Ãò¨¾Ôõ, §Á¡Ð ¨¸Â¢Öû Ç þÂì¸Å¡üÈÄ¢Æô¨

«ô¦À¡ØÐ, $u^2 = 2gh.$

§Á¡Ð ¨¸ì Ì ôÀ¢ý ºõÁðÊ, À¾¢¸¡ø à ñ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý §Å¸õ v ¬ Ì õ. ¯ó¾ì§¸¡ðÀ¡ðÊýÀÊ

$$(M+m)v = Mu\cdots\cdots(1)$$

¿¡Äò¾¨¼ P ¿¡ä ð¼ý ¸¦ÇÉ¡ø, À¾¡¸¡ø à ñ ¿¡Äò¾¡ü Ì û ¦ºøÅ¨ ¾ò ¾Î ì Ì õÅ¡¨ o $= P-(M+m)g$

¬ üÈø ¸¡ôÒò ¾òÐÅò¾¡ ý ÀÊ,

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = \left[P-(M+m)g\right]a$$

$$\therefore P = (M+m)g + (M+m)\frac{v^2}{2a}$$

$$= (M+m)g + \frac{M+m}{2a}\frac{M^2u^2}{(M+m)^2}$$

$$= (M+m)g + \frac{M^2u^2}{(M+m)2a}$$

$$= (M+m)g + \frac{M^2}{(M+m)}\frac{2gh}{2a}$$

$$= (M+m)g + \frac{M^2}{(M+m)}\frac{gh}{a}\cdots\cdots\cdots(2)$$

¿¡Äò¾¨¼Â¡É¡ø ²üÀÎõ ±¾¢÷Ó Î ì ¸õ f Á/Å¡É¡Ê^2 ±É ì ¦ ¸¡û ¸. §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¡ý ¯ûÇ v ±ý Û õ §Å ¸Á¡ÉÐ 'a' ¦¾¡ ¨ Ä× ¯ðÒ Ì ó¾×¼ý â î º¢ÂÁ¡Å¾¡ø,

$$0 = v^2 - 2fa$$

$$\therefore f = \frac{v^2}{2a}\cdots\cdots\cdots(3)$$ ¬ Ì õ.

«ò à ñ þÂì ¸ò¾¢Ä¢Õó¾ §¿Ãõ t ±É¢ø,

$$0 = v - ft$$

$$\therefore t = \frac{v}{f} = \frac{v}{v^2}2a = \frac{2a}{v}$$

$$\therefore t = \frac{2a(M+m)}{M\sqrt{2gh}} = \frac{(M+m)a}{M}\sqrt{\frac{2}{gh}}\cdots\cdots(4)$$

§ÁÖõ (1)-Ä¢ÕóÐ $v = \frac{Mu}{M+m} = \frac{M}{M+m}\sqrt{2gh}$

§Á¡Ð ¨ ¸Â¢Ö ûÇ þÂì ¸ ¬ üÈÄ¢ÆôÒ,

$$= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2$$

$$= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}(M+m)\frac{M^2u^2}{(M+m)^2}$$

$$= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}\frac{M^2u^2}{(M+m)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Mm}{(M+m)^2}u^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Mmgh}{M+m}$$

f ¤ø¸ û.............................(5)

4.5.12.8 100 ¸¢Ã¡õ, 96 ¸¢Ã¡õ «Ç×ûÇ ¿¢¨È¸û ÅÆÅÆôÀ¡É ´Õ ¸ôÀ¢Â¢ýÁ£Ð ¦ºøÖõ ¦ÁøÄ¢Â ¸Â¢üÈ¢É¡ø þ¨½ì¸ôÀðÎ, µöÅ¢Ä¢ÕóÐ ÒÈôÀÎõÀÊ ¦ºöÂôÀÎ¸¢ýÈÉ. ´Õ Å¢É¡Ê ÓÊÅ¢ø ºÈ¢Â ¿¢¨È µöÅ¢Ä¢Õì Ìõ 4 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨È ´ý¨Èò ¾ý Û¼ý ±ÎòÐî ¦ºø¸¢ÈÐ. þ¨¾Â Îò¾ Å¢É¡Ê þÚ¾¢Â¢ø, «ó¾ 4 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨È ¾¡§É ¸¦§Æ Å¢úóÐ Å¢Î¸¢ÈÐ. þÂì¸ò¦¾¡¼ì¸ò¾¢Ä¢ÕóÐ 3 Å¢É¡Ê¸û ¸¼óÐÀ¢ý, «ó¾ ¿¢¨È¸Ç¢ý ¿¢¨Ä¸¨Çì ¸¡ñ¸.

$$f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{100-96}{100+96}\times 980 = 20$$ ¦º.Á£/Å¢É¡Ê^2

∴ Ó¾ø Å¢É¡ÊÂ¢É¢Ú¾¢Â¢ø ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý ¾¢¨º§Å¸õ

$$= 0 + ft = 20$$ ¦º.Á£/Å¢É¡Ê.

Ó¾ø Å¢É¡ÊÂ¢ø 100 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨È þÈí¸¢Â ¦¾¡¨Ä×

$$= \frac{1}{2}ft^2 = 10$$ ¦º.Á£.

ÁüÈ ¿¢¨È þ§¾ ¦¾¡¨Ä×õ §Áø§¿¡ì¸¢ ¯ÂÕ¸¢ÈÐ. 4 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨È¨Â ±ÎòÐì¦¸¡û Ù Óý ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý ¯ó¾õ.

$$= 196 \times 20$$ ¸¢Ã¡õ - ¦º.Á£.

.

4 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨È¨Âî º¢È¢Â ¿¢¨È ±ÎòÐì¦¸¡û Ùõ§À¡Ð «¾¢÷îº¢Â¢ý ¸¡Ã½Á¡¸, ¯ó¾ò¾¢ø Á¡ÚÀ¡Î ²üÀÎ¸¢ÈÐ. u ¬ Ìõ. ±É§Å, ¯ó¾ì§¸¡ðÀ¡ðÊýÀÊ

$$200u = 196 \times 20; \therefore u = 19.6$$ ¦º.Á£/Å¢É¡Ê.

þô§À¡Ð, þÕ ¿¢¨È¸Ùõ ºÁÁ¡É¾¡ø ¦¾¡Ì¾¢ý ÓÎì¸õ âîº¢ÂÁ¡Ìõ. ¬¸§Å, þó¾ þÃ ñ¼¡ÅÐ ¸¡Ä þ¨¼¦ÅÇ¢Â¢É ´Õ Å¢É¡ÊÂ¢ø, ¦¾¡Ì¾¢Â¡ÉÐ

19.6 ¦º.Á¦. ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý ¦ºø¸¢ÈÐ. þÕ ¿¢¨È¸Ùõ ¾ò¾õ Óó¾¢Â ¾¢¨º¸Ç¢ø §ÁÖõ 19.6 ¦º.Á¦. ¦¾¡¨Ä× ¦ºø¸¢ýÈÉ.

¬¸§Å, þÃñ¼¡ÅÐ Å¢É¡Ê þÚ¾¢Â¢ø 100 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÂ¡ÉÐ (10+19.6)=29.6 ¦º.Á¦. ¦¾¡¨Ä× ¸¼¢Èí Ì¸¢ÈÐ. Áü¨ÈÂ ¿¢¨È þ§¾ ¦¾¡¨Ä× §Áø§¿¡ì¸¢ ²È¢ÔûÇÐ.

þó¿¢¨ÄÂ¢ø 4 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨È ¾¡É¡¸§Å ¸¦§Æ Å¢ØÅ¾¡ø «¾¢÷î º¢ ²ÐÁ¢ø¨Ä. ¬¨¸Â¡ø ¯ó¾Á¡üÈõ ²ÐÁ¢ø¨Ä. þô¦À¡ØÐ ¦¾¡ Ì¾¢Â¢ý Óîì¸õ ¦º.Á¦/Å¢É¡Ê^2

$= \frac{100-96}{100+96} \times 980 = 20$ ¦º.Á¦/Å¢É¡Ê^2

¾¢¨º§Å¸õ =19.6 ¦º.Á¦/Å¢É¡Ê.

¬¸§Å þÂì¸ò¾¢ý ãýÈ¡ÅÐ Å¢É¡ÊÂ¢ø 100 ¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÂ¡ÉÐ. §ÁÖõ $ut + \frac{1}{2}ft^2$ ¦¾¡¨Ä× ¸¼¢Èí Ì¸¢ÈÐ.

«¾¡ÅÐ $19.6 \times 1 + \frac{1}{2} \times 20 \times 1^2 = 29.6$ ¦º.Á¦. ¸¦ú þÈí Ì¸¢ÈÐ. ¬¾Ä¡ø ¦¾¡¼ì¸ò¾¢Ä¢ÕóÐ ãýÚ Å¢É¡Ê¸Ç¢É¢Ú¾¢Â¢ø 100 ¸¢Ã¡Á ¿¢¨È ¾ÉÐ ¦¾¡¼ì¸ ¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ 29.6+29.6=59.2 ¦º.Á¦. ¦¾¡¨Ä× ¸¼¢Èí¸¢ ¯ûÇÐ. Áü¨ÈÂ ¿¢¨ÈÔõ þ§¾ ¦¾¡¨Ä× ¾ÉÐ ¦¾¡¼ì¸¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ §Á§ÄÈ¢ÔûÇÐ.

4.5.13. §Á¡Ð¨¸Â¢ø þÂì¸ ¬üÈÄ¢ý þÆôÒ (Loss of Kinetic energy due to Impact).

u ±ýÈ ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý þÂí Ìõ $m-$ ±ýÈ ¿¢¨È, µöÅ¢Ä¢ÕìÌõ $M-$ ±ýÈ Áü¦È¡Õ ¿¢¨È¨Â §Á¡¾ð Îõ, M ¬ÉÐ m þÂí Ìõ ¾¢¨ºÂ¢ø þÂí¸ò¾¨¼§ÂÐõ þø¨Ä ±Éì¦¸¡û¸. §ÁÖõ, §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý þÕ ¿¢¨È¸Ùõ ´ýÈ¡¸î §º÷óÐ ´§Ã ¦À¡ÕÇ¡¸ v ±ýÛõ ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý þÂí¸ðÎõ.

§Á¡Ð¨¸Â¢ø, ¦Á¡ò¾ ¯ó¾ò¾¢ø Á¡ÚÀ¡Î ²Ðõ þøÄ¡¾¾¡ø,

$$(m+M)v = mu$$

§Á¡Ð¨¸ìÌ Óý þÂì¸ ¬üÈø $= \frac{1}{2}mu^2$

§Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý þÂì¸ ¬üÈø $= \frac{1}{2}(m+M)v^2$

$$= \frac{1}{2}(m+M).\frac{m^2u^2}{(m+M)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m^2u^2}{(m+M)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)m^2u^2$$

þ í Ì $\frac{m}{m+M}<1$ ±ýÀ¾¡ø, §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ý ²üÀ Î õ þÂ ì ¸ ¬üÈø, §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Óý ¯ûÇ $\frac{1}{2}mu^2$ ±ý Ûõ þÂ ì ¸ ¬üÈ ¨ ÄÅ¢¼ì Ì ¨ È×À Î õ.

±É§Å

§Á¡Ð ¨ ¸Â¡ø ²üÀ Î õ þÂ ì ¸ ¬üÈø þÆôÒ

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)mu^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}mu^2\left[\frac{m}{m+M}-1\right]$$

$$= -\frac{mMu^2}{2\left(m+M\right)}$$

þùÅ¢¾ þÆôÒ ²üÀ Î Å¾¡ø, ¬üÈø §¸¡ðÀ¡ð ¨ ¼ (Principle of Energy), ¸ ½ò¾¡ ì Ì Å¢ ¨ º ¸ û ¦¾¡¼÷À¡É ¸ ½ ì Ì ¸Ç¢ø ÀÂ ý À Î ò¾ì Ü¼¡Ð.

4.5.14 Á¡¾¢¡¢ì ¸ ½ ì Ì ¸ û

4.5.14.1 m' ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ´Õ Ì ñ Î m'' ¿¢ ¨ ÈÔûÇ ´Õ ÐôÀ¡ ì ¸¢Â¢Ä¢ÕóÐ Å¢É¡Ê ì Ì v' §Å¸ò¾¢ø ¸¢ ¨ ¼Â¡ ¸ î Í¼ôÀð Î , « ì Ì ñ Î /¿¦ÇÓõ, m ¿¢ ¨ ÈÔõ ¦¸¡ ñ¼ ´Õ ¾É¢ ° ºø §¸¡Çò ¨ ¾ «Ê ì ¸¢ÈÐ. ÐôÀ¡ ì ¸¢ Í ðÊ ýÈ¢ þÂ í Ì Å¾¡ ¸ ì ¦¸¡ ñ Î

(i) «¾ý À¢ý É¾ôÒ §Å¸õ

(ii) ¿¢ ¨ Äì Ì ò¾¡É ¿¢ ¨ ÄÔ¼ý ° ºø « ¨ Áì Ì õ §¸¡½õ(Angle of Displacement for the Pendulum).

(iii) §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ý, þ ¨ ÆÂ¢ø ¦ºÂøÀ Î õ þØÅ¢ ¨ º ¬ ¸¢ÂÅü ¨ È ì ¸ ¡ ñ ¸ .

ÐôÀ¡ ì ¸¢ ¸ ðÊ ýÈ¢ v'' ±ý Ûõ ¾¢ ¨ º§Å¸òÐ¼É¢Â í Ì Å¾¡ ¸ ¦¸¡ û ¸ . §¿÷ì§¸¡ð Î ¯ó¾ì ¸ ¡ôÒ Å¢¾¢ÂÀ¢ ýÀÊ,

$$m''v'' + m'v' = 0$$

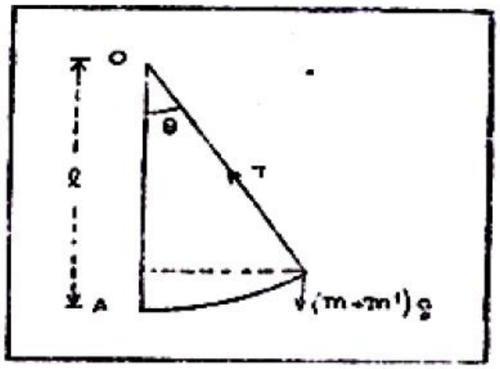
$$\therefore v'' = -\left(\frac{m'}{m''}\right)v'$$

Ì ñ Î ¾É¦ ° ºÄ¦¨Â «Êò¾×¼ý, ° ºø §¸¡Çõ v ±ý Ûõ ¦¾¡¼ì ¸ò¾¦¨º§Å¸òÐ¼ý þÂí Ì ¸¦È¦¾É¦ø,

$$m'v' = (m + m')v$$ ¬ Ì õ.

$$\therefore v = \left(\frac{m'}{m + m'}\right)v'$$ ¬ Ì õ.

t ±ý Ûõ ²§¾Û¦Á¡Õ §¿Ãò¾¦ø, ¾É¦ ° ºø ¿¦¨Äì Ì òÐì §¸¡ð Î¼ý À¼õ (4.5.13) -ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ ±ý Ûõ ° ºÄ¡ Î õ §¸¡½ò¨¾ ²üÀ Î òÐÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.



À¼õ 4-5-3

«ô§À¡Ð ¬üÈø ¸¡ôÒ Å¦¾¦Â¦ýÀÊ

$$\frac{1}{2}\left(m + m^1\right)v^2 = \left(m + m^1\right)gl(1 - \cos^{-})$$

«¾¡ÅÐ $\cos^{-} = \frac{2gl - v^2}{2gl}$ ¬ Ì õ. $\left(m+m^1\right)$±ý Ûõ ¿¦¨È¨Âô ¦ÀüÈ Ð¸û O ±ý Ûõ ¿¦¨ÄôÒûÇ¦¨Â ¨ÁÂÁ¡¸ì¦¸¡ñ Î . ´Õ ¿¦¨Äì Ì òÐ Åð¼ôÀÌ ¾¦Â¦ø «¨Ä×ÚÅ¾¡ø ¿¦äð¼É¦ý þÂ ñ¼¡ÅÐ Å¦¾¦ôÀÊ þ¨ÆÂ¦ø ¦ºÂøÀ Î õ T ±ý Ûõ þØÅ¦¨ºÂ¡ÉÐ.

$$T - \left(m + m^1\right)g = \left(m + m^1\right)a_n = \left(m + m^1\right)\frac{v^2}{l},$$

$$\therefore T = \left(m + m^1\right)\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$ ±ýÈ¡ Ì õ

4.5.14.2 56¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ¿¦¨ÈÔ¨¼Â ´Õ ºõÁðÊ 1.6Á¦ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¦Ä¦ÕóÐ Å¦ØóÐ þÕõÒ ¿¦¨È ´ý ¨È «Êò¾À¦ý µöÅ¨¼¸¦ÈÐ. «Ê ¿¦¸úó¾ §¿Ãõ $\frac{1}{40}$ Å¦É¡Ê. «îºõ ÁðÊÂ¡ø þÕõÀ¦ýÁ¦Ð ÀÂýÀ Î ò¾ôÀð¼ ¸½ò¾¡ì Ì Å¦¨º Á¡È¡¦¾É ì ¦¸¡ñ Î «¾¨É ì ¸¡ñ ¸. (g=9.8 Á/ Å¦É¡Ê) ºÁÁðÊ þÕõÒ

¿¢¨È¨Â «Êì Ìõ§À¡Ð «¾ý ¾¢¨º§Å¸õ $= \sqrt{2gh} = \left(2\times9.8\times1.6\right)^{\frac{1}{2}}$ =5.6 Á£/Å¢É¡Ê. ±É§Å «ÊôÀ¾ü Ì Óý ¯ó¾õ $= 56\times5.6$ ¸¢.¸¢.Á£/Å¢É¡Ê. ºõÁðÊ þÕõÒ ¿¢¨È¨Â «Êò¾À¢ý µöÅ¨¼Å¾¡ø «Êò¾À¢ý ¯ó¾õ =O ¬Ìõ.

¾¡ì¸Ç¨Å = ¯ó¾Á¡üÈõ = 0 – (56 x 5.6)

$\therefore I = \uparrow = \uparrow =$---

$= 56\times5.6$ ¸¢.¸¢.Á£./Å¢É¡Ê

$= \dfrac{56\times5.6}{9.8}$ ¸¢.¸¢.

P ¸¢.¸¢ ±¨¼ ±ýÀÐ þÕõÀ¢ýÁ£Ð ÀÂýÀÎò¾ôÀð¼ ¸½ò¾¡ìÌ Å¢¨º¦ÂÉ¢ø. ºõÁðÊÂ¢ý ±¨¼ ¸£ú§¿¡ì¸¢ «¨ÁÅ¾¡ø ºõÁðÊÂ¢ý§Åø ¿¢¸úó¾ ¾¡ìÌ Å¢¨º.

$$= P - mg = P - 56\times9.8$$

$\therefore \left(P - 56\times9.8\right)t = I$ = ¾¡ì¸Ç¨Å

$$\therefore P - 56\times9.8 = \frac{56\times5.6}{\frac{1}{40}\times9.8} = \frac{56\times5.6\times40}{9.8} = 1280$$

$P = 1280 + 56\times9.8 = 1828.8$ ¸¢.¸¢ ±¨¼.

4.5.14.3 m ¿¢¨ÈÔûÇ ÐôÀ¡ì¸¢ Ã¨Å ´ýÚ, M ¿¢¨ÈÔ¨¼Â ¿¢¨ÄÂ¡É ¸ð¨¼ìÌû ¯ðÒÌõ ¾ÊôÒ (thickness) s ¬Ìõ. Ã¨Å ¯ðÒÌÅ¾üÌûÇ ¾¨¼ º£Ã¡¸ þÕôÀ¾¡¸ì ¦¸¡ñÎ, M-¬ÉÐ þÂíÌÅ¾üÌ ¸ðÊýÈ¢ þÕìÌõ§À¡Ð ¯ðÒ¸ôÀð¼ ¾ÊôÒ $\dfrac{M}{M+m}s$ ±Éì¸¡ðÎ¸.

ÐôÀ¡ì¸¢ Ã¨ÅÂ¢ý ¦¾¡¼ì¸ò¾¢¨º§Å¸õ u ¬Ìõ. Ã¨Å ¯ðÒÌÅ¾üÌûÇ ¸ð¨¼Â¢ý ¾¨¼¨Â F ±ý¸. þò¾¨¼¨Â ±¾¢÷òÐ Ã¨Å s ¦¾¡¨Ä× ¯ð¦ºø¸¢ÈÐ. ¬¸§Å ¬üÈø §¸¡ðÀ¡ðÊýÀÊ,

$$0 - \frac{1}{2}mu^2 = -F.s$$

«¾¡ÅÐ $mu^2 = 2Fs$

¸ð¨¼ ¿¢¨ÄÂ¡¸ þøÄ¡Áø þÂíÌõ§À¡Ð Ã¨Å ¸ð¨¼ìÌû ¯ðÒó¾×¼ý Ã¨Å, ¸ð¨¼ ¬¸¢ÂÅü¨Èý ¦À¡ÐÅ¡É ¾¢¨º§Å¸õ V ¬Ì¸.

¯ó¾ì¸¡ôÒì §¸¡ðÀ¡ðÊýÀÊ:

$\left(M + m\right)v = mu + MO = mu$ ....(ii)

¯ðÒÌó ¦¾¡¨Ä× x ¸ð¨¼ ¦ºýÈ ¦¾¡¨Ä× ±ýÚõ ±ÎòÐì¦¸¡ñ¼¡ø ¬üÈø §¸¡ðÀ¡ðÊýÀÊ.

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mu^2=-F(x+y) \quad \text{..............(iii)}$$

¬ üÈø §¸¡ðÀ¡ðÊ ýÀÊ ¸ð ¨¼ ¨¼ ¨ Âî º¡÷óÐ.

$$\frac{1}{2}Mv^2-0=Fy$$ ¬ Ì õ ....(iv)

(iii) (iv) ¬ ¸¢ÂÅü ¨Èì Üð¼

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2-\frac{1}{2}mu^2=-Fx$$

« ¾¡ÅÐ $\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2u^2}{(m+M)^2}-\frac{1}{2}.2Fs=-Fx$

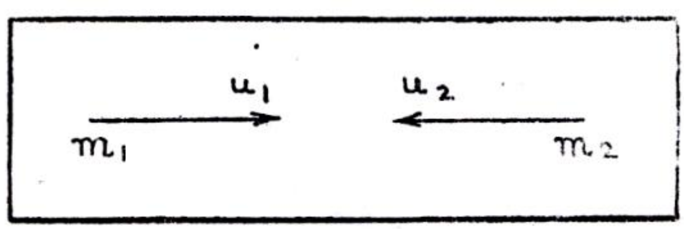
$$\frac{1}{2}\frac{m(2Fs)}{(m+M)}-\frac{1}{2}.2Fs=-Fx$$

$$\therefore x=\frac{Ms}{M+m}$$

4.5.14.4 ´Õ Ì ñ Î ¦ÅÊòÐ m_1,m_2 ±ý Û õ ¿¢ ¨È¸ Ù ¨¼Â þÕÐ ñ Î ¸Ç¡¸ À¢¡¢ì ¸ôÀ Î ¸¢ýÈÐ. « ¨Å Ó ¨È§Â u_1,u_2 ±ý Û õ ¦¾¡¼ì ¸ò ¾¢ ¨º§Å¸ í ¸ Ù¼ý ±¾¢÷ò¾¢ ¨º ¸Ç¢ø þÂí Ì ¸¢ýÈÉ. þ¾É¡ø þÂì ¸ ¬üÈÄ¢ø.

$$\frac{1}{2}\frac{m_1,m_2}{m_1+m_2}(u_1+u_2)^2$$

« Ç× Á¢ ÌÀÂ ý ¯ûÇÐ ±É ¿¢Ú× ¸.
¯ó¾ì §¸¡ðÀ¡ðÊ ýÀÊ



$m_1u_1 - m_2u_2 = 0.$

Ì ñ Î ¦ÅÊôÀ¾ü Ìó ý þÂì ¸ ¬üÈø = O

Ì ñ Î ¦ÅÊò¾À¢ý þÂì ¸ ¬üÈø.

$$=\frac{1}{2}m_1{u_1}^2+\frac{1}{2}m_2{u_2}^2$$

$$(m_1+m_2)(m_1{u_1}^2+m_2{u_2}^2)=(m_1u_1-m_2u_2)^2+m_1m_2(u_1+u_2)^2=m_1m_2(u_1+u_2)^2$$

$$\therefore \left(m_1u_1+m_2u_2\right)^2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(u_1+u_2\right)^2$$

±É§Å þÂì¸ ¬üÈÄ¢ø ²üÀð¼ ¬¾¡Âõ.

={Ì ñ Î ¦ÅÊò¾À¢ý þÂì¸¬üÈø Ì ñ Î ¦ÅÊôÀ¾ü Ì Óý þÂì¸¬üÈø}

$$= \left(\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + m_2{u_2}^2\right) - 0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{\left(m_1+m_2\right)}\left(u_1+u_2\right)^2$$

4.5.15 ÀÂ¢üº¢

4.5.15.1 Å¢ÉÊì Ì 21Á¦ð¼÷ ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý ¸¢¨¼Â¡¸ þÂí Ìõ 109¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÔ¨¼Â ¸¢¡¢ì¦¸ð ÀóÐ §¿Ã¡¸ Å¢É¡Êì Ì 15Á¦ ¾¢¨º§Å¸ìÐ¼ý ¾¢ÕôÀ¢ «Êì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. Àó¾Êì Ìõ Áð¨¼ Àó¨¾ò ¦¾¡Îõ§¿Ãõ $\frac{1}{20}$ Å¢É¡Ê ±É¢ø. Àó¾Êì Ìõ Áð¨¼ ¦ºÂøÀÎòÐõ ºÃ¡º¡¢ ¸½ò¾¡ì Ì Å¢¨º¨Âì¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ 8 ¸¢.¸¢ ±¨¼)

4.5.15.2 50¸¢Ã¡õ ¿¢¨ÈÔûÇ ÐôÀ¡ì¸¢ Ã¨Å ¸¢¨¼Â¡¸ Å¢É¡Êì Ì 81Á¦. §Å¸òÐ¼ý ÅÆÅÆôÀ¡É ¸¢¨¼§Á¨ºÂ¢ý ÁÐûÇ 4¸¢.¸¢ ¿¢¨ÈÔûÇ ´Õ ÁÃì¸ð¨¼ì Ìû º ÎÕ×Á¡Ú Í¼ôÀÎ¸¢ÈÐ. «ó¾ Ã¨Å ÁÃì¸ð¨¼ì Ìû Ò¨¾ó¾À¢ý ÁÃì¸ð¨¼Â¢ý §Å¸¦Áý É?

(Å¢¨¼ 1 Á¦/Å¢É¡Ê)

4.5.16 Á¦ûºì¾¢ô ¦À¡Õû¸Ç¢ý §Á¡Ð¨¸ (Collision of Elastic Bodies)

¸ñ ½¡Ê §¸¡Ä¢ ´ý¨È ÁÆÁÆôÀ¡É ÀÇ¢í Ìò¾¨ÃÂ¢ý ÁÐõ, À¢ÈÌ ÁÃôÀÄ¨¸Â¢ý ÁÐõ ´Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ¯ÂÃò¾¢Ä¢ÕóÐ §À¡ÎÅ¡Á¡Â¢ý, «ì§¸¡Ä¢ ÀÇ¢í Ìò¾¨ÃÂ¢Ä¢ÕóÐ «¾¢¸ ¯ÂÃò¾üÌ ¦¾È¢ôÀ¨¾Ôõ, ÁÃôÀÄ¨¸Â¢Ä¢ÕóÐ Á¢¸ì Ì ¨Èó¾ ¯ÂÃò¾üÌò ¦¾È¢ôÀ¨¾Ôõ ¸¡½Ä¡õ. «ùÅ¡§È, ´Õ ¸ñ ½¡Ê §¸¡Ä¢¨ÂÔõ, ´Õ ®Â §¸¡Ä¢¨ÂÔõ ´§Ã ¯ÂÃò¾¢Ä¢ÕóÐ ¾¨ÃÂ¢ý ÁÐ Å¢Æî¦ºöÔõ§À¡Ð «¨Å ¦¾È¢ì Ìõ ¯ÂÃõ Á¡ÚÀðÊÕôÀ¨¾Ôõ ¸¡½Ä¡õ. þí Ì þÕ¦À¡Õû¸Ùõ, Ó¾ý Ó¾ø ¾¨Ã¨Âò¦¾¡Îõ§À¡Ð, ºÁÁ¡É §Å¸í¸¨Çô¦ÀüÈ¢Õì¸¢ýÈÉ. ¬É¡ø «¨Å ¦ÅùÅ§Ú ¯ÂÃí ¸¨Ç ¦¾È¢ì¸¢ýÈ¨Å¡ø, ¾¨ÃÂ¢Ä¢ÕóÐ ¿¦í Ìõ§À¡Ð, «ÅüÈ¢ý §Å¸í ¸û ¦ÅÅ§ÅÈ¡¸ þÕì¸ §Å ñ ÊÅÕõ. ¾¨ÃÂ¢É¢ýÚ ¿¦í¸¢À¢ý «ÅüÈ¢Û ¨¼Â §Å¸í¸Ç¢ø þÕ¡üÈò ¨¾ Å¢¨ÇÅ¢ì Ìõ ¦À¡ÕÇ¢Âø, «ÅüÈ¢ý Á¦ûºì¾¢ (Elastic) ±ÉôÀÎõ.

¦À¡Õû¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ §Á¡¾¢ì¦¸¡ûÙõ, §¿Ãõ Á¢¸îº¢È¢Â¾¡¸ ×ûÇ §À¡¾¢Öõ, «¨Å¸û ´ýÚì¦¸¡ýÚ ¦ºÂüÀÎòÐõ Å¢¨º¸û Á¢¸ô¦À¡¢Â¾¡¸ þÕì¸ìÜÎõ. þùÅ¢¾Î¦ºö¨¸Â¡ÉÐ ¦À¡Õû¸û ºüÚ «Øò¾ôÀÎ¸¢ýÈÉ. «¨Å, ¾í¸û þÂøÀ¡É ¯ÕÅò¨¾ «¨¼Â ÓÂüº¢ ¦ºöÔõ§À¡Ð, ¦¾È¢òÐ þÂíÌ¸¢ýÈÉ. ¦À¡Õû¸¨Çò¾í¸û þÂøÀ¡É ¯ÕÅò¨¾ô¦ÀÈî¦ºöÔõ§À¡Ð, §ÁüÜÈ¢Â Á¢ûºìÌ¾¢ô ÀÂýÀ¡Îõ, ¦À¡Õû¸û §Á¡¾¢ì¦¸¡ûÙõ§À¡Ð «¨Å ´ý¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡Îõ ¾Çò¾¢üÌ ¦¾¡ÎÒûÇ¢ ÅÆ¢§Â Å¨ÃÔõ ¦À¡Ð¦ºíÌò¾Ìì§¸¡Î, §Á¡Ð¨¸ì§¸¡Î (Line of impact) ±ÉôÀÎõ. þÕ§¸¡Çí¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ §Á¡Ðõ§À¡Ð, «ÅüÈ¢ý ¨ÁÂí¸¨Ç þ¨½ìÌõ§¸¡Î, ¦À¡Ð¦ºí§¸¡¼¡Ìõ.

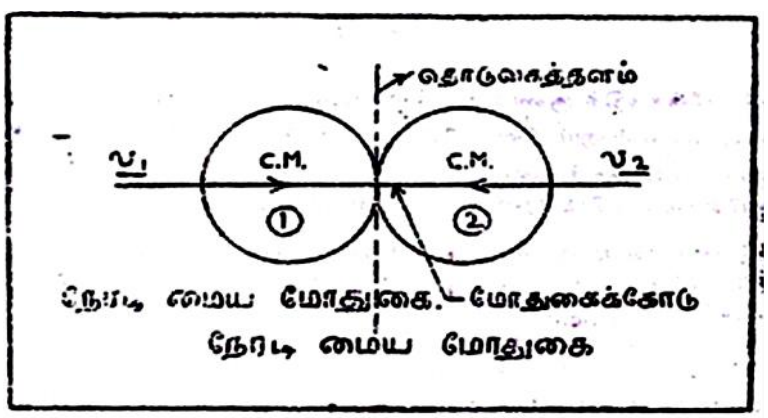
4.5.16.1 §Á¡Ð¨¸Â¢ý Å¨¸¸û

§Á¡Ð¨¸Â¢ø ÀíÌ ¦ÀÚõ ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂí¸Ùõ, §Á¡Ð (Central impact) ±ÉôÀÎõ. ¾¢½¢× ¨ÁÂí¸û, §Á¡Ð¨¸ì§¸¡ðÊÄ¨ÁÂ¡¾ÕôÀ¢ý, §Á¡Ð¨¸Â¡ÉÐ, Åì¸¡ §Á¡Ð¨¸ (eccentric impact) ±ÉìÜÈôÀÎõ.

¨ÁÂ §Á¡Ð¨¸¨Â, §¿ÃÊ¨ÁÂ §Á¡Ð¨¸ (Direct Central impact) º¡¢× §Á¡Ð¨¸ (Oblique central impact) ±É þÕ Å¨¸¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸Ä¡õ.

4.5.16.2 §¿ÃÊ §Á¡Ð¨¸

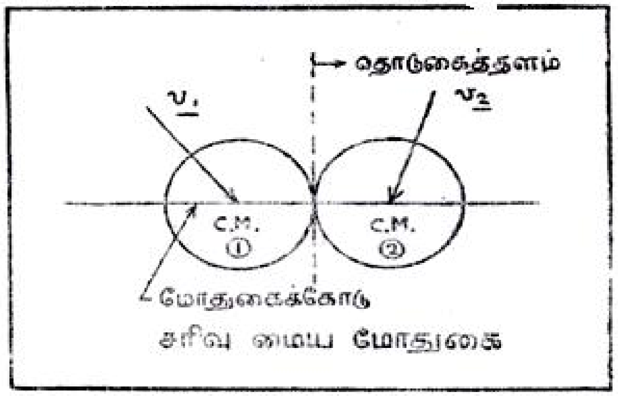
§Á¡¾Ä¢ø ÀíÌ¦ÀÚõ þÕ¦À¡Õû¸Ç¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂí¸Ùõ, «ô¦À¡Õû¸û ´ù¦Å¡ýÈ¢ý þÂì¸Óõ, «¨Å¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡Îõ ÒûÇ¢Â¢ÖûÇ ¦À¡Ð¦ºí§¸¡ðÊý ÅÆ¢§Â þÕìÌÁ¡Â¢ý «¨Å ´ý¨È¦Â¡ýÚ §¿ÃÊÂ¡¸ §Á¡¾¢ì¦¸¡ûÅ¾¡¸ ¦¸¡ûÇôÀÎõ. §¿ÃÊ ¨ÁÂ §Á¡Ð¨¸ À¼õ (4.5.14)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨Áõ.



À¼õ 4-5-14

4.5.16.3 º¡¢× ¨ÁÂ §Á¡Ð¨¸

¦À¡Õû¸Ç¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂí¸û §Á¡Ð¨¸ì §¸¡ðÊÖõ «ùÅ¢Õ ¦À¡Õû¸Ç¢ý þÂì¸§Á¡ «øÄÐ ²¾¡Å¦¾¡ýÈ¢ý þÂì¸§Á¡ ¦¾¡Îõ ÒûÇ¢Â¢ÖûÇ ¦À¡Ð ¦ºí§¸¡ðÊý ÅÆ¢§Â þøÄ¡Áø «¾üÌ º¡öó¾ ¾¢¨ºÂ¢Öõ þÕì̦ÁÉ¢ø «¨Å ´ý¨È¦Â¡ýÚ º¡¢Å¡ö «øÄÐ º¡öóÐ §Á¡¾¢ì¦¸¡ûÅ¾¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. º¡¢× §Á¡Ð¨¸ À¼õ(4.5.15)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨ÁÔõ.

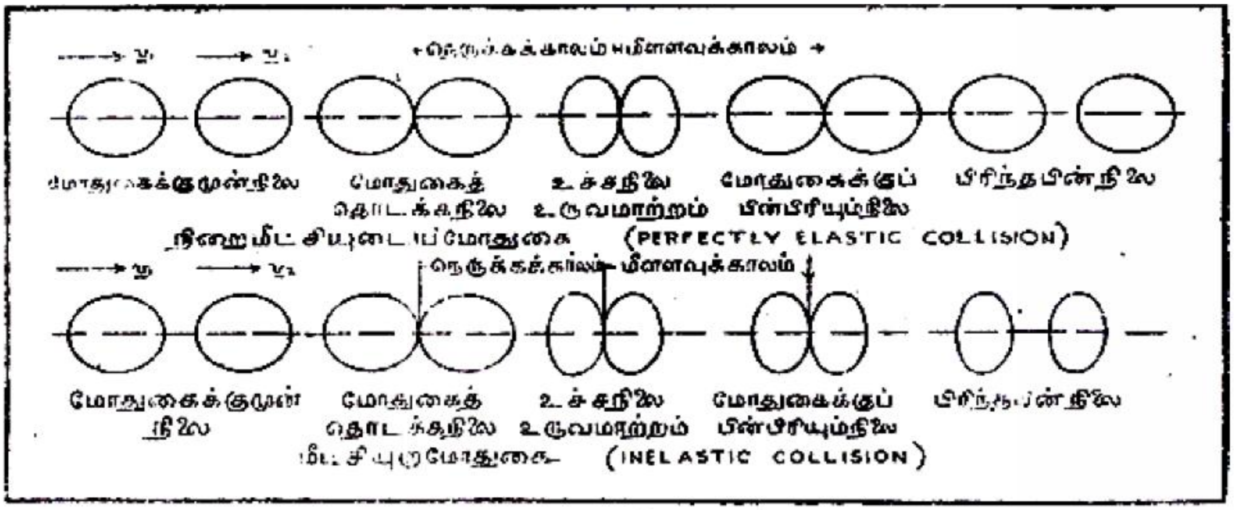


À¼õ 4-5-15

4.5.16.4 ¿¢¨Ä Á¡ð º¢ì ¦¸Ø¨Å (Coefficient of restitution)

m_1, m_2 ±ýÛõ ¿¢¨È¸¨Çô ¦ÀüÈ þÕÐ¸û¸û $\underline{v_1}, \underline{v_2}$ ±ýÛõ ¦¾¡¼ì¸ò ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ø ´Õ §¿÷§¸¡ðÎ Á¢¨¸ò¾¢¨ºÂ¢ø À¼õ (7.20)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú þÂí¸ðÎõ. þÃñ¼¡ÅÐ Ð¸¨Çì ÌÈ¢òÐ Ó¾Ä¡ÅÐ Ð¸Ç¢ý º¡÷¾¢¨º§Å¸õ $\underline{v_1}-\underline{v_2}$ ¬Ìõ. þîº¡÷¾¢¨º§Å¸õ «Ï Ìõ ¾¢¨º§Å¸õ(velocity of approach) ±¨×õ ÜÈôÀÎõ.

$\underline{v_1} > \underline{v_2}$ ±ýÚûÇ§À¡Ð þÕÐ¸û¸Ùõ §Á¡¾¢ì¦¸¡ûÙõ. «ò¾¨¸ §Á¡Ð¨¸ ¿¼ìÌõ §¿Ãõ þÕÀÌ¾¢¸Ç¡¸ô À¢¡¢ì¸ôÀðÎ (two phases) «¨Å þÕÅ¢¾ò §¾¡üÈ «¨Áô¨Àô ¦ÀüÚûÇ¾¡¸ì ¦¸¡ûÇôÀÎõ. «ùÅ¢¾ «¨ÁôÒì¸û À¢ýÅÕÁ¡Ú Ð¸û¸Ç¢ý ´ý¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø ¦¾¡Îõ t_0 ±ýÛõ §¿Ãò¾¢ÖÕõ «ÅüÈ¢ø Á¢¸ô¦À¡¢Â ¯ÕÅÁ¡üÈõ ²üÀÎõ t_1 ±ýÛõ §¿Ãò¾¢üÌ Á¢¨¼§Â «¨Áõ þÚì¸ ¿¢¨Äò§¾¡üÈõ (Compression Phase).



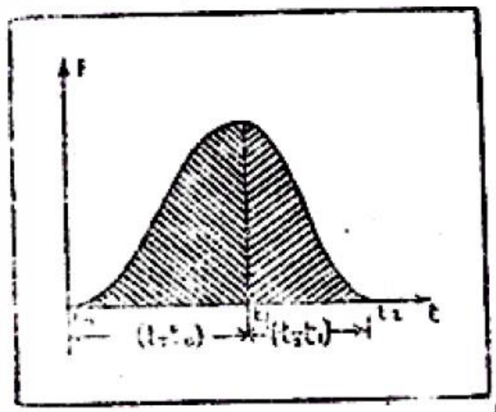
À¼õ 4-5-16

<¦¿Õì¸¸¡Äõ> <ÁÇÇ×ì¸¡Äõ> §Á¡Ð¨¸ìÌ Óý¿¢¨Ä §Á¡Ð¨¸ ¯îº¿¢¨Ä §Á¡Ð¨¸ìÌô À¢¡¢ó¾À¢ý ¿¢¨Ä ¦¾¡¼ì¸¿¢¨Ä ¯ÕÅÁ¡üÈ À¢ýÀ¢¡¢Ôõ ¿¢¨Ä ¿¢¨ÈÁ£ðº¢Ô¨¼Â (PERFECTLY ELASTIC COLLISION) ¦¿Õì¸¸¡Äõ ÁÇÇ×ì¸¡Äõ §Á¡Ð¨¸ìÌÓý §Á¡Ð¨¸ ¯îº¿¢¨Ä §Á¡Ð¨¸ìÌô À¢¡¢ó¾À¢ý ¿¢¨Ä ¦¾¡¼ì¸¿¢¨Ä ¯ÕÅÁ¡üÈõ À¢ýÀ¢¡¢Ôõ ¿¢¨Ä Á£ðº¢ÔÈ §Á¡¾¨¸ (INELASTIC COLLISION) (t_1-t_0) ±ýÀÐ ¦¿Õì¸¸¡Äò¨¾ì (Period of compssresion) ÌÈ¢ì¸¢ÈÐ.

¯îº¿¢¨Ä ¯ÕÅÁ¡üÈò¾¢ý §À¡Ð, Ð¸û¸Ç¢ý ñ Ìõ $\underline{u}$ ±ýÛõ ´§Ã ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý þÂí̸¢ýÈÉ.

(2) Á¢¸ô¦À¡¢Â ¯ÕÅÁ¡üÈõ ²üÀÎõ l_1 ±ýÛõ §¿Ãò¾¢üÌõ Ð¸Ç¢ý ñ Ìõ §Á¡Ð¨¸ì¸ôÀ¢ý À¢¡¢Ôõ §À¡ÐûÇ t_0 ±ýÛõ §¾¡üÈ¾¢üÌÁ¢¨¼§Â «¨ÁÔõ ¿¢ð¼¢ ¿¢¨Äò§¾¡üÈõ(Restitution Phase). (t_2-t_1) ±ýÀÐ ÁÇÇ×ì¸¡Äò¨¾ì (Period of restitution) ÌÈ¢ì¸¢ÈÐ.

Ð¸û¸û À¢¡¢Ôõ§À¡Ð «¨Å¸û $\underline{v_1^1}, \underline{v_2^1}$ ±ýÛõ ¾¢¨º§Å¸í¸Ù¼ý þÂíÌÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. Ð¸û¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ §Á¡¾¢ì¦¸¡ûÙõ§À¡Ð. «ÅüÈ¢ü¸¢¨¼§Â ¿¢¸Øõ ¸½ò¾¡ìÌ Å¢¨º¸¨Ç (¦¿ÕìÌ Å¢¨º ¿¢¨ÄÁ£ð º¢ Å¢¨º -Force of Compression and force of restitution)- §¿Ãò¾¢ý º¡÷ÀÄÉ Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔ¦ÁÉ¢ø, §Á¡Ð¨¸ìÌ



À¼õ 4-5-17

Óýÿ Ûõ À¢ý Û ÓûÇ ¾¡ì¸Ç¨Å¸û À¼õ 4.5.17-ø ¸¡ðÊÔûÇÅ¡Ú «¨ÁÔõ Å¢¨º-¸¡Ä Å¨ÃÀ¼ò¾¢ø $\left(t = t_0 , t = t_1\right)$ ±ýÛõ Ìò¾¡Â í¸û $\left(t = t_1 , t = t_2\right)$ ±ýÛõ Ìò¾¡Âí¸û ¬¸¢ÂÅüÈ¢ü Ì þ¨¼Àð¼ ÀÃôÀÇ×¸Ç¡ø Ì È¢ì¸ôÀÎõ.
þÚì¸ ¿¢¨Äò§¾¡üÈ «¨ÁôÒì Ì ²üÈ¾¡É ¾¡ì¸Ç¨Å ¯ó¾ ºÁýÀ¡ð¨¼ ´ù¦Å¡Õ Ð¸Ùì Ì õ Å¨ÃÂÚì Ìõ§À¡Ð,

$$- \underline{I_c} = - \int_{t_0}^{t_1} \underline{F} dt = m_1 \left(\underline{u} - \underline{v_1} \right) \qquad \text{..................(1)}$$

$$\underline{I_c} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F} dt = m_2 \left(\underline{u} - \underline{v_2} \right) \qquad \text{..................(2)}$$

±ýÀ¨Å ¦ÀÈôÀÎõ.

þí Ì $\underline{I_c}$ ±ýÀÐ þÚì¸¿¢¨Äò ¾¡ì¸Ç¨Å¨Âì (Impulse of Compression) ÌÈ¢ôÀ¾¡¸ ¯ûÇÐ. §ÁÖõ $\left(t_1 - t_0\right)$ ±ýÛõ ¸¡ÄôÀ Ì ¾¢Â¢ø m_1 ¿¢¨ÈÔûÇ §¸¡Çõ «øÄÐ Ð¸û ¯ó¾ þÆô¨ÀÔõ m_2 ¿¢¨ÈÔûÇ §¸¡Çõ «øÄÐ Ð¸û ¯ó¾ Á¢Ì¾¢¨ÂÔõ ¦ÀÚ¸¢ýÈÉÅ¡ Ìõ.
«ùÅ¡§È ¿¢ð º¢ ¿¢¨Äò§¾¡üÈ «¨ÁôÒì Ì ²üÈ¾¡É $\underline{I_R}$ ±ýÛõ Á£ð º¢ ¿¢¨Ä ¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¡ÉÐ (Impulse of Restitution).

$$- \underline{I_R} = - \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt = m_1 \left(\underline{v_1}' - \underline{u} \right) \qquad \text{..................(3)}$$

$$\underline{I_R} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt = m_2 \left(\underline{v_2}' - \underline{u} \right) \qquad \text{..................(4)}$$

±ýÛõ ºÁýÀ¡Î¸Ç¡Öõ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ §ÁÖõ $\left(t_2 - t_1\right)$ ±ýÛõ ¸¡ÄôÀÌ¾¢Â¢ø Ó¾ø Ð¸Ç¢ø ¯ó¾þÆôÒõ, þÃ ñ ¼¡ÅÐ Ð¸Ç¢ø ¯ó¾Á¢Ì¾¢Ôõ ²üÀÎ¸¢ýÈÉ.
þÕ¦À¡Õû¸ Ùõ ¾í¸û þÂøÀ¡É ¦¾¡¼ì¸¿¢¨Ä ¯ÕÅò¨¾ ¾¢ÕõÀô ¦ÀÚÅ¾¡¸¢ø «¨Å¸û ¿¢¨ÈÁ£ðº¢Ô¨¼¨Å (Perfectly elastic)¸Ç¡¸ì

¸Õ¾ôÀ Î õ À¨ÆÂ ¿¦¨Ä¨Âô ¦ÀÈ¡Å¦Êý «ô¦À¡Õû¸û þÇì¸Á¡É ¦¿Õì¸ô Àñ Ò¨¼Â¨Å (Plastic deformation) ¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀ Î õ.

¦À¡ÐÅ¡¸ $\underline{I_R}$-ý Á¾¦ôÒ $\underline{I_C}$-ý Á¾¦ô¨Àì ¸¡ðÊÖõ Ì¨È×üÈ¦Õì Ì õ Á¦ðº¦¿¦¨Äò ¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¦ý ±ñ Á¾¦ôÒì Ì õ þÚì¸¿¦¨Äò ¾¡ì¸Ç¨ÅÂ¦ý ±ñ Á¾¦ôÒì Ì õ (Coefficient of elasticaty or Coefficient at restitution) ±ÉôÀ Î õ. þùÅ¦¸¦¾õ ´Õ Á¡È¦Ä¦Â¡ Ì õ «Ð "e" ±ý Û õ ±Øò¾¡ø ÌÈ¦ì¸ôÀ Î õ.

±É§Å

$$e = \frac{\left|\underline{I_R}\right|}{\left|\underline{I_c}\right|} = \frac{I_R}{I_c}$$

$$= \frac{\text{¿¦¨ÄÁ¦ðº¦ Å¦¨ºÂ¦ý ¾¡ì¸Ç¨Å}}{\text{þÚì¸ ¿¦¨ÄÅ¦¨ºÂ¦ý ¾¡ì¸Ç¨Å}} \text{ ¬ Ì õ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

e-¬ÉÐ ¦À¡Õû¸Ç¦ý ¿¦¨È¨Âî º¡÷ó¾¦Õì¸¡Áø, «ÅüÈ¦ý ÀÕô ¦À¡ÕÇ¦ÂÄ¡É (Physical Properties) ÀÕÁý (Size) ¯ÕÅõ (Shape) §Á¡Ð¨¸ì Ì Óý ¦À¡Õû¸Ç¦ý ¾¦¨º§Å¸í¸û ¬¸¦ÂÅü¨Èî º¡÷óÐûÇÐ.

§ÁÖõ e-¬ÉÐ ¦Åù§ÅÚ ãÄô¦À¡Õû¸Ùì Ì ¦Åù§ÅÈ¡É Á¾¦ô¨Àì ¦¸¡ñ Î ûÇÐ. ¿¦¨ÄÁ¦ðº¦ì¦¸Ø âîº¦ÂÁ¡¸ ¯ûÇ ¦À¡Õû¸û Á¦ðº¦ÔÈô¦À¡Õû¸û (inelastic bodies) ±ÉôÀ Î õ. ¿¦¨ÄÁ¦ðº¦ì¦¸Ø ´ýÈ¡¸ ¯ûÇ ¦À¡Õû¸û ¿¦¨ÈÁ¦ðº¦ô¦À¡Õû¸Ç¡ Ì õ. (Perfectly clastic bodies). ÁüÈ ¦À¡Õû¸Ç¨ ÉòÐõ ¿¦¨ÄÁ¦ðº¦ì¦¸Ø âîº¦Âò¾¦üÌ õ ´ýÚì Ì õ þ¨¼Â¦ÖûÇ Á¾¦ôÒì¸¨Çò¾¡ý ¦ÀÈÓÊÔõ.

4.5.16.5 ¿¦¨ÄÁ¦ðº¦ì¦¸Ø¨Å §Á¡Ð¨¸ô ¦À¡Õû¸Ç¦ý ¾¦¨º§Å¸í¸¨Çì ¦¸¡ñ Î Å¨ÃÂÚò¾ø.

m_1 ±ý Û õ ¿¦¨È¨Âô¦ÀüÈ Ð¸û ´ýÈ¦ü Ì ¡¦Â, $\underline{I_C}, \underline{I_R}$ ±ýÀ¨Å¸û.

$$-\underline{I_c} = m_1\left(\underline{u} - \underline{v_1}\right)$$

$$-\underline{I_R} = m_1\left(\underline{v_1}' - \underline{u}\right)$$

±ý Û õ ºÁýÀ¡ Î ¸Ç¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀ Î Å¾¡ø.

$$e = \frac{\underline{I_R}}{\underline{I_c}} = \frac{m_1\left(\underline{v_1}' - \underline{u}\right)}{m_1\left(\underline{u} - \underline{v_1}\right)}$$

«øÄÐ

$$\underline{v_1}' - \underline{u} = e\left(\underline{u} - \underline{v_1}\right) \qquad ....(6)$$

± ý È¡ Ì õ

« ùÅ¡§È m_2 ± ý Û õ ¿¢ ¨ ÈÔ ¨ ¼Â þÃ ñ ¼¡ÅÐ Ð¸ Ù ì Ì õ

$$e = \frac{\underline{\underline{I_R}}}{\underline{I_c}} = \frac{m_2\left(\underline{v_2}' - \underline{u}\right)}{m_2\left(\underline{u} - \underline{v_2}\right)}$$ « øÄÐ

$$\underline{v_2}^1 - \underline{u} = e\left(\underline{u} - \underline{v_2}\right)$$ ± ý È¡ Ì õ ....(7)

(7)-ÅÐ ºÁ ý À¡ ð ¨ ¼ (6)-ÅÐ ºÁ ý À¡ ðÊÄ¢ÕóÐ ¸Æ¢ ì ¸.

« øÄÐ

$$e = -\frac{\underline{v_1}' - \underline{\underline{v_2}}'}{\underline{v_1} - \underline{v_2}} = -\frac{\text{À¢¡¢Ôõ ¾¢ ¨ º§Å¸õ (Velcity of separation)}}{\text{" Ï Ì õ ¾¢ ¨ º§Å¸õ (Velocity of approach)}} \qquad ....(8)$$

¬ Ì õ

e- ¬ ÉÐ ´Õ À¡¢Á¡ ½ ÁüÈ ¸ ½¢ÂÁ¡ Ì õ.

[Ì È¢ôÒ (i) $\underline{I_R} = e\underline{I_c} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\underline{v_1} - \underline{v_2}\right)$

(ii) ¦Á¡ò¾ò ¾¡ ì ¸Ç ¨ Å

$$= \underline{I_c} + \underline{I_R}$$

$$= (1+e)\underline{I_c} = \frac{(1+e)m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\left(\underline{v_1} - \underline{v_2}\right)$$

(iii) $\underline{u} =$ ¯î º¢¿¢ ¨ Ä ¯ÕÅÁ¡üÈò¾¢ ý §À¡Ð « ó§¿Ãò¾¢ø Ð¸ û¸ Ù ¨ ¼Â ¦À¡Ðò ¾¢ ¨ º§Å¸õ.

$$= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \underline{v_1}' + m_2 \underline{\underline{v_1}}'}{m_1 + m_2}$$ ± ý È¡ Ì õ]

¿¢ ¨ ÈÁ¢ðº¢Ô ¨ ¼Â §Á¡Ð ¨ ¸Â¢ø þÚ ì ¸¿¢ ¨ Äò ¾¡ ì ¸Ç ¨ ÅÔõ Á¢ðº¢¿¢ ¨ Äò ¾¡ ì ¸Ç ¨ ÅÔõ ºÁÁ¡ Ì õ. ±É§Å e-ý Á¾¢ôÒ ´ ýÈ¡ Ì õ. Á¢ðº¢ÔÈ §Á¡Ð ¨ ¸Â¢ø e-Â¢ý Á¾¢ôÒ â îº¢ÂÁ¡ Ì õ. « ô§À¡Ð

$\underline{v_1}' = \underline{v_2}'$ ¬ Ì õ.

« ¾¡ÅÐ ¦À¡Õû¸ û þÃ ñ Î õ ¦¾¡ ð Î ì ¦¸¡ ñ §¼ ´ §Ã ¾¢ ¨ º§Å¸ò¾¢ÄÂ í Ì õ.

4.5.16.6 §Á¡¾Ö ì ¸ ¡ É Å¢¾¢ ¸ û

±øÄ¡Å¢¾ §Á¡¾ø ¸ Ù õ ¸¦ú ì ¸ ñ ¼ ¾ò¾Å í ¸ Ù ì Ì ðÀ Î õ.

(1) ¿¢ ä ð¼É¢ ý À¡¢§º¡¾ ¨ É Å¢¾¢
þÕ¦À¡Õû ¸ û ´ ý ¨ È¦Â¡ ý Ú §¿Ã¡ ¸ §Á¡¾¢É ¡ø §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ô À¢ ý Û ûÇ «ÅüÈ¢ ý º¡÷¾¢ ¨ º§Å ¸ õ. §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Óý Û ûÇ «ÅüÈ¢ ý º¡÷¾¢ ¨ º§Å ¸ ò¾¢ü Ì ´ Õ Á¡È¡Å¢ ¸ ¢¾ò¾¢Öõ ±¾¢÷ò¾¢ ¨ ºÂ¢Öõ þÕì Ì ¦ÁÉ À¡¢§º¡¾ ¨ É Å¡Â¢Ä¡ ¸ ¿¢ ä ð¼ ý ¸ ñ ¼¡÷.
«ô¦À¡Õû ¸ û º¡öóÐ §Á¡¾¢É ¡ø §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ ý «ÅüÈ¢ ý ¦À¡Ð ¦º í§¸¡ðÊ ýÁÐ À ¸ ¢÷ó¾ º¡÷¾¢ ¨ º§Å ¸ õ «ò¾¢ ¨ ºÂ¢§Ä§Â §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Óý À ¸ ¢÷ó¾ º¡÷¾¢ ¨ º§Å ¸ ò¾¢ü Ì ´ Õ Á¡È¡Å¢ ¸ ¢¾ò¾¢ø ±¾¢÷ Ì È¢Ô¼É¢Õì Ì õ.
þõÁ¡È¡Å¢ ¸ ¢¾§Á ÁÛº ì¾¢ì Ì ½ ¸ õ «øÄÐ ¿¢ ¨ ÄÁð¾º¢ì ¦ ¸ ØÅ¡ Ì õ.

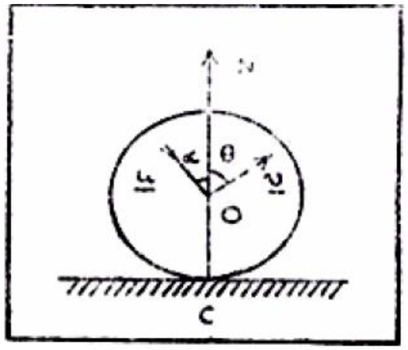
(2) §Á¡Ð ¨ ¸ ì §¸¡ðÊýÁÐ þÕ¦À¡Õû ¸ Ç¢ ý þÂì ¸ õ
þÕ¦À¡Õû ¸ Ç¢ ý §Á¡Ð ¨ ¸ Â¢ø « ¨ Å ¸ û ±ùÅ¢¾ô ÒÈÅ¢ ¨ º ¸ Ù ì Ì õ ¯ðÀ¼¡ÁÄ¢Â í Ì Å¾¡ø, §Á¡Ð ¨ ¸ ì §¸¡ðÊýÁÐûÇ ¯ó¾ò¾¢ ý ¦Á¡ò¾õ Óý Û õ À¢ ý Û õ ºÁÁ¡ Ì õ.

(3) ÅÆÅÆôÀ¡É þÕ ¦À¡Õû §Á¡Ð ¨ ¸ ì §¸¡ðÊü Ì î ¦º í Ì ò¾¡ö þÂ í ¸ ¡ ¨ Á.
ÅÆÅÆôÀ¡É þÕ¦À¡Õû ¸ û ´ ý ¨ È¦Â¡ ý Ú §Á¡Ðõ§À¡Ð «ÅüÈ¢É¢ ¨ ¼§Â ¦¾¡ Î§¸¡ðÎò ¾¡ì ¸ õ Â¡ÐÁ¢ø ¨ Ä. ¬ ¸ §Å ¦À¡Õû ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼§ÂÔûÇ ¯ûÇÓì ¸ õ (Stress) ÓüÈ¢Öõ «ÅüÈ¢ ý ¦À¡Ð ¦º í ÌòÐì§¸¡ðÊÁ§¾ ¯ûÇÐ. ±É§Å «ì§¸¡ðÊ ý ¦º í ÌòÐ ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ±ùÅ¢¾ Å¢ ¨ ºÔÁ¢ø ¨ Ä. «¾¡ÅÐ ¦¾¡ Î§¸¡ð Îò ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ±ùÅ¢¾ Å¢ ¨ ºÔõ ¦ºÂüÀ Î Å¾¢ø ¨ Ä. ¬¾Ä¡ø ¦¾¡ Î§¸¡ð Îò ¾¢ ¨ ºÂ¢ø §Å ¸ Á¡üÈÓõ ¸ ¢ ¨ ¼Â¡Ð.
±É§Å ¦À¡Ð ¦º í§¸¡ðÊü Ì ò ¦º í Ì ò¾¡É¾¢ ¨ ºÂ¢ø, ´ ù¦Å¡Õ ¦À¡ÕÇ¢Û ¨ ¼Â ¾¢ ¨ º§Å ¸ ò¾¢ø À ¸ ÷× §Á¡Ð ¨ ¸ Â¡ø Á¡È¡ÁÄ¢Õì Ì õ. ÁÛº ì¾¢ô ¦À¡Õû ¸ Ç¢ø §Á¡Ð ¨ ¸ Â¢ ý ¸ ¡Ã½Á¡ ¸ ²üÀ Î õ þÂì ¸ Á¡üÈò ¨ ¾ô À¢ ýÅÕõ ¿¢ ¨ Ä ¨ Á ¸ Ç¢ø ¸ ¡ ½ Ä¡õ.

4.5.17 ¿¢ ¨ ÄÂ¡ É ¾Çò¾¢ ýÁÐ §Á¡Ð ¨ ¸

m ¿¢ ¨ ÈÔõ e-± ý Û õ ¿¢ ¨ ÄÁ¢ð¾º¢ì ¦ ¸ Ø ¨ ÅÔõ ¦ÀüÈ ÁÆÁÆôÀ¡É §¸¡Çõ «øÄÐ Ð ¸ ¦Ç¡ ý Ú ¿¢ ¨ ÄÂ¡ É ÁÆÁÆôÀ¡É ¾ ¨ ÃÂ¢ ýÁÐ º¡öÅ¡ ¸ §Á¡Ð ¸ ¢ÈÐ. §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ ý «¾ ý þÂì ¸ ò ¨ ¾ì ¸ ¡ Ï ¾ø. À¼õ (4.5.18)-ø ¸ ¡ðÊÔûÇÅ¡Ú ¿¢ ¨ Äì Ì òÐì§¸¡ðÊü Ì ~ §¸ ¡ ½ î º¡¢Å¢ø u ± ý Û õ §Å ¸ òÐ¼ ý þÂ í Ì õ§À¡Ð §¸ ¡Çõ ¿¢ ¨ ÄÂ¡ É ¾Çò ¨ ¾,C-Â¢ø «ò¾Çò¾¢ü Ì CN ± ý Û õ ¦º í ÌòÐì§¸¡ð ¨ ¼ Å ¨ Ã ¸ . «ì§¸ ¡ Î O ± ý Û õ §¸ ¡Ç ¨ ÁÂò¾¢ ý
ÅÆ¢§Â ¦ºøÖõ §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ ý §¸ ¡Çõ ¿¢ ¨ Äì Ì òÐò ¾¢ ¨ ºÔ¼ ý ¯ ± ý Û õ §¸ ¡ ½ î º¡¢Å¢ø v ± ý Û õ §Å ¸ òÐ¼ ý þÂ í Ì Å¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡ û ¸ . ¾ÇÓõ §¸ ¡ÇÓõ

¯Ã¡ÂÅüÈ¢ÕôÀ¾¡ø §Á¡Ð ¨¸Â¢ý §À¡Ð ¸½ò¾¡ì ¸Å¢ ¨º ´ ýÚ¾¡ ý ¦À¡Ð ¦º í§¸¡ð Î



À¼õ 4-5-18

ÅÆ¢§Â ¦ºÂøÀ Î ¸¢ÈÐ. ¬ ¸§Å ¦À¡Ð ¦¾¡ Î§¸¡ðÊ ý «¾¡ÅÐ ¾Çò¾¢ü Ì þ ¨ ½Â¡ É ¾¢ ¨ºÂ¢ø, §Å ¸ í ¸Ç¢ø Á¡Ú¾ø ²üÀ¼¡Ð.

$$\therefore v \sin ¯ = u \sin \sim \qquad ....(1)$$

¿¢ä ð¼É¢ý À¡¢§º¡¾ ¨ É Å¢¾¢ôÀÊ.

$$v \cos ¯ = eu \cos \sim \qquad ....(2)$$

¬ Ì õ.

(1) (2)- ± ý ÀÅüÈ¢ý Å÷ì ¸ ì Ü Î ¾ø,

$$v^2 = u^2\left(\sin^2 \sim + e^2 \cos^2 \sim\right) \text{ ¬ Ì õ}$$

$$. \therefore v = u\sqrt{\sin^2 \sim + e^2 \cos^2 \sim} \qquad ....(3)$$

(2) ³ (1) ¬ ø Å Ì ì ¸ ,

$$\cot ¯ = e \cot \sim \qquad ....(4)$$

± ý ÀÐ ¸¢ ¨ ¼ì Ì õ.

(3) (4)-± ý Û õ ºÁ ýÀ¡ Î ¸ û, §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ý §¸¡Çò¾¢ý þÂì ¸ò ¨ ¾ Å ¨ ÃÂÚ ì ¸¢ýÈÉ. À¢ý ÅÕõ Ð ¨ ½ ÓÊ× ¸ ¨ ÇÔõ (Corollaries)¦ÀÈÄ¡õ.

(i) §Á¡Ð ¨ ¸ §¿Ã¡Â¢ý $\sim = 0$

«¾¡ÅÐ §¸¡Çõ ¾Çò ¨ ¾ §¿ÃÊÂ¡¸ §Á¡Ðõ§À¡Ð, «Ð ¦À¡Ð ¦º í§¸¡ðÊ ý ÅÆ¢§Â ±¾¢÷ò¾¢ ¨ ºÂ¢ø §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ý, eu ± ý Û õ §Å ¸òÐ¼É¢Â í Ì õ.

(ii) e= 1 ± ýÈ¡ø $¯ = \sim; v = u$ ¬ Ì õ.

«¾¡ÅÐ ¿¢ ¨ ÈÁ¡ð º¢Ô ¨ ¼Â §¸¡Çò¾¢ý À Î §¸¡ ½ Óõ ¦¾È¢§¸¡ ½ Óõ ºÁÁ¡ Ì õ. §ÁÖõ §Á¡¾Ä¡ø §Å ¸ò¾¢ý ± ñ ÁÀ¢ôÒ Á¡ÚÅ¾¢ø ¨ Ä.

(iii) e= 0 ± ý Û õ $¯ = 90°; v = u \sin \sim$ ¬ Ì õ.

«¾¡ÅÐ §¸¡Çõ Á¢ð¼¢Â¢øÄ¡¾¾¡¸ þÕôÀ¢ý §Á¡¾Öì Ìô À¢ý §¸¡Çõ «ò¾Çò¾¢ü¸¢¨ ½Â¡¸×ûÇ ¾ý ¦¾¡¼ì¸ §Å¸ò¾¢ý À¸¢÷×§Å¸õ Á¡È¾Å¡Ú ¾Çò¾¢ýÁ¢Ð ÅØì¸¢ þÂíÌõ.

(iv) §Á¡Ð¨¸Â¡ø §Á¡Ð¨¸ì §¸¡ðÊø ¾Çõ¦ÀÚõ ¾¡ì¸Ç¨Å (Impulse) §¸¡Çò¾¢ýÁ¢ÐûÇ ¾¡ì¸Ç¨ÅìÌî ºÁÛõ ±¾¢ÕÁ¡Â¢Õì Ìõ.

¬¸§Å, «ò¾¨¸Â ¾¡ì¸Ç¨Å¨Â «ò¾Çò¾¢üÌ §ÁøÓ¸Á¡É ¦ºí§¸¡ðÎò¾¢¨ºÂ¢ø §¸¡Çõ¦ÀÚõ ¯ó¾Á¡üÈò¾¡ø «ÇÅ¢¼ÀÎõ. ±É§Å.

I= §¸¡Çò¾¢ý ¯ó¾Á¡üÈõ

=§Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý §¸¡Çò¾¢ý ¯ó¾õ-§Á¡Ð¨¸ìÌÓý §¸¡Çò¾¢ý ¯ó¾õ

$$= (mv\cos\text{¯})\uparrow - (-mu\cos\sim)\uparrow$$

$$= m(v\cos\text{¯} + u\cos\sim)$$

$$= m(v\cos\text{¯} + u\cos\sim)$$

$$= m(eu\cos\sim + u\cos\sim)$$

$$= (1+e)mu\cos\sim$$

(v) §Á¡Ð¨¸Â¡ø þÂì¸ ¬üÈÄ¢ø ²üÀÎõ þÆôÒ §Á¡Ð¨¸Â¡ø þÂì¸ ¬üÈÄ¢ý Á¡üÈõ

§Á¡Ð¨¸Â¡ø þÂì¸¬üÈÄ¢ý Á¡üÈõ = §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý §¸¡Çò¾¢ý þÂì¸ ¬üÈø - §Á¡Ð¨¸ìÌÓý §¸¡Çò¾¢ý þÂì¸¬üÈø

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(u^2\sin^2\sim + e^2u^2\cos^2\sim\right) - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}mu^2\left(\sin^2\sim + e^2\cos^2\sim - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}mu^2\left(e^2\cos^2\sim - \cos^2\sim\right)$$

$$= -\frac{1}{2}mu^2\left(1-e^2\right)\cos^2\sim$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-e^2\right)mu^2\cos^2\sim$$

þ í Ì ±¾¢÷ Ì È¢Â¡ÉÐ, §Á¡Ð¨¸Â¡ø þÂì¸¬üÈÄ¢ø ²üÀÎõ þÆô¨À «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ. ±É§Å, þÂì¸¬üÈÄ¢ø ²üÀÎõ þÆôÒ,

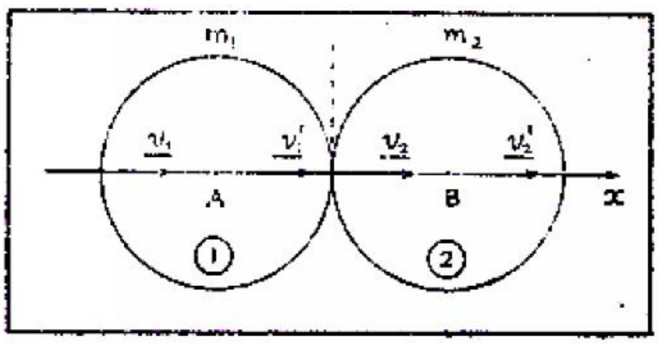
$$=\frac{1}{2}\left(1-e^2\right)mu^2\cos^2 \sim$$

[Ì È¢ôÒ: e=1 ±É¢ø, §¸¡Çõ ¿¢¨ÈÁ¢ð º¢Ô¨¼Â¾¡ Ìõ «ô§À¡Ð þÂì¸ ¬üÈÄ¢ý Á¡üÈõ â¾º¢ÂÁ¡ Ìõ. «¾¡ÅÐ, þÂì¸ ¬üÈÄ¢ø þÆôÒ þÃ¡Ð]

4.5.18 þÕ§¸¡Ç í ¸Ç¢ý §¿Ã¼ §Á¡¾ø (Direct impact of two spheres)

m_1 ¿¢¨ÈÔ¨¼Â ÁÆÁÆôÀ¡É §¸¡Çõ, $\underline{v_1}$ ±ý Ûõ ¾¢¨º§Å¸òÐ¼ý þÂí Ìõ§À¡Ð, «§¾¾¢¨ºÂ¢ø, $\underline{v_2}$ ±ý Ûõ ¾¢¨º§Å¸òÐ¼É¢Âí Ìõ Áü¦È¡Õ ÁÆÁÆôÀ¡É m_2 ¿¢¨ÈÔ¨¼Â §¸¡Çò¾¢ýÁÐ §¿Ã¡ö §Á¡Ð¸¢ýÈÐ. e ±ýÀÐ §¸¡Ç í¸Ç¢ý ¿¢¨ÄÁ¢ð º¢ì¦¸Ø¨Åì Ì È¢ôÀ¾¡¸¢ø, §Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý «ÅüÈ¢ý þÂí¸ í¸¨Çì ¸¡ Ï ¾ø.

À¼õ (4.5.19)-ø A,B ±ýÀÐ §¸¡Ç í¸Ç¢ý ¨ÁÂí¸ ¨Çì Ì È¢ôÀ¾¡¸ð Îõ. A,B ±ýÀÐ §Á¡Ð¨¸ì §¸¡¼¡ Ìõ. «¾¡ÅÐ, ¦À¡Ð ¦º í§¸¡¼¡ Ìõ.



À¼õ 4-5-19

§¸¡Ç í¸ÇÃ ñ Îõ ÁÆÁÆôÀ¡É ¨Å¸Ç¡É¾¡ø §Á¡Ð¨¸Â¢ý ¸¡Ã½Á¡¸, ¦¾¡ Î§¸¡ðÎò ¾¢¨ºÂ¢ø ±ùÅ¢¾ ¸½ò¾¡ìÌ Å¢¨º¸ Ùõ ¸¢¨¼Â¡. ¬¾Ä¡ø ¦¾¡Î§¸¡ðÎò ¾¢¨ºÂ¢ø §¸¡Ç í¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸ í¸Ç¢ø Á¡Ú¾ø ²ÐÁ¢ø¨Ä. §Á¡Ð¨¸ì Ì Óý §¸¡Ç í¸û AB ±ý Ûõ §¸¡ðÊ§Ä§Â þÂí ÌÅ¾¡ø, þÕ §¸¡Çò¾¢ü Ìõ §Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý ¦¾¡Î§¸¡ðÎ ¾¢¨ºÂ¢ø ¯ûÇ ¾¢¨º§Å¸Óõ §Á¡Ð¨¸ì Ì Óý ¦¾¡Î§¸¡ðÎ ¾¢¨ºÂ¢ø ¯ûÇ ¾¢¨º§Å¸Óõ â¾º¢ÂÁ¡ Ìõ ¬¸§Å, §Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý §¸¡Ç í¸û AB ±ý Ûõ §¸¡ðÊ§Ä§Â þÂí Ìõ.

§Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý, $\underline{v_1}',\underline{v_2}'$ ±ýÀ¨Å §¸¡Ç í¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸ í¸ ¨Çì Ì È¢ôÀ¾¡¸¢ø, ¿¢äð¼É¢ý À¢§º¡¾¨É Å¢¾¢ôÀÊ.

$$\underline{v_2}'-\underline{v_1}'=-e\left(\underline{v_2}-\underline{v_1}\right)$$ ....(1)±ýÀÐ ¸¢¨¼ì Ìõ,

§ÁÖõ ¯ó¾ì ¸¡ôÒ Å¢¾¢ôÀÊ, þÕ§¸¡Ç í ¸ Ùõ §Á¡Ðõ§À¡Ð §Á¡Ð ¨ ¸ ì §¸¡ðÊ ý
Á¢ÐûÇ ¯ó¾ í ¸Ç¢ý ¦Á¡ò¾õ, §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Ó ý Ûõ À¢ý Ûõ ºÁÁ¡ Ìõ.
±É§Å,

$$m_1\underline{v_1}' + m_2\underline{v_2}' = m_1\underline{v_1} + m_2\underline{v_2} \quad ....(2)$$

þ í Ì $\underline{v_1}', \underline{v_2}'$ ± ýÀ ¨ Å¾¡ ý ¦¾¡¢Â¡ì ¸ ½¢Â í ¸ û « Åü ¨ È (1) (2) ± ý Ûõ ºÁ ý
À¡ Î ¸ Ù ì Ì ò ¾÷× ¸ ñ Î ¦ÀÈÄ¡õ.

¬ ¸§Å (2) - (1) $\times m_2$ ± ýÀ ¨ ¾ì ¸ ½ ì ¸¢¼,

$$(m_1 + m_2)\underline{v_1}' = (m_1 - em_2)\underline{v_1} + (1+e)m_2\underline{v_2}$$

$$\underline{v_1}' = \frac{(m_1 - em_2)\underline{v_1} + (1+e)m_2\underline{v_2}}{(m_1 + m_2)} \quad ....(3)$$

¬ Ìõ.

« ùÅ¡§È (2)+(1) $\times m_1$ ± ýÀ ¨ ¾ì ¸ ½ ì ¸¢¼,

$$(m_1 + m_2)\underline{v_2}' = (m_2 - em_1)\underline{v_2} + (1+e)m_1\underline{v_1}$$

$$\underline{v_2}' = \frac{(m_2 - em_1)\underline{v_2} + (1+e)m_1\underline{v_1}}{(m_1 + m_2)} \quad .... (4)$$

¬ Ìõ.

(3) (4) ± ý Ûõ ºÁ ýÀ¡ Î ¸ û, §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ ý , §¸¡Ç í ¸Ç¢ý ¾¢ ¨ º§Å ¸ í ¸ ¨ Ç
Å ¨ ÃÂÚì ¸¢ýÈÉ.

4.5.18.1 ¿¢ ¨ ÈÔ ¨ ¼Â §¸¡Çò¾¢ý §Áø ²üÀ Î õ ¾¡ì ¸ Ç ¨ Å ¨ Âì ¸ ¡ Ï ¾ø.

I = m_1 ¿¢ ¨ ÈÔ ¨ ¼Â §¸¡Çò¾¢ý §Áø §Á¡Ð ¨ ¸Â¡ø ²üÀ Î õ ¾¡ì ¸ Ç ¨ Å
= « ¾ ý ¯ó¾ò¾¢ø ²üÀ Î õ Á¡üÈõ

$$= m_1\underline{v_1}' - m_1\underline{v_1}$$

$$= m_1\left(\underline{v_1}' - \underline{v_1}\right)$$

$$= m_1\left[\frac{(m_2 - em_2)\underline{v_1} + (1+e)m_2\underline{v_2}}{(m_1 + m_2)} - \underline{v_1}\right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[(1+e)\left(m_2\underline{v_2} - m_2\underline{v_1}\right)\right]$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1+e)\left(\underline{v_1} - \underline{v_2}\right), \left(\underline{v_1} > \underline{v_2}\right)$$

[Ì È¢ôÒ (i) m_2 ¿¢¨ ÈÔ ¨¼Â §¸¡Çò¾¢ ý ¸ ½ò¾¡ì Ì Å¢¨ º m_1 þÂ í Ì õ ¾¢ ¨ º ì Ì
±¾¢÷ò¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¦ºÂüÀ Î Å¾¡ø, m_1 ¿¢ ¨ ÈÔ ¨¼Â §¸¡Çò¾¢ø ¯ó¾þÆôÒ
²üÀ Î ¸¢ÈÐ. « ¨ ¾ þ í Ì Ì ¨ Èì Ì È¢ ¦ÅÇ¢ôÀ Î òÐ ¸¢ÈÐ.
(ii) m_2 ¿¢ ¨ ÈÔ ûÇ §¸¡Çò¾¢ø ¯ó¾ Á¢ Ì ¾¢ ²üÀ Î ¸¢ÈÐ.
(iii); $m_1 - m_2$ e $= 1$ ±É¢ ý $\underline{V_1'} = \underline{V_2}; \underline{V_2'} = \underline{V_1}$ ¬ Ì õ.
«¾¡ÅÐ ºÁÁ¡É ¿¢ ¨ ÈÔõ ¿¢ ¨ È Á¡ûºì¾¢Ôõ ¯ ¨¼Â þÕ§¸¡Ç í ¸ û §¿Ã¡¸ §Á¡¾¢ì ¦ ¸ ¡ ñ ¼¡ø « ¨ Å ¾õ ¾¢ ¨ º§Å ¸ í ¸ ¨ Çô À¡¢Á¡È¢ì ¦ ¸ ¡ û Ù õ.
(iv) e=O ±É¢ ý ,
$\underline{V_2'} = \underline{V_1'}$ ¬ Ì õ.]

4.5.18.2 §¿Ã§Ê §Á¡Ð ¨ ¸Â¢ø ²üÀ Î õ þÂ ì ¸ ¬ üÈø þÆôÒ.

m_1, m_2 ± ý Û õ ¿¢ ¨ È ¸ ¨ Çô ¦ÀüÈ Ð ¸ û ¸ û ´ ý ¨ È¦Â¡ ýÚ §¿Ã§Ê¡¸ §Á¡Ðõ§À¡Ð «ÅüÈ¢ý ¾¢ ¨ º§Å ¸ í ¸ û §Á¡¾ÖìÌ Ó ý Û õ À¢ ý Û õ Ó ¨ È§Â
$\underline{v_1}, \underline{v_2}; \underline{v_1}', \underline{v_2}'$ ¬ Ì ¸ .

$$\underline{v_2}' - \underline{v_1}' = -e\left(\underline{v_2} - \underline{v_1}\right)$$

$$m_1\underline{v_1}' + m_1\underline{v_2}' = m_1\underline{v_1} + m_2\underline{v_2}$$

Ð ¸ û ¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ ý þÂ ì ¸ ¬ üÈÄ¢ø Á¡üÈõ

$$= \left\{\frac{1}{2}m_1\left(\underline{v_1}'.\underline{v_1}'\right) - \frac{1}{2}m_1\left(\underline{v_1}.\underline{v_1}\right)\right\} + \left\{\frac{1}{2}m_2\left(\underline{v_2}'.\underline{v_2}'\right) - \frac{1}{2}m_2\left(\underline{v_2}.\underline{v_2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(\underline{v_1}'^2 - \underline{v_1}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\underline{v_2}'^2 - \underline{v_2}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1\underline{v_1}'^2 + m_2\underline{v_2}'^2\right) - \frac{1}{2}\left(m_1\underline{v_1}^2 + m_2\underline{v_2}^2\right)$$

þõÁ¡üÈò¾¢ ý Á¾¢ô ¨ Àô À¢ ý ÅÕõ º÷Å ºÁ ý À¡ Î ¸ ¨ Çô ÀÂ ý À Î ò¾¢ô ¦ÀÈÄ¡õ.

$$\left(m_1 + m_2\right)\left(m_1v_1^2 + m_2v_2^2\right) = \left(m_1v_1 + m_2v_2\right)^2 + m_1m_2\left(v_1 - v_2\right)^2$$

$$\left(m_1 + m_2\right)\left(m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2\right) = \left(m_1v_1' + m_2v_2'\right)^2 + m_1m_2\left(v_1' - v_2'\right)^2$$

þÂ ì ¸ ¬ üÈÄ¢ø Á¡üÈõ

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{m_1m_2}{\left(m_1 + m_2\right)}\left\{\left(v_1' - v_2'\right)^2 - \left(v_1 - v_2\right)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{m_1m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left[e^2\left(v_1 - v_2\right)^2 - \left(v_1 - v_2\right)^2\right]$$

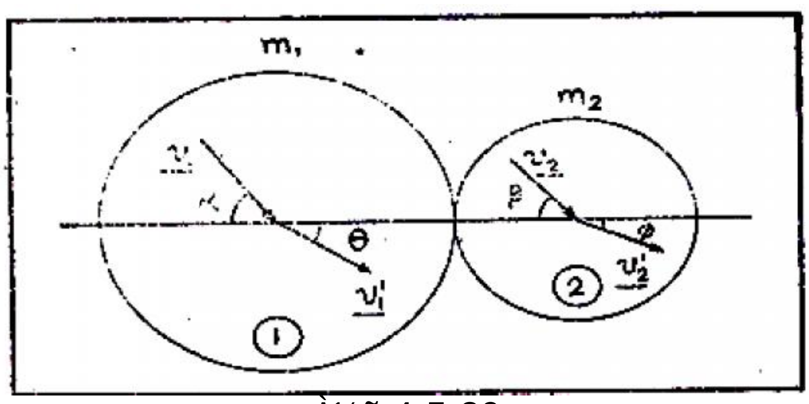
$$= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left(1-e^2\right)\left(v_1-v_2\right)^2, (e<1)$$

· þÂì¸ ¬üÈÄ¢ø þÆôÒ

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left(1-e^2\right)\left(v_1-v_2\right)^2$$

4.5.19 þÕ §¸¡Ç í¸Ç¢ý º¡¢× §Á¡Ð¨¸ (Olique impact of two spheres)

m_1 ±ýÈ ¿¢¨È¨ÂÔõ V_1 ±ýÈ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾Ôõ ¦¸¡ñ¼ ÁÆôÀ¡É §¸¡Çõ m_2 ±ýÈ ¿¢¨È¨ÂÔõ V_2 ±ýÈ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾Ôõ ¦¸¡ñ¼ Áü¦È¡Õ ÁÆÁÆôÀ¡É §¸¡ÇòÐ¼ý º¡öÅ¡¸ §Á¡Ð¸¢ÈÐ. §¸¡Ç í¸Ç¢ý þÂì¸ ¾¢¨º¸û §¸¡Ç ¨ÁÂí¸¨Ç þ¨½ìÌõ §¸¡ðÎ¼ý Ó¨È§Â ~, ±ýÛõ §¸¡½îº¡öÅ¢Ö ûÇÉ. §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý §¸¡Çí¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸í¸¨Çì ¸¡Ï ¾ø. §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý, §¸¡Çí¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸í¸û Ó¨È§Â $\underline{V_1'}, \underline{V_2'}$ ¬Ì¸. «¨Å¸û ¦ºÂüÀÎõ ¾¢¨º¸û, ¨ÁÂí¸¨Ç þ¨½ìÌõ §¸¡ðÎ¼ý ¯,¤ ±ýÛõ §¸¡½îº¡öÅ¢ø À¼õ (4.5.20)-ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨ÁÂðÎõ.



À¼õ 4-5-20

§¸¡Çí¸û ÁÆÁÆôÀ¡É ¨ÅÂ¡¾Ä¡ø, «ÅüÈ¢ý ¦¾¡Î§¸¡ðÎò ¾¢¨ºÂ¢ø Å¢¨º§ÂÐÁ¢ø ¨Ä. ¬¾Ä¡ø, «ÅüÈ¢ý ¨ÁÂí¸¨Ç þ¨½ìÌõ §¸¡ðÊüÌî ¦ºíÌòÐò ¾¢¨ºÂ¢ø §¸¡Çí¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸í¸Ç¢ø Á¡Ú¾ø ¸¢¨¼Â¡Ð.

$$\therefore \underline{v_1}'\sin\text{¯} = \underline{v_1}\sin\sim ....(1)$$

$$\underline{v_2}'\sin\text{¤} = \underline{v_2}\sin \quad ....(2)$$

¿¢äð¼É¢ý À¡¢§º¡¾¨É Å¢¾¢ôÀÊ.

$$\underline{v_1}'\cos\text{¯} - \underline{v_2}'\cos\text{¤} = -e\left(\underline{v_1}\cos\sim - \underline{v_2}\cos \quad\right)........(3)$$

§ÁÖõ §Á¡Ð ¨¸Â¢ý §À¡Ð §¸¡½ í¸Ç¢ýÁ¢Ð ¦ºÂüÀÎõ ¸½ò¾¡ì¸ Å¢¨º¸û ¨ÁÂì§¸¡ðÊ§Ä§Â ºÁÛõ ±¾¢ÕÁ¡ö þÕôÀ¾¡ø «ì§¸¡ðÊÖûÇ ¦Á¡ò¾ ¯ó¾õ Á¡È¡Ð.

±É§Å

$$m_1\underline{v_1}'\cos¯ - m_2\underline{v_2}'\cos¤ = m_1\underline{v_1}\cos\sim - m_2\underline{v_2}\cos \quad ....(4)$$

¬ Ìõ.

§Áü ÜÈ¢Â ¿¡ý Ì ºÁý À¡ Î ¸Ç¢Ä¢ÕóÐ, $\underline{v_1}',\underline{v_2}'$ ¯,¤ ±ýÀÅü¨È Å ¨ÃÂÚì¸Ä¡õ.

$(3)\times m_2+(4)$ ±ýÀÐ

$$\left(m_1+m_2\right)\underline{v_1}'\cos¯ = \left(m_1-em_2\right)\underline{v_1}\cos\sim + \left(1+e\right)m_2\underline{v_2}\cos$$

«¾¡ÅÐ,

$$\underline{v_1}'\cos¯ = \frac{\left(m_1-em_2\right)\underline{v_1}\cos\sim + \left(1+e\right)m_2\underline{v_2}\cos}{\left(m_1+m_2\right)} ....(5)$$ ¬ Ìõ.

«ùÅ¡§È.

$$\underline{v_2}'\cos¯ = \frac{\left(m_1-em_1\right)\underline{v_2}\cos \quad + \left(1+e\right)m_1\underline{v_1}\cos\sim}{\left(m_1+m_2\right)} ....(6)$$ ¬ Ìõ.

4.5.19.1 §¸¡Ç í¸û ´ýÈ¢ýÁ¢Ð Áü¦È¡ýÚ §Á¡Ð ¨¸Â¡ø ¦ºÂüÀÎòÐõ ¾¡ì¸ Ç ¨Å.

m_1 ¿¢ ¨ÈÔ ¨¼Â §¸¡½ò¾¢ý Á¢ÐûÇ §Á¡Ð ¨¸ò ¾¡ì¸Ç ¨Å = «ì§¸¡Çò¾¢ý ¯ó¾ Á¡üÈõ $= m_1\left(\underline{v_1}'\cos¯ - \underline{v_1}\cos\sim\right)$

$$= -\frac{m_1m_2(1+e)}{\left(m_1+m_2\right)}\left(\underline{v_1}\cos\sim - \underline{v_2}\cos \quad \right)............(7)$$ ¬ Ìõ.

[ÌÈ¢ôÒ. (i) m_2 ¿¢ ¨ÈÔ ¨¼Â §¸¡Çò¾¢ý ¸½ò¾¡ì Ì Å¢ ¨º m_1 þÂí Ìõ ¾¢ ¨ºìÌ ±¾¢÷ò¾¢ ¨ºÂ¢ø ¦ºÂüÀÎÅ¾¡ø m_1 ¿¢ ¨ÈÔ ¨¼Â §¸¡Çò¾¢ø ¯ó¾ þÆôÒ ²üÀÎ¸¢ÈÐ. « ¨¾ þ í Ì Ì ¨Èì ÌÈ¢ ¦ÅÇ¢ôÀÎòÐ¸¢ÈÐ.

(ii) m_1 ¿¢ ¨ÈÔ ¨¼Â §¸¡Çò¾¢ø ¯ó¾ Á¢ Ì¾¢ ²üÀÎ¸¢ÈÐ.

(iii) $v_2 = 0$ ±É¢ý ¤ $= 0$ ¬ Ìõ.

(iv) $m_1 = m_2, e = 1$ ±É¢ý

$\underline{v_1}'\cos¯ = \underline{v_2}\cos$

$\underline{v_2}'\cos¤ = \underline{v_1}\cos\sim$ ¬ Ìõ].

4.5.19.2 º¡‡× §Á¡Ð ¨ ¸Â¡ø ²üÀ Î õ þÂ ì ¸ ¬ üÈø þÆôÒ.

Ð ¸ ð ¦ ¼¡ Ì ¾‡Â‡ø §Á¡Ð ¨ ¸Â¡ø ²üÀ Î õ þÂ ì ¸ ¬ üÈø Á¡üÈõ,

$$=\left(\frac{1}{2}m_1\underline{v_1}'^2+\frac{1}{2}m_1\underline{v_2}'^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1\underline{v_1}'^2+\frac{1}{2}m_1\underline{v_2}'^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}m_1\left(\underline{v_1}'^2\cos^2\text{¯}+\underline{v_1}'^2\sin^2\text{¯}\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\underline{v_2}'^2\cos^2\text{¤}+\underline{v_2}'^2\sin^2\text{¤}\right)$$

$$=\frac{1}{2}m_1\left(\underline{v_1}'^2\cos^2\sim+\underline{v_1}'^2\sin^2\sim\right)-\frac{1}{2}m_2\left(\underline{v_2}'^2\cos^2\quad+\underline{v_2}'^2\sin^2\quad\right)$$

¬ É ¡ø, þ í Ì §¸¡Ç í ¸û ÁÆÁÆôÀ¡ ¸ ¯ûÇ¾¡ø. « ÅüÈ‡ ý ¦¾¡ Î §¸ ¡ð Î ò¾‡ ¨ ºÂ‡ø ¯ûÇ §Å ¸ í ¸ û Á¡Ú¾Ä ¨ ¼Â¡.

$$\therefore v_1'\sin\text{¯}=v_1\sin\sim;\ v_2'\sin\text{¤}=v_2\sin$$

±É§Å þÂ ì ¸ ¬ Á¡üÈõ

$$=\frac{1}{2}\left(m_1\underline{v_1}'^2\cos^2\text{¯}+m_2\underline{v_2}'^2\cos^2\text{¤}\right)-\frac{1}{2}\left(m_1\underline{v_1}'^2\cos^2\sim+m_2\underline{v_2}'^2\cos^2\quad\right)$$

þ¾ ý Á¾‡ô ¨ Àô À‡ ý ÅÕÁ¡Ú ¸ ½ ì ¸‡ð Î Å ¨ ÃÂÚì ¸Ä¡õ.

$$(m_1+m_2)\left(m_1\underline{v_1}'^2\cos^2\text{¯}+m_2\underline{v_2}'^2\cos^2\text{¤}\right)=\left(m_1\underline{v_1}'\cos\text{¯}+m_2\underline{v_2}'\cos\text{¤}\right)^2+m_1m_2\left(\underline{v_1}\cos\text{¯}+\underline{v_2}\cos\text{¤}\right)^2$$

$$(m_1+m_2)\left(m_1\underline{v_1}'^2\cos^2\text{¯}+m_2\underline{v_2}'^2\cos^2\text{¤}\right)=\left(m_1\underline{v_1}'\cos\sim+m_2\underline{v_2}'\cos\quad\right)^2+m_1m_2\left(\underline{v_1}\cos\sim-\underline{v_2}\cos\quad\right)^2$$

· þÂ ì ¸ ¬ üÈø Á¡üÈõ

$$=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left[\left(v_1'\cos\text{¯}-v_2'\cos\text{¤}\right)^2-\left(v_1\cos\sim-v_2\cos\quad\right)^2\right]$$

$$=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left[e^2\left(v_1\cos\sim-v_2\cos\quad\right)^2-\left(v_1\cos\sim-v_2\cos\quad\right)^2\right]$$

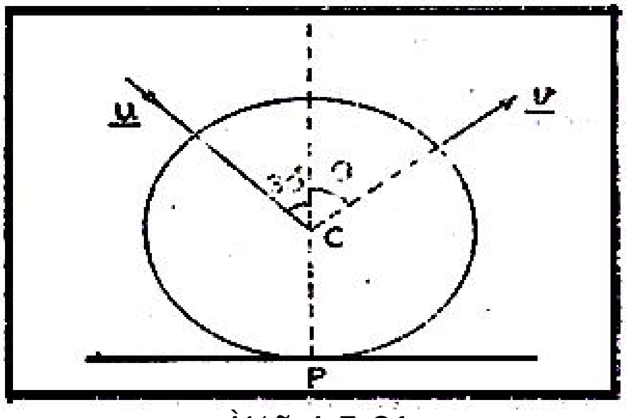
$$=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left(1-e^2\right)\left(v_1\cos\sim-v_2\cos\quad\right)^2$$

¬ ¾Ä¡ø þÂ ì ¸ ¬ üÈ‡ø þÆôÒ

$$=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left(1-e^2\right)\left(v_1\cos\sim-v_2\cos\quad\right)^2$$

4.5.20 Á¡¾‡¡‡ì ¸ ½ ì Ì ¸ û

4.5.20.1 2¸¦§Ä¡¸¦Ã¡õ ¿¦¨ÈÔûÇ §¸¡Ç¦Á¡ýÚ ÁÆÁÆôÀ¡É ¿¦¨ÄÂ¡É ¾Çò¾¦ýÁ¦Ð, «ò¾Çò¾¦ý ¦ºí Ì òÐì §¸¡ðÊüÌ 30° §¸¡½îº¡öÅ¦ø Å¦É¡Êì Ì 20Á¦ §Å¸òÐ¼ý Å¦Ø¸¦ÈÐ $e=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ¬Â¦ý §Á¡Ð¨¸ì Ìô À¦ý



À¼õ 4-5-21

§¸¡Çò¾¦ý þÂì¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸. «ýÈ¦Ôõ þÂì¸ ¬üÈÄ¦ý þÆô¨ÀÔõ ¸¡ñ¸. §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¦ý §¸¡Çõ ¦ºí ÌòÐì§¸¡ðÎ¼ý ¯ §¸¡½îº¡öÅ¦ø v ±ýÛõ §Å¸òÐ¼ý þÂí ÌÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.

$\underline{u}=20\underline{|30^\circ}\begin{Bmatrix}u\sin30^\circ\rightarrow\\ u\sin30^\circ\downarrow\end{Bmatrix};\ \underline{v}=v\underline{|\ \ }=\begin{Bmatrix}u\sin30^\circ\rightarrow\\ u\sin30^\circ\downarrow\end{Bmatrix}$

·¿¦ä ð¼É¦ý À¡¦§º¡¾¨É Å¦¾¦ôÀÊ,

$v\cos\theta^\circ-0=-e\left(-u\cos30^\circ-0\right)=eu\cos30^\circ$

$v\cos\theta^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\times20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10$ .... (i)

¸¦¨¼ò¾Çò¾¦üÌ þ¨½Â¡É ¾¦¨ºÂ¦ø Å¦¨º§ÂÐÁ¦ø¨Ä ±ýÀ¾¡ø

$v\sin\theta=u\sin30^\circ=20\times\frac{1}{2}=10$ .... (ii)

·(i) (ii) ±ýÛõ ºÁýÀ¡Î¸Ç¦Ä¦ÕóÐ

$v^2=100+100;\therefore u=10\sqrt{2}$ Á¦/Å¦

§ÁÖõ $\tan\theta=1;\therefore\theta^\circ=45^\circ$

±É§Å §¸¡Çõ §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¦ý Å¦É¡ÊìÌ $10\sqrt{2}$ Á¦ §Å¸ò¾¦ø ¦ºíÌòÐì§¸¡ðÊüÌ 45° §¸¡½îº¡öÅ¦ø þÂíÌõ.

§Á¡Ð¨¸Â¡ø þÂì¸ ¬üÈÄ¦ø ²üÀÎõ þÆôÒ $=\frac{1}{2}mu^2\cos^2\sim\left(1-e^2\right)$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 20\times 20\times \cos^2 30^\circ\left(1-\frac{1}{3}\right)=200\ \ f ¤ø ¸ û.$$

4.5.20.2 ´Õ ÀóÐ 1200 Á¢.Á¢ ¯ÂÃò¾¢Ä¢ÕóÐ Á¢û ºì¾¢Ô¨¼Â ´Õ ¸¢¨¼¾¾Çò¾¢ý §ÁøÀ¢Ø¸¢ýÈÐ. §Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý «Ð 80 Á¢.Á¢ ¯ÂÃò¾¢ü Ì ò ¦¾È¢ì Ì ¦ÁÉ¢ø ¿¢¨ÄÂ¢ð º¢ì ¦¸ØÅ¢ý Á¾¢ô¨Àì ¸¡ ñ ¸.

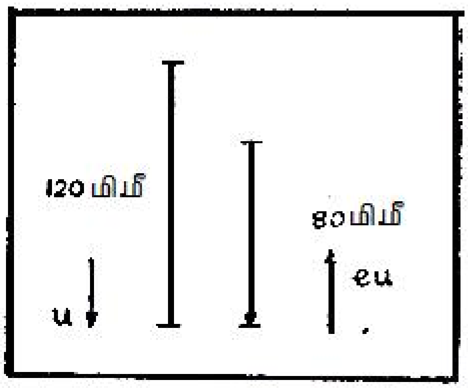
Àó¾¡ÉÐ ¸¢¨¼ò¾Çò¨¾ «Êì Ì õ§À¡Ð «¾ý §Å¸õ

$$u^2=\sqrt{2\times 981\times 120}$$

§Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý «¾ý §Å¸õ eu ¬ Ì õ. «Ð 80¦ºÁ¢ ¯ÂÃò¾¢ü Ì ¦¾È¢ôÀ¾¡É ¡ø.

$$e^2u^2=2\times 981\times 30$$

$$e^2=\frac{2\times 981\times 80}{2\times 981\times 120}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$



À¼õ 4-5-22

4.5.20.3 Ð¸¦Ç¡ýÚ h ±ýÛõ «Ç×ûÇ ¯ÂÃò¾¢ÄÕóÐ ¿¢¨ÄÂ¡É ´Õ ¸¢¨¼¾¾Çò¾¢ý §ÁøÀ¢Ø¸¢ÈÐ. ¿¢¨ÄÂ¢ð º¢ì ¦¸Ø ¤ ¬É¡ø «òÐ¸û ¦¾È¢ô¨À ÓÊì Ì Ó ý ¿¢¨Äì Ì òÐò ¾¢¨ºÂ¢ø ¸¼ó¾ ÓØò¦¾¡¨Ä× $\frac{1+¤^2}{1-¤^2}h$ ±É ×õ ¸Æ¢ó¾ §¿Ãõ $\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+¤^2}{1-¤^2}\right)$ ±É ×õ ¸¡ð Î ¸.

Ð¸Ç¡ÉÐ ¸¢¨¼¾¾Çò¨¾ Ó¾ý Ó¨È ¿¢¨Äì Ì ò¾¡¸ «Êì Ì õ§À¡Ð «¾ý §Å¸õ u ¬ Ì ¸. $\therefore u^2=2gh$ Ó¾ø §Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý «Ð ¤u §Å¸òÐ¼ý ¦¾È¢ì Ì õ. «Ð ÁÚÀÊÔõ «ò¾Çò¨¾ «Êì Ì õ§À¡ÐûÇ §Å¸õ þÃ ñ¼¡ÅÐ §Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý «Ð $¤(¤u)-¤^2u$ ±ýÛõ §Å¸ò¾¢ø ¦¾È¢ì Ì õ. «ùÅ¡§È ã ýÈ¡ÅÐ, ¿¡ý¸¡ÅÐ §Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý Ð¸û $¤^3u, ¤^4u$ ±ýÛõ §Å¸ò¾¢ø ¦¾È¢ì Ì õ. Ó¾Ä¡ÅÐ, þÃ ñ¼¡ÅÐ, ã ýÈ¡ÅÐ §Á¡Ð¨¸ì Ì ôÀ¢ý «òÐ¸û ±Øó¾ ¯ÂÃí ¸û Ó¨È§Â

$$\frac{(¤u)^2}{2g},\frac{(¤^2u)^2}{2g},\frac{(¤^3u)^2}{2g}\ ....\text{¬ Ì õ.}$$

¿¦ ¨ Äì Ì òÐ ¾¦ ¨ ºÂ¦ø Ð¸û ¦º ýÈ ¦Á¡ò¾ò ¦¾¡ ¨ Ä×

$$= h + 2\left(\frac{¤^4u^2}{2g}\right) + 2\left(\frac{¤^6u^2}{2g}\right) + ...$$

$$= h + 2\left(¤^2h + ¤^4h + ¤^6h + ...\right), u^2 = 2gh$$

$$= h + 2h¤^2\left(1 + ¤^2 + ¤^4 + ...\right)$$

$$= h + 2h¤^2.\frac{1}{1-¤^2} = \frac{1-¤^2}{1+¤^2}h$$

¦¾¡¼ì ¸ò¾¦ø Ð¸û ¾ ¨ Ã ¨ Â «Êì ¸ ±Î ò¾§¿Ãõ $\frac{u}{g}$ Ó¾Ä¡ÅÐ, þÃ ñ ¼¡ÅÐ,

ã ýÈÅ¡Ð §Á¡Ð ¨ ¸ì Ì ôÀ¦ý Ð¸û $¤u,¤^2u,¤^3u$....... ±ý Ûõ §Å¸ í ¸Ç¦ø ¦¾È¦ôÀ¾¡ø « ¨ Å¸û ÒÅ¦Â÷ôÀ¦É¡ø «Æ¦ì ¸ôÀ¼ò §¾ ¨ ÅÂ¡É §¿Ãí ¸û Ó ¨ È§Â.

$$\frac{¤u}{g},\frac{¤^2u}{g}........\text{¬ Ì õ.}$$

±É§Å «òÐ¸û þÂì ¸ò¾¦Ä¦Õó¾ ¦Á¡ò¾ §¿Ãõ

$$= \frac{u}{g} + 2\left(\frac{¤u}{g}\right) + 2\left(\frac{¤^2u}{g}\right) + 2\left(\frac{¤^2u}{g}\right) + ...$$

$$= \frac{u}{g} + 2\frac{¤u}{g}\left(1 + ¤ + ¤^2 + ...\right)$$

$$= \frac{u}{g}\left[1 + 2¤\left(\frac{1}{1-¤}\right)\right] = \frac{u}{g}\left(\frac{1+¤}{1-¤}\right)$$

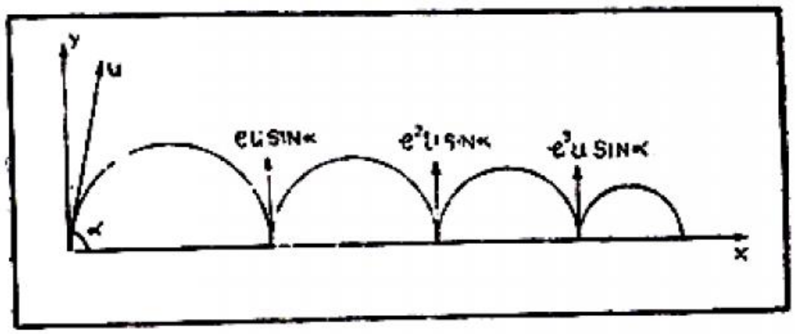
$$= \frac{2gh}{g}\left(\frac{1+¤}{1-¤}\right), \left(u^2 = 2gh\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+¤}{1-¤}\right)$$

4.5.20.4 ÅÆÅÆôÀ¡É ´Õ ¸¦ ¨ ¼¾Çò¾¦Öû Ç ´Õ ÒûÇ¦Â¦Ä¦ÕóÐ Ð¸¦Ç¡ýÚ ¸¦ ¨ ¼¾Çò¾¦üÌ ~ §¸¡½ îº¡öÅ¦ø, u ±ý Ûõ §Å¸òÐ¼ý ±È¦ÂôÀÎ ¸¦ÈÐ. «òÐ¸Ù ìÌõ «ò¾Çò¾¦üÌõ þ ¨ ¼Â¦Öû Ç ¿¦ ¨ ÄÁ¦ð º¦ì ¦¸Ø ¤ ¬Â¦ý «òÐ¸û

¦¾È¢òÐ µöÅ¾ü Ì Ó ý ¸Æ¢Ôõ §¿Ãò ¨¾Ôõ, «ò¾Çò¾¢ ý Á¢Ð ¦º ý È ¦¾¡ ¨ Ä ¨ ÅÔõ ¸¡ ñ ¸.

¾Çò¾¢ ý ¿¢ ¨ Äì Ì òÐò ¾¢ ¨ ºÂ¢ø Ð¸Ç¢ ý þÂì ¸ò ¨ ¾ §¿¡ì Ì ¸. ¦¾¡¼ì ¸ ¿¢ ¨ Äì Ì òÐ §Å¸õ = usin~ Ó¾Ä¡ÅÐ, þÃ ñ ¼¡ÅÐ ã ýÈÅÐ .... §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¢ ý Ð¸¦Ç¡ ýÈ¢ü Ì ¡¢Â ¾¡ì ¸Ç ¨ Å ¯ó¾ì§¸¡ðÀ¡ Î Ð¸Ç¢ ý ¿¢ ¨ Äì Ì òÐ¦¾È¢ôÒ §Å¸ í ¸û Ó ¨ È§Â $¤u\sin\sim$ ¬ Ì õ. ¦¾¡¼ì ¸ò¾¢Ä¢ÕóÐ ,, $¤^{2}u\ \sin\sim$,$¤^{3}u\ \sin\sim$



À¼õ 4-5-23

Ó¾Ä¡ÅÐ §Á¡Ð ¨ ¸ì Ì Ó ý , Ð¸û þÂí Ì Å¾ü Ì ±Î ò¾ §¿Ãõ = $\dfrac{2u\ \sin\sim}{g}$ «ùÅ¡§È Ó¾Ä¡ÅÐ, þÃ ñ ¼¡ÅÐ §Á¡Ð ¨ ¸ ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼§ÂÔûÇ §¿Ãõ= $\dfrac{2u(\sin\sim)¤}{g}$ «Ð §À¡Ä§Å Áü ¨ ÈÂ « Îò¾Îò¾Ð ¿¢¸Øõ §Á¡¾ø¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢ø ¸Æ¢ó¾ §¿Ãí ¸û, $\dfrac{2¤^{2}u\sin\sim}{g}$,$\dfrac{2¤^{3}u\sin\sim}{g}$ ¬ Ì õ.
±É§Å Ð¸û ¦¾È¢òÐ µöÅ¾ü Ì Ó ý ¸Æ¢Ôõ§¿Ãõ.

$$= \frac{2u\ \sin\sim}{g} + \frac{2¤u\ \sin\sim}{g} + \frac{2¤^{2}u\ \sin\sim}{g} + \ldots;\ldots;\ldots.$$

$$= \frac{2u\ \sin\sim}{g}\left(1 + ¤ + ¤^{2} + \ldots\ldots\right), ¤ < 1$$

$$= \frac{2u\ \sin\sim}{g}.\frac{1}{1-¤} = \frac{2u\ \sin\sim}{(1-¤)\,g}$$

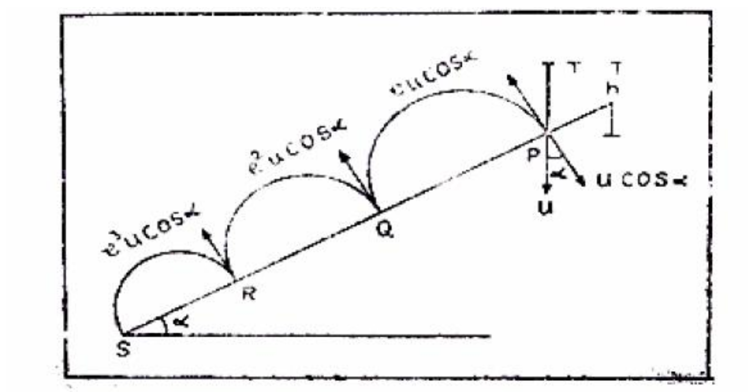
¸¢ ¨ ¼¾¢ ¨ ºÂ¢ø þÂì ¸ò ¨ ¾ ¾Îôÿ¾ü Ì ±ùÅ¢¾ Å¢ ¨ ºÔõ þøÄ¡ ¨ ÁÂ¡ø Ð¸Ç¢ý ¸¢ ¨ ¼§Å¸õ, §Á¡Ð ¨ ¸ ¸Ç¡ø Á¡È¡¾Õì Ì õ. ¬ ¸§Å ¸¢ ¨ ¼§Å¸õ ±ô§À¡Ðõ ,,,,,,, $u\cos\sim$ ¬ ¸§Å þÕì Ì õ. ±É§Å Ð¸û ¦º ýÈ ¸¢ ¨ ¼ò¦¾¡ ¨ Ä×

$$= \frac{2u\sin\sim}{g} \cdot \frac{1}{1-¤} . u\cos\sim = \frac{u^2\sin 2\sim}{g(1-¤)}$$

(Ì È¢ôÒ Ð¸Ç¢ý ¦¾È¢ôÒ ¿¢ýÈÀ¢ý «Ð «ò¾Çò¾¢ý ÁÐ $u\cos\sim$ ±ýÛõ ºÃ¡É §Å¸òÐ¼ý þÂí Ìõ.

4.5.20.5 Áð¼¢ì¦¸Ø e ¯¨¼Â Ð¸¦Ç¡ýÚ , 6 Á ¯ÂÃò¾¢Ä¢ÕóÐ Å¢¼ôÀð Î ¸¢¨¼ Áð¼ò¾¢üÌ 30° §¸¡½ò¾¢ø º¡öó¾ 3Á ¿¢ÇÓûÇ ´Õ º¡ö¾Çò¾¢ý ¯îº¢Â¢ø §Á¡Ð¸¢ÈÐ. Ð¸û º¡ö¾Çò¾¢ý «Ê¨Â ã ýÚ ¦¾È¢ôÒ¸Ç¢ø «¨¼Ô¦ÁÉ¢ø $e(1+e)\left(1+c^2\right)\left(1+e+e^2\right)=0.25$±É ¿¢Ú×¸.

À¼õ (4.5.24)ø PQRS ±ýÀÐ º¡ö¾Çò¾¢ý Á¢Ì¾¢î º¡ö×ì§¸¡ð¨¼ì ÌÈ¢ì¸¢ÈÐ. Ð¸û pÂ¢ø Å¢ØóÐ «Îò¾Îò ÐûÇ ¦¾È¢ôÒ¸Ç¢ø Q,R,S ±ýÛÁ¢¼í¸ÇÇ¢Ä¢ÕôÀ¨¾ì ¦¸¡û¸. Ð¸û PÂ¢ø §Á¡Ðõ§À¡Ð ¿¢¨Äì Ìò¾¡¸ì ¸úÌ§¿¡ì¸¢Â §Å¸õ $u=\sqrt{2gh}=\sqrt{2g\times6}=\sqrt{12g.u}$ ±ýÛõ §Å¸ò¨¾ º¡ö¾Çò¾¢üÌ î ¦ºíÌò¾¡É ¾¢¨ºÂ¢Öõ «ò¾Çò¾¢üÌ þ¨½Â¡¸ ¸úÓ¸Á¡É ¾¢¨ºÂ¢Öõ À¢¡¢ì¸ «¨Å Ó¨È§Â $u\cos\sim, u\sin\sim$ $u\cos\sim, u\sin\sim$ ¬ Ìõ. PÂ¢ø §Á¡Ð¨¸



À¼õ 4-5-24

¿¢¸Øõ§À¡Ð º¡ö¾Çò¾¢üÌ þ¨½Â¡¸ ´Õ Å¢¨ºÔÁ¢ø¨Ä. º¡ö¾Çò¾¢üÌî ¦ºíÌò¾¡¸§Å ¸½ò¾¡ìÌ ±¾¢÷¾¢¨º¦Â¡ýÚ ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ. ¬¸§Å $u\sin\sim$ ±ýÛõ À¸¢÷× §Á¡Ð¨¸Â¡ø À¡¾¢ì¸ôÀÎÅ¾¢ø¨Ä. ¬É¡ø $u\cos\sim$ ±ýÛõ À¸¢÷×§Å¸õ,,,,,,,,,, $ue\cos\sim$ ¬¸ò ¾¢ÕôÀôÀÎ¸¢ÈÐ. Ð¸û ´Õ ÀÃÅ¨Ç×ô À¡¨¾Â¢ø ¦ºýÚ Qø º¡ö¾Çò¾¢üÌ ¦ºíÌò¾¡¸ $eu\cos\sim$ ±ýÛõ §Å¸òÐ¼ý §Á¡Ð¸¢ÈÐ. §Á¡Ð¨¸ì Ìô¾À¢ý þÐ $e^2u\cos\sim$ ±ýÛõ §Å¸òÐ¼ý ¾¢ÕôÀôÀÎ¸¢ÈÐ, ÁÚÀÊôõ Ð¸û º¡ö¾Çò¾¢üÌî ¦ºíÌò¾¡¸ $e^2u\cos\sim$ ±ýÛõ §Å¸òÐ¼ý º¡ö¾Çò¨¾ R ±ýÛõ ÒûÇ¢Â¢ø §Á¡Ð¸¢ÈÐ. À¢ýÒ þÐ $e^3u\cos\sim$ ±ýÛõ §Å¸òÐ¼ý ¾¢ÕôÀôÀÎ¸¢ÈÐ.

PQ,QR,RS ±ý Ûõ §¸¡Î¸Ù ì¸¢¨¼Â¢ø «¨ÁÔõ ÀÃÅ¨Ç×ô À¡¨¾¸¨Ç Å¨ÃÂ Ð¸û ±Î òÐì¦¸¡û Ùõ §¿Ãõ t_1, t_2, t_3 ¬ Ìõ. º¡ö¾Çò¾¢ü Ì î ¦º í ÌòÐ ¾¢¨ºÂ¢ø Ð¸Ç¢ý þÂì¸ò¨¾ §¿¡ì Ì ¸. t_1§¿Ãò¾¢ø º¡ö¾Çò¾¢ü Ì î ¦º í Ìò¾¡¸ ¦ºýÈ ¦¾¡¨Ä× âîº¢ÂÁ¡ Ìõ.
±É§Å

$$0 = eu\ \cos\sim t_1 - \frac{1}{2} g \cos\sim t_1^2;$$

$$\therefore t_1 = \frac{2e\cos\sim}{g\cos\sim} = \frac{2eu}{g}$$

« ùÅ¡§È

$$t_2 = \frac{2e^2 u}{g}; t^3 = \frac{2e^3 u}{g}$$

±É§Å Ð¸û PÂ¢Ä¢ÕóÐ S ±ý ÛÁ¢¼ò¨¾Â¨¼Â ±Î òÐì¦¸¡ ñ¼ §¿Ãõ $= t_1 + t_2 + t_3 = \frac{2eu}{g}\left(1 + ¤ + ¤^2\right)$ þ§¾§¿Ãò¾¢ø Ð¸¦Ç¡ýÚ º¡ö¾Çò¾¢ø ¸¦ú§¿¡ì¸¢ÂÅ¡Ú þÂí¸¢Â ¦¾¡¨Ä× 4Á¦ ¬ Ìõ. ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø º¡ö¾Çò¾¢ý ¸¦ú§¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø $u\sin\sim$ ±ý Ûõ §Å¸ò¨¾ò Ð¸Ç¡ÉÐ ¦ÀüÚûÇÐ. «¾ý ®÷ôÒ Ó Î ì¸õ $g\sin\sim$ ¬ Ìõ.

$$\therefore u\sin\sim(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{1}{2} g\sin\sim(t_1 + t_2 + t_3)^2 = 4$$

«¾¡ÅÐ $u\sin\sim \frac{2eu}{g}(1 + e_2 + e_3) + \frac{1}{2} g\sin\sim \frac{4e^2u^2}{g^2}(1 + e_2 + e_3) = 4$

«¾¡ÅÐ $\frac{2eu^2\sin\sim}{g}(1 + e + e) + \frac{2e^2u^2\sin\sim}{g}(1 + e + e) = 4$

«¾¡ÅÐ $\frac{2eu^2\sin\sim}{g}(1 + e + e^2)\left[1 + e\ (1 + e + e^2)\right] = 4$

«¾¡ÅÐ $\frac{2eu^2\sin\sim}{g}(1 + e + e^2)\left(1 + e\right)\left(1 + e^2\right) = 4$

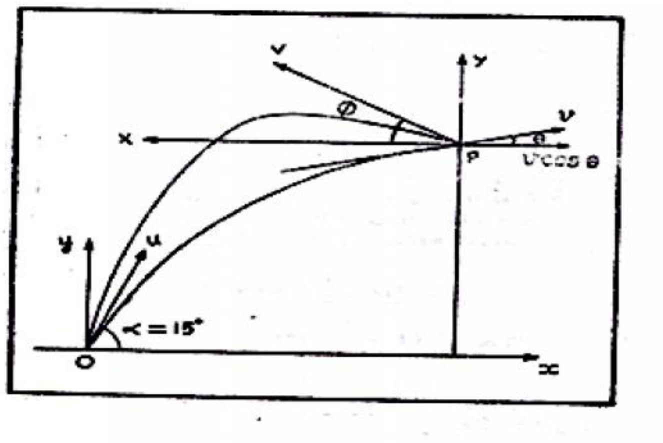
$$\therefore e\left(1 + e\right)\left(1 + e^2\right)\left(1 + e + e^2\right)$$

$$= \frac{3g}{2u^2\sin\sim} = \frac{3g}{2 \times 12g\sin 30^\circ} = \frac{1}{4} = 0.25$$

4.5.20.6 ´Õ Àó¾¡ÉÐ 15° ²üÈì §¸¡½ò¾¢ø 35Á¦ ¦¾¡¨ÄÅ¢Öû Ç ´Õ ÁÆÁÆôÀ¡É ¿¢¨Äì ÌòÐî ÍÅ¡¢ø §Á¡¾¢, ²È¢ ÒûÇ¢¨Â Á¦ ñ Îõ «¨¼¸¢ÈÐ. Àó¾¢ü Ì õ ÍÅÕì ÌÁ¢¨¼§ÂÔûÇ ¿¢¨ÄÁ¦ð º¢ì¦¸ØÅ¢ý Á¾¢ô¨Àì ¸¡ ñ ¸

$\left[g = 9.8\text{Á}/\text{Å}^2\right]$ ±É ì ¦¸¡û¸

Ó¾ø ÅÆ : Àó¾¡ÉÐ ÁÆÁÆôÀ¡É ÍÅ¡ø P ±ý Ûõ þ¼ò¾ø §Á¡ÐÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «ôÒûÇ h Á¯ÂÃò¾ø þÕôÀ¾¡¸ø P(25, h) ±ý Ûõ ÒûÇ



À¼õ 4-5-25

$y = x\tan\sim - \dfrac{2x^2}{2u^2\cos^2\sim}$ ±ý Ûõ À¡¨¾ÂÖûÇÐ.

$h = 25\tan 15 - \dfrac{9.8\times 25\times 25\times 4\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\times 35\times 35}$

$h = 25\left(2-\sqrt{3}\right) - 10\left(2-\sqrt{3}\right) = 15\left(2-\sqrt{3}\right)$

ÍÅ¨Ã §Á¡Ðõ§À¡Ð Àó¾ý §Å¸õ, v ±É×õ «¾ý ¾¨º¸¨¼ì §¸¡ðÎ¼ý ¯ ±ý Ûõ §¸¡½î º¡ÅÁø ¯ûÇÐ ±É×õ ¦¸¡û¸. §Á¡Ð¨¸ì ÌôÀý, Àó¾¡ÉÐ ¤ ²üÈì §¸¡½ò¾ø V Á §Å¸òÐ¼ý ¦¾ÈôÀ¾¡¸ø

$V = \cos\text{¤} = ev\cos^{-} = eu\cos\sim$

$V\sin\text{¤} = v\sin^{-} = \sqrt{u^2\sin^2\sim - 2gh}$

$\therefore \tan\text{¤} = \dfrac{1}{e}\dfrac{\sqrt{u^2\sin^2\sim - 2gh}}{u\cos\sim} = \dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{5e}$

¬ Ìõ.

§Á¡Ð¨¸ì ÌôÀý Àó¾¡ÉÐ 0 ¨Å «¨¼Å¾¡ø Px, Py ±ý Ûõ «îÍ¸¨Çì ÌÈòÐ 0 $\left(25, -15\left(2-\sqrt{3}\right)\right)$ ±ý Ûõ ÒûÇ $y = x\tan\text{¤} - \dfrac{gx^2}{2V^2\cos^2\text{¤}}$ ±ý Ûõ Å¨Ç×ô À¡¨¾Âø þÕì Ìõ.

$$\therefore = 15\left(2-\sqrt{3}\right) = 25\times\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{54} - \frac{9.8\times25\times25\times4\left(2-\sqrt{3}\right)}{2e^{2}.35\times35\times1}$$

$$-3 = \frac{1}{e} - \frac{2}{e^{2}}; 3e^{2} + e - 2 = 0$$

$e = \frac{2}{3}$ « øÄÐ -1 ¬ Ì õ.

$e = -1$ ±ý ÀÐ ÒÈì ¸ ½¢ì ¸ôÀ Î õ.

±É§Å $e = \frac{2}{3}$ ¬ Ì õ.

þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÅÆ¢

Àó¾¡ ÉÐ ±È¢¾¡ Éò¾¢Ä¢ÕóÐ P ±ý Û õ ÒûÇ¢ ¨Â « ¨¼Â ±Î ò¾§¿Ãõ t_1 ±É ×õ À¢È Ì PÂ¢Ä¢ÕóÐ Áü¦È¡Õ Å ¨Ç×ôÀ¡ ¨¾Â¢ø 0 ¨Å Åó¾ ¨¼Â ±Î ò¾ §¿Ãõ t_2 ±É ×õ ¦ ¸¡û ¸. $(t_1 + t_2)$ ±ý Ûõ §¿Ãò¾¢ø Ð¸Ç¡ ÉÐ ¦º í Ì òÐò ¾¢ ¨ºÂ¢ø ¦º ýÈ ¦Á¡ò¾ò¦¾¡ ¨Ä× âîº¢ÂÁ¡ Ì õ.

$$\therefore\ 0 = u\sin\sim\left(t_1 + t_2\right) - \frac{1}{2}g\left(t_1 + t_2\right)^{2}$$

$$\therefore\ t_1 + t_2 = \frac{2u\sin\sim}{g}$$

§Á¡Ð ¨ ¸ì Ì Óý Àó¾¡ ÉÐ ¸¢ ¨¼Â¡ ¸î ¦º ýÈ¦¾¡ ¨Ä× 25Á ±ýÀ¾¡ø $\left(u\cos\sim\right)t_1 = 25$ §Á¡Ð ¨ ¸ì Ì ôÀ¢ý Àó¾¡ ÉÐ «§¾ ¸¢ ¨¼ò¦¾¡ ¨Ä ¨Å ¸¼ôÀ¾¡ø

$$\left(eu\cos\sim\right)t_2 = 25; t_1 = \frac{25}{u\cos\sim}; t_2 = \frac{25}{eu\cos\sim}$$

$$\therefore\ \frac{25}{u\cos\sim} + \frac{25}{eu\cos\sim} = \frac{2u\sin\sim}{g}$$

$$25\left(1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{2u^{2}\sin\sim\cos\sim}{g}$$

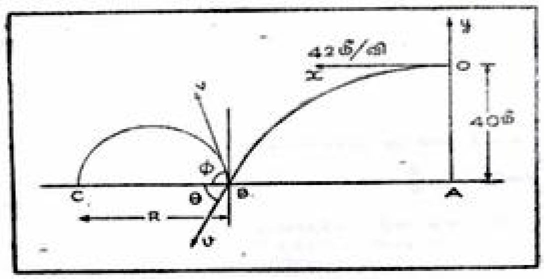
$$1 + \frac{1}{e} = \frac{e^{2}\sin 2\sim}{g}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\therefore\ e = \frac{2}{3}$$

4.5.20.7 ´Õ ÅÆÅÆôÀ¡É Á¢ð¼¢Ôû Ç ÀóÐ 40Á ¯ÂÃÓ ûÇ ´Õ §¸¡ÒÃò¾¢ý ¯îº¢Â¢Ä¢ÕóÐ Å¢É¡Êì Ì 42Á ¾¢ ¨º§Å¸òÐ¼ý ±È¢ÂôÀ Î ¸¢ÈÐ.

Á¦ð º¢ì ¦ ¸Ø $\frac{1}{4}$ ¬ Â¢ý ÀóÐ ¾¨Ã¨Â §Á¡¾¢ÂÀ¢ý « Î òÐ û Ç Ó¾ø ¦¾È¢ôÀ¢ø «¾ý ¸¢¨¼ Å¦î Í 60Á¦ ¬ Ì ¦ÁÉ ì ¸¡ð Î ¸



À¼õ 4-5-26

ÀóÐ ¾¨Ã¨Â B ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø ¸¢¨¼ì§¸¡ð Î ¼ý ¯ §¸¡ ½ î º¡¢Å¢ø v ±ý Û õ §Å¸ò¾¢ø §Á¡¾ð Î õ. §Á¡¾¢ÂÀ¢ý «Ð V §Å¸òÐ¼ý ¸¢¨¼ì§¸¡ð Î ¼ý ¤ ±ý Û õ ²üÈì §¸¡ ½ î º¡öÅ¢ø ¦¾È¢ì ¸ð Î õ. ¸¢¨¼ò¾¢¨ºÂ¢ø Å¢¨º ±Ð×Á¢ø ¨Ä ±ýÀ¾¡ø $V\cos¤ = V\cos¯$ = 42Á¦ /Å¢ ¬ Ì õ.

¿¢ä ð¼É¢ý À¡¢§º¡¾¨ É Å¢¾¢ôÀÊ,

$$V\ \sin¤ = ev\sin¤ = e\sqrt{\left(42\sin¯\text{-}\right)^{2} + 2\times 9.81\times 40;}$$

$$= \frac{1}{4}\times 28 = 7\ Á¦/Å¢$$

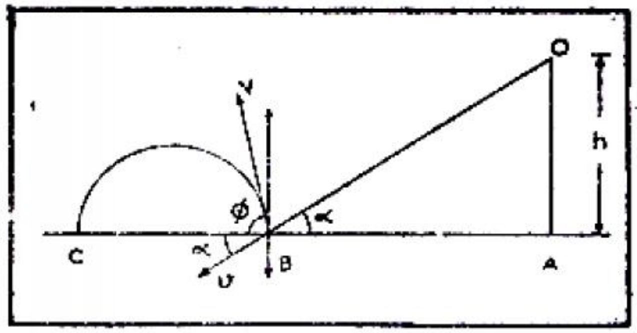
ÀóÐ ÁÚÓ¨È ¸¢¨¼ò¾Çò¨¾ C ±ý Û Á¢¼ò¾¢ø §Á¡ÐÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. «ô§À¡Ð «¾ý ¸¢¨¼Å¦î Í

$$R = \frac{(2V\ \cos¤)(V\ \sin¤)}{g}$$

$$= \frac{2\times 42\times 7}{9.8}$$

= 60Á¦/ ¬ Ì õ.

4.5.20.8 ¸¢¨¼Áð¼òÐ¼ý ~ §¸¡ ½ î º¡öÅ¢ø ¯û Ç ´ Õ º¡ö¾Çò¾¢ý ¯ÂÃõ h ¬ Ì õ. ¦¸¡ Î ì ¸ôÀð¼ ´ Õ Á¦û ºì¾¢Ô¨¼Â ´ Õ ÀóÐ «î º¡ö¾Çò¾¢ý Á¦Ð ¸¦Ó¸Á¡¸ þÂí ¸¢ «¾ý «ÊÂ¢Ö û Ç ´ Õ ÅÆÅÆôÀ¡É ¿¢¨Äì ¸¢¨¼¾Çò¾¢ý Á¦Ð §Á¡Ð¸¢ýÈÐ. «ì ¸¢¨¼¾Çò¾¢ý Á¦Ð «ôÀó¾¢ý Å¦î ¨ºì ¸¡ ñ ¸



À¼õ 4-5-27

À¼õ (4.5.27)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ÀóÐ B ³ « ¨¼Ôõ§À¡Ð «¾ý§Å¸õ $V=\sqrt{2gh}$ ¬ Ì õ. ¸¦¨¼ò¾Çò¾¦ø B ±ý ÛÁ¦¼ò¾¦ø §Á¡Ð ¨¸ì Ì ôÀ¦ý Àó¾¡ÉÐ ¤ ²üÈì §¸¡½ î º¡¦Å¦ø V ±ý Ûõ §Å¸òÐ¼ý ¦¾È¦ôÀ¾¡¸¦ø $V\cos¤ = V\cos\sim ; V\sin¤ = ev\sin\sim$

BC ±ýÀÐ ¸¦¨¼ò¾Ç Å¦î Í ±É¦ø

$$BC = \frac{2(V\ \cos¤)(V\ \sin¤)}{R}$$

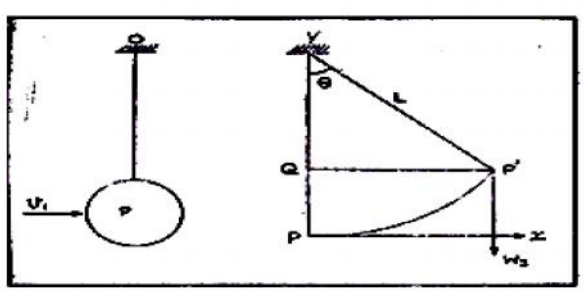
$$= \frac{2(v\cos\sim)(ev\sin\sim)}{g}$$

$$= \frac{e\cdot 2v^2 \sin\sim \cdot\cos\sim}{g}$$

$$= \frac{2e\cdot 2gh\cdot\sin\sim\cdot\cos\sim}{g}$$

$$= 4eh\sin\sim\ \cos\sim$$

4.5.20.9 $W_1 = 15$¸¦Ã¡õ ±¨¼Ôû Ç Ã¨Å ´ýÚ À¼õ (4.5.28)ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú 0 ±ý Ûõ ¿¦¨ÄÂ¡É Òû Ç¦Â¦Ä¦ÕóÐ



À¼õ 4-5-28

L=0.9Á¦ ¿¦ÇÓûÇ ¸Â¢üÈ¢ø ¦¾¡í¸¢ì ¦¸¡ñ ÊÕì Ìõ $W_3 =$ 10 ¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ P ±ý Ûõ ¦À¡ÕÇ¢ý §Áø ¸¢¨¼Â¡¸î Í Î¸¢ÈÐ. ¾¡ì ÌüÈ P ±ý Ûõ ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ 0 ±ý Ûõ ÒûÇ¢¨Âì ÌÈ¢òÐ $¯=30^\circ$ ¦ÀÕÁ §¸¡½ «ÇÅ¢üÌ º ºÄ¡ Î¸¢ÈÐ. §Á¡Ð¨¸ þÇì¸Á¡ÉÐ (plastic) ±Éì¸Õ¾¢ §Á¡Ð¨¸ìÌÓý Ã¨ÅÂ¢ý §Å¸ò¨¾ì¸¡ñ¸

Ã¨ÅÂ¢ý ¦¾¡¼ì¸§Å¸õ v_1 Á¦/Å¢ ±ý¸. P ±ý Ûõ ¦À¡ÕÇ¢ý ¦¾¡¼ì¸ §Å¸õ v_2 = 0 ¬ Ìõ. Ã¨ÅÂ¡ø ¾¡ì¸ôÀð¼×¼ý «¾ý §Å¸õ v_3 Á¦/Å¢ ¬ Ìõ. §Á¡Ð¨¸ þÇì¸Á¡É¾¡ø ¦À¡ÕÇ¢ý Ã¨ÅÂ¡ÉÐ Ò¨¾óÐ «¾ý§Å¸Óõ v_2 Á¦/Å¢ ¬ Ìõ. ¯ó¾ì¸¡ôÒ Å¢¾¢Â¢ýÀÊ $\frac{W_1}{g}v_1 + \frac{W_2}{g}(0) = \frac{(W_1+W_2)}{g}v_2$ §Á¡Ð¨¸Â¡ø ¦À¡Õû ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý þÂì¸¬üÈÄ¢ø þÆôÒ ²üÀÎ¸¢ÈÐ. ±É¢Ûõ §Á¡Ð¨¸ìÌ À¢ý ¬üÈÄ¡ÉÐ ¸¡ôÒ¨¼Â¾¡Ìõ. P ±ý Ûõ ¦À¡Õû 'P' ±ý Ûõ þ¼ò¨¾ «¨¼Ôõ§À¡Ð «¾ý§Å¸õ âîº¢ÂÁ¡Å¾¡¸ì ¦¸¡û¸. px ±ý Ûõ §¸¡ð¨¼ ¬¾¡ÃÁ¡¸ì ¦¸¡û¸ (Datum line) ¦À¡Õð¦¼¡Ì¾¢Â¢ý "§Å¨Ä ¬üÈø" ºÁýÀ¡ðÊýÀÊ $\frac{1}{2}\frac{(W_1+W_2)}{g}v_2^2 = (W_1+W_2)\ (L - L\cos ¯)$

$$\therefore v_2 = \sqrt{2gL(1-\cos ¯} = 2\sqrt{gL}\sin\frac{¯}{2}$$

$$v_1 = 2\frac{(W_1+W_2)}{W_1}\sqrt{gL}\cdot\sin\frac{¯}{2}$$

$$= 2\left(\frac{10.015}{0.015}\right)\sqrt{9.81\times\cdot 9}\cdot\sin 15^\circ$$

= 1026 Á¦/Å¢É¡Ê

4.5.20.10 Å¢É¡Êì Ì 20Á¦ §Å¸ò§¾¡ Î þÂí Ìõ. 16¸¢.¸¢ ¿¢¨ÈÔ¨¼Â ÀóÐ ´ýÚ «§¾¾¢¨ºÂ¢ø Å¢É¡Êì Ì 4Á¦ §Å¸ò§¾¡ Î þÂí Ìõ 48¸¢.¸¢ ¿¢¨ÈÔûÇ Àó¦¾¡ýÚ¼ý §Á¡Ð¸¢ÈÐ. ¤ $=\frac{1}{4}$ ¬Â¢ý §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý ÀóÐ¸Ù¨¼Â §Å¸í¸¨Çì¸¡ñ¸; «ýÈ¢Ôõ þÂì¸¬üÈÄ¢ø ²üÀÎõ þÆô¨ÀÔõ ¸¡ñ¸. §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý 16¸¢.¸¢ 48¸¢.¸¢ ¿¢¨È¸Ù ûÇ ÀóÐ¸Ç¢ý §Å¸í¸¨Ç Ó¨È§Â v_1, v_2 ±ý¸

ÀóÐ ¿¢¨È §Á¡¾Öì Ì Óý §Å¸õ §Á¡¾Öì ÌôÀ¢ý §Å¸õ

$1m_1 = 16$	$\underrightarrow{v_1}$ = 20Á¦ /Å¢	$\xrightarrow{v_2} = 4$
$2m_2 = 48$	$\underrightarrow{v_2}$ = 4Á¦ /Å¢	$\xrightarrow{v_2}$

¿¦ä ð¼É¦ý À¡¦§º¡¾¨ É Å¦¾¦ôÀÊ,

$$v_2' - v_1' = -¤\,(v_2 - v_1) = -\frac{1}{4}(4 - 20) = 4 \qquad \text{(i)}$$

¯ó¾ò¾¦ý ¦Á¡ò¾õ §Á¡Ð¨¸Â¡ø Á¡È¡¾¾¡¨¸Â¡ø,

$$16v_1' + 48v_2' = 16 \times 20 + 48 \times 4.$$

$$v_1' + 3v_2' = 32 \ldots \quad \ldots. \qquad \ldots.. \qquad \text{(ii)}$$

(i)(ii) ºÁýÀ¡Î¸¨Çì Ü ð¼

$$4v_2' = 36;\ v_2' = 9Á¦/Å¦;\ u_1' = 5Á¦/Å¦$$

§Á¡Ð¨¸ìÌ Óý þÂì¸ ¬üÈø = $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 400 + \frac{1}{2} \times 48 \times 16 = 3584\ f¤ø¸û$$

§Á¡Ð¨¸ìÌ ôÀ¦ý þÂì¸ ¬üÈø

$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 25 + \frac{1}{2} \times 48 \times 81 = 2144\ f¤ø¸û$$

þÂì¸ ¬üÈø þÆôÒ = 1440 f¤ø¸û

4.5.20.11 16 ¸¦.¸¦ ¿¦¨ÈÔûÇ ´Õ ÀóÐ Å¦É¡Êì Ì 8Á¦ §Å¸ò§¾¡Î þÂí¸¦ì ¦¸¡ñ ÊÕì Ìõ§À¡Ð «¾ü Ì ±¾¦÷ò¾¦¨ºÂ¦ø Å¦É¡Êì Ì 4Á¦ §Å¸ò§¾¡Î þÂí Ìõ 20¸¦.¸¦ ¿¦¨ÈÔûÇ Àó¦¾¡ý Ú¼ý §Á¡Ð¸¦ÈÐ.

$¤ = \frac{1}{2}$ ¬Â¦ý §Á¡Ð¨¸ìÌ ôÀ¦ý ÀóÐ¸Ç¦ý §Å¸í¸¨Çì ¸¡ñ¸.

ÀóÐ	¿¦¨È	§Á¡Ð¨¸ìÌ Óý §Å¸õ	§Á¡Ð¨¸ìÌ ôÀ¦ý §Å¸õ
1	$m_1 = 16$	$\underrightarrow{v_1} = 8$ Á¦/Å¦	$\underrightarrow{v_1}'$
2	$m_2 = 20$	$\underrightarrow{v_2} = -4$Á¦/Å¦	$\underrightarrow{v_2}'$

$$v_2' - v_1' = -¤\left(-4-8\right) = -\frac{1}{2} \times -12 = 6 \qquad (i)$$

¯ó¾ò¾¦ý ¦Á¡ò¾õ Á¡È¡¾¾¡¨¸Â¡ø

$$16v_1' + 20v_2' = 16 \times 8 + 20 \times \left(-4\right) = 48$$

$$4v_1' + 5v_2' = 12 \qquad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

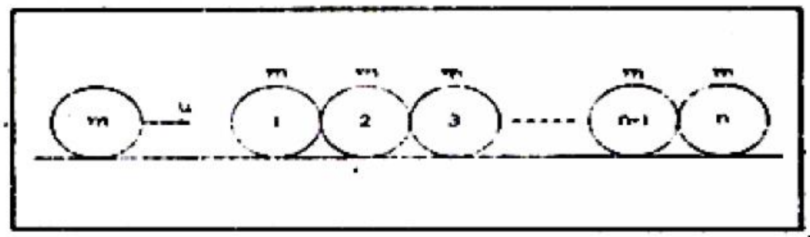
(i)(ii) ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î ¸ Ù ì Ì ò ¾÷× ¸¡ ½ ,

$v_1' = -2$ Á/Å É ¡Ê→; $v_2' =$ 4 Á/Å É ¡Ê→ v_1' ý Á¾ôÒ Ì ¨ÈÁ¾ôÀ¡Å¾¡ø 16¸.¸ ¿ ¨ÈÂ ý þÂì ¸¾ ¨º §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ ý §¿¦Ã¾Ã¡ ¸ Á¡üÈôÀ Î ¸ÈÐ.

v_2' ì Ì Á ¨ ¸ Á¾ôÒ ÅÕÅ¾¡ø 20¸.¸ ¿ ¨È ¾ý ¦¾¡¼ì ¸ þÂ í Ì õ ¾ ¨ºì Ì ±¾÷¾ ¨ºÂø ¦ºø ¸ÈÐ,

±É§Å ´ù¦Å¡Õ ÀóÐõ §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ ý «¾ý ¾ý¾ ¨º ¨Â Á¡üÈì ¦ ¸ ¡û ¸ýÈÉ.

4.5.20.12 ¿ ¨È Áðº Ô ¨¼ÂÐõ ºÁÁ¡É ¿ ¨È¸ ¨ÇÔ ¨¼ÂÐÁ¡É ÀóÐ¸û ÀÄ ´§Ã §¿÷§¸¡ðÊø ´ ý ¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡ð¼Å ñ ½õ À¼õ 4.5.29ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú



À¼õ 4-5-29

¨Åì ¸ôÀð Î ûÇÉ. «ò¾ ¨ ¸Â À ñ Ò¸ ¨Çô ¦ÀüÈ Áü¦È¡Õ ÀóÐ « ±ý Ûõ §Å¸òÐ¼ý ÀóÐ¸û ¨Åì ¸ôÀð Î ûÇ §¿÷§¸¡ðÊø §¿ÃÊÂ¡ ¸ Ó¾ø Àó¾ýÁÐ §Á¡Ð¸ÈÐ. þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÀóÐ ã ýÈ¡ÅÐ Àó¾ýÁÐ §Á¡Ð¸ÈÐ. þ§¾§À¡ø ÁüÈ ÀóÐ¸ Ùõ §Á¡¾ì ¦ ¸ ¡û ¸ýÈÉ. §¸¡ðÊø n ÀóÐ¸û ¨Åì ¸ôÀðÊÕó¾¡ø §Á¡Ð ¨ ¸ ¸ Ù ì Ì ôÀ ý ¦¾¡¼ì ¸ò¾ÄÕóÐ (n-1)ÀóÐ¸û µö×¿ ¨ ÄÂÖõ n¬ ÅÐ ÀóÐ u ±ý Ûõ §Å¸òÐ¼Ûõ þÂ í Ì ¦ÁÉ ì ¸¡ ñ À. ÀóÐ¸Ç ý ¿ ¨È ¨Â ±ý ¸. þ í Ì ¿ ¨ÈÁðº ì ¦¸ØÅ ý Á¾ôÒ ´ ýÈ¡ Ìõ. ¦¾¡¼ì ¸ò¾ø ¿ ¨È ¨Â ÀóÐ ±ý Ûõ §Å¸òÐ¼ý §¿÷§¸¡ðÊø Ó¾Ä¡ÅÐ Àó ¨¾ §Á¡ÐÅ ¨¾ §¿¡ì Ì ¸.

§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Ó ý §Å¸õ §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ ý §Å¸õ

± Î ò¾ ÀóÐ	$\underrightarrow{u}$	$\underrightarrow{v}$
Ó¾Ä¡ÅÐ ÀóÐ	$\underrightarrow{0}$	$\underrightarrow{u_1}$

$$u_1 - v = \cdot \ (0 - u);\ u_1 - v = u$$

¯ó¾ì ¸¡ôÒ Å¾Â ýÀÊ

$$mv + mu_1 = mu; v + u_1 = u; \therefore 2u_1 = 2u; \therefore u_1 = u$$

«ô§À¡Ð $v = 0$ ¬ Ìõ.

±É§Å §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ ý Ó¾Ä¡ÅÐ ÀóÐ u ±ý Ûõ §Å¸òÐ¼ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ Àó ¨¾ÂÊì Ì õ ± Î ò¾ ÀóÐ §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì À ý µö×¿ ¨Ä ¨Â « ¨¼¸ÈÐ. «Ð

§À¡Ä§Å Ó¾Ä¡ÅÐ ÀóÐ §¿÷§¸¡ðÊÖûÇ þÃ ñ ¼¡ÅÐ Àó¨¾ §Á¡¾¢Â×¼ý «Ð µö× ¿¢¨Ä ¨ÂÂ¨¼ÅÐ¼ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÀóÐ u ±ý Û õ §Å¸ò§¾¡ Î ã ýÈ¡ÅÐ Àó¨¾ÂÊ ì Ì õ. ±É§Å n ¬ÅÐ ÀóÐ þÚ¾¢ §Á¡Ð ¨¸ ì Ì ôÀ¢ý u ±ý Û õ §Å¸òÐ¼É¢Â í Ì õ.

4.5.20.13 m, 2m, 4m, 8m --- ±ý Û õ ¿¢ ¨È¸û ¦¸¡ ñ ¼ ÀÄ ÀóÐ¸û ´§Ã §¿÷§¸¡ðÊø ¨Å ì ¸ôÀð Î ûÇÉ. Ó¾øÀóÐ þÃ ñ ¼¡ÅÐ Á¢Ð u ±ý Û õ §Å¸òÐ¼ý §Á¡Ð¸¢ÈÐ. þÃ ñ ¼¡ÅÐ ã ýÈ¡Å¾¢ý Á¢Ð §Á¡Ð¸¢ÈÐ. þ§¾§À¡ø ÁüÈ ÀóÐ¸ Ù õ §Á¡¾¢ì ¦¸¡û¸¢ýÈÉ. ±ó¾ þÕÀóÐ¸ Ù ì Ì õ þ ¨¼§ÂÔûÇ ¿¢ ¨ÄÁ¢ðº¢ì ¦¸Ø ºÁ¦ÁÉ ì ¦¸¡ ñ Î n ¬ÅÐ Àó¾¢ý §Å¸ò ¨¾ì ¸¡ ñ ¸

Ó¾Ä¡ÅÐ ÀóÐ, þÃ ñ ¼¡ÅÐ Àó¨¾ §Á¡Ðõ §À¡ÐûÇ ¿¢ ¨Ä ¨Âì ¸ÅÉ¢ì ¸×õ."l" ±ýÀÐ Á¢ðº¢ì Ì ½ ¸ò ¨¾ì Ì È¢ì ¸ð Î õ.

ÀóÐ	¿¢ ¨È	§Á¡Ð ¨ì Ì Óý §Å¸õ	§Á¡Ð ¨¸ì Ì ôÀ¢ý §Å¸õ
1	m	$u \rightarrow$	$u_1 \rightarrow$
2	2m	$0 \rightarrow$	$v_2 \rightarrow$

$$v_2 - u_1 = -¤\left(o - u\right) = ¤u; mu_1 + 2mv_2 = mu$$

$$u_1 + 2V_2 = u; \therefore 3V_2 = u\left(1+e\right); V_2 = \frac{1+e}{3}u$$

$$u_1 = u - \frac{2}{3}\left(1+e\right)u = \frac{u}{3}\left[3-2-2e\right] = \frac{1-2e}{3}u$$

±É§Å þÃ ñ ¼¡ÅÐ ÀóÐ $u_1 = \frac{1+e}{3}u$ ±ý Û õ §Å¸òÐ¼ý 3ÅÐ Àó¨¾ §Á¡Ð¸¢ÈÐ. þùÅ¢Ã ñ Êý §Á¡Ð ¨¸ ì Ì ²üÈ « ¨ÁôÒ À¢ý ÅÕÁ¡Ú.

ÀóÐ	¿¢ ¨È	§Á¡Ð ¨ì Ì Óý §Å¸õ	§Á¡Ð ¨¸ì Ì ôÀ¢ý §Å¸õ
2	2m	$u_1 = \frac{1+e}{3}u$	$\underrightarrow{u_2}$
3	4m	0	$\underrightarrow{v_3}$

$$v_3 - u_2 = -e\left[0 - \left(\frac{1+e}{3}\right)u\right] = \frac{1+e}{3}u$$

$$2mU_2 + 4mV_3 = 2m\left(\frac{1+e}{3}\right)u$$

$$\therefore U_2 + 2V_3 + \frac{1+e}{3}u$$

$$3V_3 = \left(\frac{1+e}{3}u\right)(1+e)$$

$$V_3 = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 u\ .$$

« ùÅ¡§È n ¬ ÅÐ ÀóÐ §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¦ ý

$V_n = \left[\frac{1+e}{3}\right]^{n-1}$ u ± ý Û õ §Å ¸òÐ¼É¦Â í Ì õ.

±É§Å « Î ò¾ Î òÐ §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¦ ý 2 ¬ ÅÐ, 3 ¬ ÅÐ, n ¬ ÅÐ ÀóÐ ¸Ç¦ ý §Å ¸ í ¸ û Ó ¨ È§Â

$$\left(\frac{1+e}{3}\right)u\,.\left(\frac{1+e}{3}\right)^2 n\,, \ldots\ldots \left(\frac{1+e}{3}\right)^{n-1}$$ ¬ Ì õ.

ÀóÐ ¸ û ¿¦ ¨ È Á¦ð º¦Ô û Ç É ¦ Å É¦ø e = 1.

∴ §Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¦ ý « ôÀóÐ ¸Ç¦ ý §Å ¸ í ¸ û Ó ¨ È§Â

$$\left(\frac{2}{3}\right)u\,.\left(\frac{2}{3}\right)^2 u \ldots\ldots \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$ ¬ Ì õ

$\left(\frac{2}{3}\right)$ ± ý À ¨ ¾ ¦ À¡Ð Å¦ ¸¦¾Á¡ ¸ (common ratio) ¦ ¸ ¡ ñ ¼ þ ¨ Å ¸ û ´ Õ ¦ ÀÕ ì ¸ ò ¦¾¡¼¡¦ø « ¨ Á ¸¦ ýÈ É.

4.5.20.14 ºÁÁ¡ É ¿¦ ¨ È ¸ Ù ¨ ¼Â B,C ± ý Û õ þ ÕÀóÐ ¸ û ´ Õ §¿÷§ ¸ ¡ðÊø µöÅ¦ø ¯ û Ç É. « §¾ ¿¦ ¨ ÈÔ ¨ ¼Â A ± ý Û õ ÀóÐ Å¦É¡Ê ì Ì 10Á¦ §Å ¸ò¾¦ø B,CÂ¦ ý ¾¦ ¨ ºÂ¦ø B ¨ Â §Á¡Ð ¸¦ÈÐ. « ò¾ ¨ ¸ Â §Á¡Ð ¨ ¸ Â¡ø Å¡¦ ¨ ºÂ¡ ¸ §Á¡¾ø ¸ û ÀóÐ ¸ Ù ì ¸¦ ¨ ¼§Â ¿¦ ¸ ú ¸¦ ýÈ É. ¿¦ ¨ Ä Á¦ð º¦ì ¦ ¸ Ø e = 0.4 ±É¦ ý ±øÄ¡Å¦¾ §Á¡Ð ¨ ¸ ¸ Ù ì Ì ô À¦ ý « ôÀóÐ ¸Ç¦ ý §Å ¸ í ¸ ¨ Ç ì ¸ ¡ ñ ¸.
Ó¾Ä¦Ã ñ Î ÀóÐ ¸Ç¦ ý §Á¡Ð ¨ ¸ Â¦ ý « ¨ ÁôÒ À¦ ý ÅÕÁ¡Ú

ÀóÐ	¿¦ ¨ È	§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Ó ý §Å ¸ õ	§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ¦ ý §Å ¸ õ
A	m	10 Á¦ Å¦ $\rightarrow$	$\underset{\rightarrow}{v_1'}$
B	m	0	$\underset{\rightarrow}{v_2'}$

$$\underset{\rightarrow}{v_2'} - \underset{\rightarrow}{v_1'} = -¤\,(0-10) = 10 \times 0.4 = 4.$$

$m v_1^{'} + m v_2^{'} = 10m; v_1^{'} + v_2^{'} = 10; \therefore\ 2v_2^{'} = 14$

$v_2^{'} = 7$Á/Å É ¡Ê $v_1^{'} = 3$Á/Å É ¡Ê

B,C ± ý Û õ ÀóÐ ¸ Ç ý §Á¡Ð ¨ ¸Â ¨ Áôò ¸ú ì ¸¡ Ï Á¡Ú « ¨ÁÂð Î õ.

ÀóÐ	¿ ¨ È	§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Ó ý §Å ¸ õ	§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ ý §Å ¸ õ
B	m	7Á/Å	0
C	m	$v_2^{'}$	$v_3^{'}$

$\therefore v_3^{'} - v_2^{'} = -e(0-7) = 0.4\times 7 = 2.8$

$mv_2^{'} + mv_3^{'} = 7m; v_2^{'} + v_3^{'} = 7; 2v_3^{'} = 9.8$

$v_3^{'} = 4.9$Á/Å $v_2^{'} = 2.1$Á/Å

A,B ± ý Û õ ÀóÐ ¸ Ç ý þÃ ñ ¼¡Å¾¡ É §Á¡Ð ¨ ¸Â ý « ¨ Áôò À ý ÅÕÁ¡Ú

ÀóÐ	¿ ¨ È	§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Ó ý §Å ¸ õ	§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ ý §Å ¸ õ
A	m	$v_1^{'} = 3$Á/Å	$v_1^{'}$
B	m	$v_2^{'} = 2.1$Á/Å	$v_2^{'}$

$v_2^{'} - v_1^{'} = -e(2.1-3) = 0.36$

$m v_1^{'} + m v_2^{'} = m\times 3 + m\times 2.1;$ $2v_2^{'} = 5.46$

$v_2^{'} = 2.73$Á/Å $v_1^{'} = 2.73$Á/Å

B,C ± ý Û õ ÀóÐ ¸ Ç ý þÃ ñ ¼¡ÅÐ §Á¡Ð ¨ ¸Â ý « ¨ Áôò À ý ÅÕÁ¡Ú

ÀóÐ	¿ ¨ È	§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì Ó ý §Å ¸ õ	§Á¡Ð ¨ ¸ ì Ì ôÀ ý §Å ¸ õ
B	m	$v_2^{'} = 2.73$Á/Å	$v_2^{'}$
C	m	$v_3^{'} = 4.9$Á/Å	$v_3^{'}$

þ í Ì $v_1' = v_2' < v_3'$ ±ýÀ¾¡ø A,B,C ±ý Ûõ ÀóÐ¸ Ù ì Ì þ ¨¼§Â §Áü¦¸¡ ñ Î ´ÕÅ¢¾ §Á¡Ð ¨¸Ôõ þø ¨Ä ±ýÈ¡¸¢ÈÐ. ±É§Å ±øÄ¡ §Á¡Ð ¨¸¸Ù ì Ì ôÀ¢ý A,B,C ±ý Ûõ ÀóÐ¸û Ó¨È§Â 2.73Á¦/Å¢ 2.73Á¦/Å¢ 4.9Á¦/Å¢ ±ý Ûõ §Å¸òÐ¼ý þÂí Ìõ.

4.5-21 ÀÂ¢üº¢

4.5.21.1 Å¢É¡Êì Ì 8Á¦ð¼÷ §Å¸ò§¾¡ Î þÂí Ìõ ´ÕÀóÐ ÅÆÅÆôÀ¡É ´Õ ¾Çò¾¢ý Á¦Ð ¾ÇòÐ¼ý 30° §¸¡½ îº¡öÅ¢ø §Á¡Ð¸¢ýÈÐ. ¿¢¨Ä Á¦ðº¢ì¦¸Ø $\frac{1}{2}$ ¬Â¢ý §Á¡Ð ¨¸ì Ì ôÀ¢ý «¾ý§Å¸ò ¨¾Ôõ þÂì ¸ò¾¢¨º¨ÂÔõ ¸¡ ñ ¸.
(Å¢¨¼ 7.2 Á¦/Å¢É¡Ê: 16.6°)

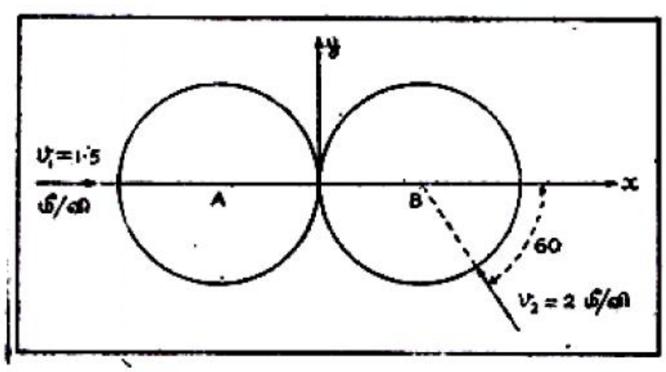
4.5.21.2. ´Õ ¸¢§Ä¡ ¸¢Ã¡õ ±¨¼ÔûÇ §¸¡Ç¦Á¡ýÚ 100 Á¦ð¼÷ ¯ÂÃò¾¢Ä¢ÕóÐ Á¦û º ì¾¢Ô¨¼Â ´Õ ¸¢¨¼ò ¾Çò¾¢ý Á¦Ð Å¢ØóÐ 10 Á¦ð¼÷ ¯ÂÃò¾¢üÌò ¦¾È¢ì ¸¢ÈÐ. (a) Á¦û ºì¾¢ Ì ½ ¸õ (b) ¸¢¨¼ò¾Çò¾¢ý ¾¡ì ¸Ç ¨Å ¬ ¸¢ÂÅü¨Èì ¸¡ ñ ¸

(Å¢¨¼ : $\frac{1`}{\sqrt{10}} = 5.94$ ¸¢.¸¢ Å¢É¡Ê)

4.5.21.3 Å¢É¡Êì Ì 4Á¦ð¼÷ §Å¸ò§¾¡ Î þÂí Ìõ ´Õ §¸¡Çõ ÅÆÅÆôÀ¡É ´Õ ¿¢¨Äò¾Çò¾¢ý Á¦Ð 45° §¸¡½º¡öÅ¢ø §Á¡Ð¸¢ÈÐ. ¿¢¨Ä Á¦ðº¢ì¦¸Ø $\frac{1}{2}$ ¬Â¢ý «ì§¸¡Çò¾¢ý §Á¡Ð ¨¸ì Ì ô À¢ýÛûÇ þÂì ¸ò¾¢¨º¨ÂÔõ §Å¸ò ¨¾Ôõ ¸¡ ñ ¸.

(Å¢¨¼ $\sqrt{10}$ Á¦/Å¢É¡Ê; $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$)

4.5.21.4 ºÁ¿¢¨ÈÔõ 0.9 ±ý Ûõ Á¦ûº ì¾¢ì¦¸Ø¨ÅÔõ ¦¸¡ ñ¼ þÃ ñ Î ÀóÐ¸û À¼õ 4.5.30ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú



À¼õ 4-5-30

§Á¡¾¢ì¦¸¡û¸¢ýÈÉ. §Á¡Ð¨¸ìÌôÀ¢ý «ÅüÈ¢ý ¾¢¨º§Å¸í¸¨ÇÔõ §Á¡Ð¨¸Â¡ø ²üÀð¼ þÂì¸ ¬üÈÄ¢ø þÆôÀ¢ý Å¾¢ò¨¾Ôõ ¸¡ñ¸.

(Å¢¨¼ $v_1' = -0.875\underline{i}; v_2' = 1.375\underline{i} + 1.732\underline{j}$ ¬üÈø þÆôÀ¢ý Å¾¢õ 9.35%)

4.6 ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡Õû º¡÷ó¾ þÂì¸Å¢Âø ãÄ¸í¸û

4.6 .1 Å¨ÃÂ¨È¸û

¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû (Rigid body)

¦ÅÇ¢ ±ñ ½¢ì¨¸¸¨Çì ¦¸¡ñ¼ Ð¸û¸û ´ýÈ¢ü¦¸¡ýÚ Á¡È¡¾ ¦¾¡¨Ä×¸¨Çô ¦ÀüÈ ÅÙ ²üÚÅ¾üì Óý Òõ À¢ýÒõ ¿¢¨ÄÂ¡¸ ¯ûÇ ¦¾¡ì¾¢Â¡ø ¯ÕÅ¡ì¸ôÀð Î ûÇ¾¡¸ì ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ¸Õ¾ôÀÎ¸¢ÈÐ.

þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢ (displacement)

¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ¢Ö ûÇ ²§¾Ûõ þÕÐ¸û¸¨Ç þ¨½ìÌõ §¿÷§¸¡Î «ô¦À¡Õû þÂíÌõ§À¡Ð, ÐÅì¸¢¨ÄÂ¢ø ±ôÀÊ þÕó¾§¾¡ «§¾¿¢¨ÄÂ¢ø þ¨½Â¢ø «¨ÁÂò¾ì¸Ð ±ýÀ§¾ þ¼ô¦ÀÂ÷îº¢Â¢ý Å¨ÃÂ¨ÈÂ¡Ìõ.

þÕôÀ¢¼¿¢¨Ä¨Á (Positions)

¦À¡Õû ´ýÈ¢ø A,B ±ýÈ þÕÒûÇ¢¸Ç¢ý þÕôÀ¢¼í¸û ÌÈ¢ôÀ¢ð¼¿¢¨ÄÂ¡É «îÍ¸Ç¢ý «ÊôÀ¨¼Â¢ø ¬¾¢ 0 ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢Ä¢ÕóÐ «ÇÅ¢¼ôÀÎõ. $\underline{r_A}, \underline{r_B}$ ±ýÈ "¾¢¨ºÂ¢"(position vector)¸Ç¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. B ÒûÇ¢Â¢ý þÕôÀ¢¼ò¨¾ A ÒûÇ¢ ÌÈ¢òÐ $\underline{r_{B/A}}$ ±ýÈ ¾¢¨ºÂ¢ ¿¢¨ÄìÌ¡Â

$\underline{r_B} = \underline{r_A} + \underline{r_{B/A}}$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ð¼¡ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ,

¾¢¨ºÂ¢§Å¸õ (Velocity)

¯¼ÉÊÂ¡¸ ¿¢¸ú¸¢È A ÁüÚõ B ÒûÇ¢¸Ç¢ý ¾¢¨º§Å¸í¸Ùì Ìûû ¦¾¡¼÷Ò þÕôÀ¢¼ ¿¢¨Ä¨Â «È¢Å¢ìÌõ ºÁýÀ¡ðÊø §¿Ãõ ÌÈ¢òÐ ±Îì¸ôÀÎõ Å¨¸ì¦¸Ø ºÁýÀ¡ð¼¡ø ¦ÀÈôÀÎõ. ±É§Å

$\underline{r_B} = \underline{r_A} + \underline{r_{B/A}}$ ÁüÚõ $\underline{N_B} = \underline{N_A} + \frac{d}{dt}\left[\underline{r_{B/A}}\right]$ þí Ì $\underline{V_A}, \underline{V_B}, x, y -$ «îÍì¸¨Çì ÌÈ¢òÐ ¾¢¨º§Å¸í¸û «ÇÅ¢¼ôÀÎÅ¾¡ø þ¨Å¸û ¾É¢¾¢¨º§Å¸í¸Ùì¸¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ, ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ý Å¨Ã¨ÈÂ¢ýÀÊ $\underline{r_{B/A}}$ ¾¢¨º «Ç×ÕÅ¢ý ÀÕÁý ´Õ Á¡È¢Ä¢ ±ýÈ ¸¡Ã½ò¾¡ø $\frac{d}{dt}\left\{\underline{r_{B/A}}\right\} = 0$ §ÁÖõ ¦À¡Õû $\underline{r_{B/A}}$ ¾¢¨ºÔõ Á¡È¢Ä¢ ¬Å¾¡ø $V_B = V_A$ ±ýÈ¡¸¢ÈÐ.

Ó Î ì¸õ (Acceleration)

§¿Ãõ t ÌÈ¢òÐ $\underline{N_B} = V_A$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ðÊý Å¨¸ì¦¸Ø $\underline{a_B} = \underline{a}_A$, ±ýÈ¡Ìõ. $\underline{a_B}, \underline{a}_A$ ¬¸¢Â¨Å ¾É¢ Ó Îì¸í¸Ç¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ.

¦À¡ÐÅ¡É ¾Ç þÂì¸õ

þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢, ÁüÚõ Í¼üº¢ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý §º÷Á¡Éò¨¾ ¦À¡Õû «ÛÀÅ¢ôÀ¾¡ø ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ý þÂì¸õ, ¦À¡ÐÅ¡É ¾Ç þÂì¸Á¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎ¸¢ÈÐ.

¿¢¨Äô¾ûÇ¢ ´ýÚ Ì È¢òÐ Í¼üº¢ (Rotation about a fixed point)

´Õ ¿¢¨Äô¾ûÇ¢Â¢ø þ¨½ì¸ôÀð¼ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ý ÓôÀ¡¢Á¡½ þÂì¸ò¨¾ ¿¢¨Äô¾ûÇ¢ ´ýÚ ÌÈ¢òÐ «¨ÁÔõ Í¼üº¢ ±É Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ.

¿¢¨ÄÂ¡É «îÍ ´ý¨Èì ÌÈ¢òÐ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ø «¨ÁÔõ Í¼üº¢

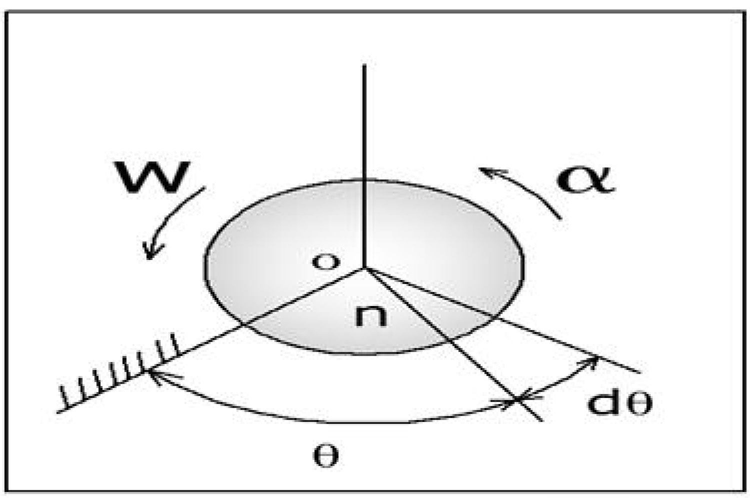
´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É «îÍ ÌÈ¢òÐ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû Í¼Öõ§À¡Ð ¦À¡ÕÇ¢ø ²§¾Û¦Á¡Õ ÒûÇ¢ p ±Îì¸ôÀÎ¦ÁÉ¢ø «ôÒûÇ¢ ´Õ Åð¼ôÀ¡¨¾Â¢ø þÂí Ì¸¢ÈÐ.

§¸¡½ÅÂ¢Âì¸õ (Angular motion)

Ð¸û ´ýÈ¢ü Ì À¡¢Á¡½õ ¸¢¨¼Â¡Ð. ±É§Å ÒûÇ¢ì Ì §¸¡½ÅÂ¢Âì¸Óõ ¸¢¨¼Â¡Ð. §¸¡Î¸û ÁüÚõ ¦À¡Õð¸û Áð Î§Å §¸¡½ÅÂ¢Âì¸ò¨¾ «ÛÀÅ¢ì¸¢ýÈÉ.

§¸¡½ þÕôÀ¢¼õ (Angular position)

¬¨Ãì§¸¡ðÊý þÕôÀ¢¼ò¨¾ ¯ §¸¡½õ Å¨ÃÂÚì¸¢ÈÐ. þÐ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ §¸¡Î *l* Ä¢ÕóÐ R ¯ÕÅ¡ì Ìõ §¸¡½Á¡ Ìõ.



A¼õ 4-6-1

§¸¡½ þ¼ô¦ÀÂÃ÷ச்சி (Angular displacement)

§¸¡½ þருப்பி¼ò¾¢ø நிகழ்õ Á¡üÈò¨¾ $d\theta$ Å¨¸Â¢டு (differential) «ÇÅ¢Î¸¢ÈÐ. $d\theta$ ±ýÀ§¾ கோ½ þ¼ô¦ÀÂÃ்ச்சியா¡Ìõ. $d\theta$ ´Õ ¾¢¨º «Ç×ÕÅ¡Ìõ. இகன் ÀÕÁý $d\theta$ பா¨¸ «ÇÅ¢ø ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ வல்லÐ ¬¨ÃÂý (Radian) «ÇÅ¢ø ÌÈ¢ì¸ôÀம் அøÄÐ ÍüÈ× (Revolution)±ýÈ «ÇÅ¢Öõ ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ. ´Õ ÍüÈø = 2® ¬¨ÃÂý ¬Ìõ. þÂì¸õ ±ô§À¡Ðõ ¿¢¨ÄÂ¡É «î¨ºì ÌÈ¢òÐ நிகúÅ¾¡ø $d\theta$ ஏ ¾¢¨º ±ô§À¡Ðõ ¿¢¨Ä «îÍÅ¡ðÊø ±Îì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. (வலì¨¸ò திருக¡½¢ ÅÆì¸ò¾¢ø ±Îì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ) þÕ À¡¢Á¡½ò¾¢ø¯ , $d\theta$ ஐ ¸¢Â¨Å þ¼ï ÍÆ¢Â¡É ¾¢¨ºÂ¢ø ±Îì¸ôÀÎõ.

§¸¡½ ¾¢¨º §Å¸õ (Angular velocity)

§¿Ãõ t ÌÈ¢òÐ §¸¡½ þÕôÀ¢¼ò¾¢ý Á¡ÚÅ¾õ §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ $(\mu) = omega$ ±ýÚ «¨Æì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. dt Å¢É¡Ê §¿Ãò¾¢ø $d(\bar{\ })$ ¿¢¸úÅ¾¡ø $\mu = \frac{d\bar{\ }}{dt}$ ¬Ìõ.

§¸¡½ ÓÎì¸õ (Angular Acceleration)

§¿Ãõ t ÌÈ¢òÐ §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸ò¾¢ý Á¡ÚÅ¾õ §¸¡½ÓÎì¸õ $(\sim) - (Alpha)$ ±ýÚ «¨Æì¸ôÎ¸¢ÈÐ.

$$\sim = \frac{dw}{dt} \text{ « øÄÐ}$$

$$\sim = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{\ }}{dt}\right) = \frac{d^2\bar{\ }}{dt^2} \text{ ஆ Ìõ,.}$$

αசெயல்படும் கோடும் ω ¢ºÂøÀÎõ §¸¡§¼ ¬Ìõ. ¬É¡ø ~ ý ¾¢¨º§À¡ì Ìœ ωவன் வளர்ச்சி அல்லது ¡Ìறை¾ø ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý «ÊôÀ¨¼Â¢ø ±Îì¸ôÀÎõ dt ஐ நீக்குவதால்

$\alpha d\theta = \omega d\omega$என்ற சÁýÀ¡Î ¦ÀÈôÀÎ¸¢ÈÐ.

A¡E¡¾ §¸¡½ OIì¸õ (Constant Angular Acceleration)

$\sim_c$ ±ýÀÐ, ~ ý Á¡È¡¾ §¸¡½ ÓÎì¸ò¨¾ì ÌÈ¢ôÀ¢¼ðÎõ. ±É§Å

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu = \mu_0 + \sim_e t \\ &\bar{\ } = \bar{\ }_\circ + \mu_0 t + \frac{1}{2}\sim_e t^2 \\ &\mu^2 = \mu_0^2 + 2\sim_e(\bar{\ } - \bar{\ }_0) \\ &\sim_c = \text{Á¡È¡¾ §¸¡½ ÓÎì¸õ} \end{aligned}}$$

$\bar{\ }_\circ, \mu_0$ ±ýÀ¨Å ¦À¡ÕÇ¢ý ¦¾¡¼ì¸ "§¸¡½ þÕôÀ¢¼õ" §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ ±ýÀÉÅ¡Ìõ,

4.6.2 p- ÒûÇ¢Â¢ý þÂì¸õ(Motion of point p)

¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ÍÆüº¢ §Áü¦¸¡û ÙõÀ¡Ð p ÒûÇ¢, r ¬Ãõ ¦¸¡ñ¼ Åð¼ôÀ¡¨¾¦Â¡ýÈ¢ø þÂí Ì¸¢ýÈÐ.

p- ÒûÇ¢Â¢ý þÕôÀ¢¼õ(Position of point p)

$\underline{r}$ ±ý Ûõ “¾¢¨ºÂ¢” ¿¢¨Ä $\underline{op}$ - ¬ø Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ.

p- ÒûÇ¢Â¢ý ¾¢¨º§Å¸õ(Velocity of point p)

p ý ¾¢¨º§Å¸õ, §¸¡½« î Íò ¦¾¡¨Ä º¡÷ó¾ ÜÚ¸Ç¡É $\underline{V_r} = \underline{\dot{r}},\ \underline{V} = r\vec{\ }, r$ Á¡È¢Ä¢ ±ýÀ¾¡ø $N_r = \dot{r} = 0$ ±É§Å $V = V_\theta = \dot{r}\dot{\theta} = r\omega = \omega r$ ¾¢¨ºÂ¢ µ, ÁüÚõ $\underline{r_p}$ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý ¾¢¨ºÂ¢ ÌÚì¸ô¦ÀÕì¸¢Â¢ý Å¡Â¢Ä¡¸

$$\underline{N} = µ \wedge r_p$$

$\underline{N}$ ý ¿¢¨È ÁüÚõ ¾¢¨º¸¨Çì¸ñ Ê¼Ä¡õ.

p ÒûÇ¢Â¢ý Ó Îì¸õ (Acceleration of point p)

p ÒûÇ¢Â¢ý Ó Îì¸ò¨¾ «¾ý ¦ºí ÌòÐìÜÚì Ì¡¢Â ¦ºí ÌòÐ Ó Îì¸õ ÁüÚõ ¦¾¡Î§¸¡ðÎ ìÜÚì Ì¡¢Â ¦¾¡Î§¸¡ðÎ Ó Îì¸õ ¬¸¢ÂÅüÈ¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ ¦ÅÇ¢ôÀÎò¾Ä¡õ.

$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ ÁüÚõ } a_n = \frac{v^2}{°},$$

$$¢ = r, N = µr,$$

$$\sim = \frac{dw}{dt}$$

±É§Å

$$a_t = \sim r; a_n = µ^2 r$$

“¾¢¨ºÂ¢” ÌÚì¸ô ¦ÀÕì¸¢Â¢ý Å¡Â¢Ä¡¸×õ §ÁüÜÈ¢Â ºÁýÀ¡Î¸¨Ç ¾ÕÅ¢ì¸Ä¡õ.

$$\underline{a} = \frac{d\underline{N}}{dt} = \frac{dµ}{dt} \wedge \underline{r_°} + µ \wedge \frac{d\underline{r_°}}{dt}$$

$$\underline{\sim} = \frac{dµ}{dt}$$

±ýÀ¾¡ø

$$\frac{d\underline{r}p}{dt} = \underline{v} = µ \wedge \underline{r_°}$$

$$\underline{a} = \underline{\sim} \wedge \underline{r_°} + µ \wedge (µ \wedge \underline{r_°})$$

§ÁÖõ

$$\underline{a} = \underline{a_t} + \underline{a_m}$$

$$= \underline{\sim} \wedge \underline{r} - µ^2 \underline{r}$$

$\underline{a_t}, \underline{a_n}$ ±ýÀ¨Å ´ ýÈ¢ü¦¸¡ýÚ ¦ºí Ìò¾¡¸ ¯ûÇÉ.

4.6.3 ´Õ ¾Ç þÂì¸ò¾¢ü Ì¡¢Â º¡÷¾¢¨º§Å¸õ(Relation velocity in plane motion)

¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ´ýÈ¢ø A,B ±ýÈ þÕÐ¸û¸Ù ìÌ¡¢Â ¾¢¨ºÂ¢ ¿¢¨Ä¸Ù ìÌ¡¢Â ¦¾¡¼÷Ò

$$\underline{r}_B = \underline{r}_A + \underline{r}_{B/A}$$
$$\therefore \underline{v}_B = \underline{v_A} + \underline{v}_{B/A}$$
$$v_{B/A} = \mu \wedge \underline{r}_{B/A} = \mu \underline{k} \wedge \underline{r}_{B/A}$$
$$v_{B/A} = r\mu$$
$$v_{\underline{B}} = \underline{v_A} + \mu \underline{k} \wedge \underline{r}_{B/A}$$

4.6.3.1 ´Õ ¾Ç þÂì¸ò¾¢ü Ì¡¢Â ¦¿¡Êî ÍÆø ¨ÁÂõ (instantaneous centre of rotation in plane motion)

¦À¡ÐÅ¡É ´Õ ¾Çò¾¢ü Ì¡¢Â « ¨ÁôÀ¢ø

$$v_{\underline{A}} = v_{\underline{c}} + v_{\underline{A}/c}$$
$$v_{\underline{c}} = 0$$

(p ±ýÀÐ âîº¢Â ¾¢ ¨ º §Å¸ò ¨ ¾ì ¦¸¡ ñ ¼ ¦¿¡Êî ÍÆø ¨ÁÂõ)

§ÁÖõ

$$v_{\underline{A}/c} = \underline{r}\mu = -r_{\underline{A}}\mu$$
$$\therefore v_{\underline{A}} = r_{\underline{A}}\mu$$

(þÐ§Å þÂì¸Å¢ÂÖì Ì¡¢Â ÍÆÄ¢ý ºÁýÀ¡¼¡ Ìõ)

4.6.3.2 ´Õ ¾Ç þÂì¸ò¾¢ü Ì¡¢Â º¡÷Ó Î ì¸õ (Relative acceleration in plane motion)

$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{v}_{B/A}$ ºÁýÀ¡ð¨¼ §¿Ãõ t Ì È¢òÐ Å¨¸Â¢Î ¦ºöÔõ§À¡Ð $\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{B/A}$ ±ýÈ¡ Ìõ. þ í Ì a_A, a_B ±ýÀÉ ¾É¢ Ó Î ì¸ í ¸Ç¡ Ìõ. ¬ É¡ø $\underline{a}_{B/A}$ Ì È¢òÐ Bý º¡÷ Ó Î ì¸Á¡ Ìõ

Ó Î ì¸õ $\underline{a}_{B/A}$ ì Ì¡¢Â ¦¾¡ Î§¸¡ð Î ìÜÚ $\underline{a}_{B/A})_t^{-B/A}$ ¬ Ìõ. þÐ AB §¸¡ðÊü Ì ¦º í Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ «ùÅ¢¾§Á ¦º í ÌòÐì Ì¡¢Â ÜÚ $(\underline{a}_{B/A})_n$ ¬ Ìõ. þÐ A ÒûÇ¢¨Â §¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀÎõ.

±É§Å

$$\underline{a_{B/A}} = \left(\underline{a_{B/A}}\right)_t + \left(\underline{a_{B/A}}\right)_n$$
$$\left(\underline{a_{B/A}}\right)_t = \sim \underline{k} \wedge r_{\underline{B/A}} \left(\underline{a_{B/A}}\right)_t = r\underline{\sim}$$

§ÁÖõ

$$(\underline{a}_{B/A})_n = -\mu^2 \underline{r}_{B/A} ; (\underline{a}_{B/A})_n = r\underline{\mu^2}$$
$$\therefore \underline{a}_{B/A} = \sim \underline{k} \wedge \underline{r}_{B/A} - \mu^2 \underline{r}_{B/A}$$
$$\therefore \underline{a}_B = \underline{a}_A + 2\underline{k} \wedge \underline{r}_{B/A} - \mu^2 \underline{r}_{B/A},$$

4.6.4 ÍÆÖõ ÅÊÅ « ¨ÁôÒì Ì¡¢Â ¾¢¨º «Ç×ÕÅ¢ý Á¡ÚÅ¾õ
(Rate of change of vector with respect to a rotating frame)

OXYZ ±ýÀÐ ´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É ÅÊÅ « ¨Áô¨Àì ÌÈ¢ì¸ðÎõ. oxyz ±ýÀÐ OB ¿¢¨ÄÂ¡É «îÍ ÌÈ¢òÐ ÍÆÖõ ÅÊÅ « ¨Áô¨Àì ÌÈ¢ì¸ðÎõ, $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ±ýÀ¨Å ox,oy,oz «îÍ¸Ç¢ø « ¨ÁÔõ ¾¢¨ºÂ¢ «ÄÌ¸ ¨Çì ÌÈ¢ì¸ðÎõ.

O ¯¼ý þ¨ ½ì¸ôÀð¼ Q ±ý Ûõ ¾¢¨ºÂ¢ ÅÊ×Õ ¦Åì¼÷ º¡÷ÀÄ¨É Q (t) ³ ÌÈ¢ì¸ðÎõ மற்றும் OXYZ ÌÈ¢òÐ Q ý Á¡ÚÅ¾õ ¬¸¢Â¨Å Ó¨È§Â $(Q)_{0XYZ}$ ±ýÚõ $\left(\dot{Q}\right)_{OXYZ}$ ÌÈ¢ì¸ôÀÎõ.

$$\therefore \underline{Q} = Qx\underline{i} + Qy\underline{j} + Qz\underline{k}$$

$$\therefore \left(\dot{Q}\right)_{OXYZ} = \frac{dQ}{dt} = Qx\underline{i} + Qy\underline{j} + Qz\underline{k} + Qx\frac{di}{dt} + Qy\frac{dj}{dt} + Qz\frac{dk}{dt}$$

$$\left(\dot{Q}\right)_{OXYZ} = \left(\dot{Q}\right)_{OXYZ} + Qx\frac{di}{dt} + Qy\frac{dj}{dt} + Qz\frac{dk}{dt}$$

§ÁÖõ $(\dot{Q})_{0XYZ} = (\dot{Q})_{0XYZ} + Qx\frac{di}{dt} + Qy\frac{dj}{dt} + Qz\frac{dk}{dt}$

Q, $0XYZ$ ÅÊ×ÕÅò¾¢ø ¿¢¨ÄÂ¡¸ ¯ûÇ¦¾É¢ø $(\dot{Q})_{0XYZ} = 0$ ¬ Ìõ

$$\left(\dot{Q}\right)_{oxyz} = Q_x\frac{d\underline{i}}{dt} + Q_y\frac{d\,\underline{j}}{dt} + Q_z\frac{d\underline{k}}{dt}$$

±É§Å $(\dot{Q})_{0XYZ}$, $\underline{Q}$ ý Ó¨ÉôÒûÇ¢Â¢ø Ð¸û ´ýÈ¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ÌÈ¢ì Ì¦ÁÉ¢ø

$$Qx\frac{di}{dt} + Qy\frac{dj}{dt} + Qz\frac{dk}{dt} = \underline{\mu}_r \wedge \underline{Q}$$

þíÌ $\underline{\mu}$ ±ýÀÐ OXYZ ÅÊÅ¨ÁôÒ ÌÈ¢òÐ OXYZ ý ÅÊÅ¨ÁôÒ ÍÆüº¢ì¸¡É §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸Á¡ Ìõ. ±É§Å

$$Qx\frac{di}{dt} + Qy\frac{dj}{dt} + Qz\frac{dk}{dt} = \underline{\mu}_r \wedge \underline{Q}$$

$$\therefore (\underline{\dot{Q}})_{0XYZ} = (\underline{\dot{Q}})_{0XYZ} + \underline{\mu}_r \wedge \underline{Q} \,[$$

4.6.5 ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ´ýÈ¢ü Ì¡¢Â þÂì¸ò¾¢ý ºÁýÀ¡Î (Equation of motion for a rigid body)

¦À¡ÕÇ¢ý ¿¢¨È m ±É×õ $\underline{G}$ ±ýÀÐ ¦À¡ÕÇ¢ý ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý ÓÎì¸ò¨¾Ôõ ÌÈ¢ì¸¢ýÈÉ. ¾¢½¢× ¨ÁÂôÒûÇ¢ì Ì ¯¡¢Â ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ºÁýÀ¡Î

$$\sum M_{\underline{G}} = \underline{\dot{H}_G}$$

þíÌ $\sum M_{\underline{G}}$ = ¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂøÀÎõ « ¨ÉòÐô ÒÈÅ¢¨º¸û G - ÌÈ¢òÐ « ¨ÁÔõ Å¢¨Ç× ¾¢ÕôÒ¾¢ÈÉ¡ Ìõ.

$\dot{H}_o$ À¡ÕÇ ý ¾ ½ × ¨ÁÂôÒûÇ (G) Ì ÈòÐ ÍÆø ¯ó¾Á¡Ú Å¾Á¡ Ì õ.

4.6.5.1 ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ´ ýÈ ý ¿ ¨È (« øÄÐ ¾ ½ ×) m ±É×õ ¦À¡ÕÇ ý ¾ ½ × ¨ÁÂôÒûÇ G ±É×õ, ¦À¡ÕÇø ¦ºÂøÀ Î õ. ÒÈÅ ¨ º¸Ç ý ¦¾¡ Ì ¾ ($\sum_{i}^{h} \underline{Fi};$) ±É×õ ¦¸¡ Î ì¸ôÀð Î ûÇ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. (System of forces)

þÃ ñ ¼¡Å¾¡¸ þ ùÅ ¨ º¸Ù ì Ì î ºÁÁ¡É « ¨Áôò G-¾ ½ × ¨ÁÂôÒûÇÂ ý ÅÆ§Â ¦ºÂøÀ Î õ Å ¨ Ç×Å ¨ º $\left(\sum \underline{F}\right) = [m\underline{a}, G -$ ¯¼ ý þ ¨ ½ ì¸ôÀð Î ûÇÐ] ÁüÚõ ÍÆÄ ¨ ½ ¾ÕôÒ¾Èý. $\left(\sum \underline{M_G}\right)$ ¬¸ÂÅüÈ ý Ü Î ¾Ä¡Öõ «ÈÅ ì¸ò¾ì¸Ð (Equiralent force = couple)

ã ýÈ¡Å¾¡¸ ºÁÁ¡É « ¨Áôò G- ý ÅÆ§Â ¦ºÂøÀ Î õ ¾ ¨ ºÂ «Ç×Õ ($m\underline{a};$) ÁüÚõ ¦À¡ÕÇ ý ¾ ½ × ¨ÁÂôÒûÇ (a) Ì ÈòÐ « ¨ÁÔõ ÍÆøÁ¡üÚ Å¾õ ($\dot{H}\underline{a}$) ¬¸ÂÅüÈ ý Ü Î ¾Ä¡Öõ «ÈÅ ì¸ò¾ì¸Ð. (Kinetic System) ±É§Å ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ´ ýÈü Ì ¡Â þÀì¸ò¾ ý ºÁ ýÀ¡ Î ã ýÚ Å ¨ ¸Âø ¾ÕÅ ì¸ôÀ Î ¸ÈÐ. «¾¡ÅÐ. $\left\{\sum_{i=1}^{n} F\underline{i}\right\}$ G ÅÆ§Â $= \left\{\sum \underline{F} + \sum m\underline{a}\right\} = \left\{m\underline{a} + \dot{H}\,\underline{a}\right\}$

4.6.5.2 ´Õ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ ý ¯ó¾ò¾ÕôÀò¾ü Ì ¯¡Â ºÁýÀ¡ Î ¸û (Moment of Momenturn Equators)

m ¾ ½ × ¨¼Â ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ´ ýÚ ¾Ç þÂì¸ò ¨ ¾ (x-y) ¾Çò¾ø « ¨ÁòÐì ¦¸¡ûÇð Î õ. ¦À¡ÕÇø ÅÇì¸ÁÇôÀ¾ü¸¡¸ m_i) ¾ ½ × ¦¸¡ ñ ¼ (P_i) ±ýÈÒûÇ ±Î ì¸ôÀð Î ûÇ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. G-±ý Ûõ ¾ ½ × ¨ÁÂôÒûÇÂø (Gx', Gy') ±ý Ûõ ¸ ¨¼¿ ¨ Ä «î Í¸ ¨ Ç ±Î òÐ $\left(G'\underline{P_i} = \underline{n_i}\right)$ ±ýÈ ¾ ¨ º «Ç×ÕÅ¡ø (p′)-ý þÕôÀ¢¼õ Ì Èì¸ôÀ Î õ. (Gx', Gy') ±ýÈ « ¨Áôò ¬¾ÒûÇÂø (O-ø) « ¨ÁÔõ OXY-±ýÈ « ¨ÁôÀü Ì þ ¨ ½Â¡¸ ¯ûÇÐ. G Ì ÈòÐ ¸ðÊÚì¸ô ¦À¡ÕÇ ý ÍÆø ¯ó¾ò ¨ ¾.

$\left(H\underline{G} = \sum_{i=1}^{n} \underline{n_i} \wedge mi\underline{v_i}'\right)$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ Î Å ¨ ÃÂÚì¸ÈÐ. þ í Ì $\left(\underline{r_i}' = Pi\right)$ Â ý "¾ ¨ ºÂ" ¿ ¨ ÄÂ¡ Ì õ $\left(mi\underline{v_i}'\right)$ « ¨ÁôÀø (P_i) ÒûÇÂ ý §¿÷§¸¡ð Î ¯ó¾Á¡ Ì õ. (w) ±ýÀÐ ¦À¡ÕÇ ý §¸¡½ò¾ ¨ º§Å¸ò ¨ ¾ì Ì ÈôÀ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. ±É§Å

$$\underline{V_i}' = \underline{w} \wedge \underline{n_i}' \quad (\because V = nw) \ \therefore \underline{H_G} = \sum_{i=1}^{n}\left[\underline{n_i} \wedge \left(\underline{w} \wedge \underline{r_i}\right) m_i\right]$$

($\underline{H_G}$) ý ÀÕÁý $H_G = \sum_{i=1}^{n}\left[(r_i)^2\, w m_i\right];$

$$= w\sum_{i=1}^{n}\left[(r_i')^2\, m_i\right];$$

$$= w\int r^2 dm$$

$$= wI_m$$

($I_m = Gx^1y^1$) « ¨ ÁôÀ¢ø ¸ðÊÚ ì ¸ô¦À¡Õ Ù ì Ì ¿¢ ¨ È Ì ò¾¡ ¸ ¾¢ ½¢× ¨ ÁÂôÒ û Ç¢ (G)Â¢ ý ÅÆ¢§Â ± Î ì ¸ôÀ Î õ « î Í Ì È¢òÐ ¸ ½ ì ¸¢¼ôÀ Î õ, ¦À¡ÕÇ¢ ý ¿¢ ¨ ÈÔõ ¿¢ ¨ ÄÁò ¾¢ÕôÒ¾¢È ý ¬ Ì õ.
± É §Å,

$$\underline{H_G} = I_m \underline{w}$$

$$\frac{d}{dt}\{H\underline{G}\} = I_m \frac{d}{dt}\{\underline{w}\}$$

$$H\underline{G} = I_m \sim;$$

4.6.5.3 ¸ðÊÚ ì ¸ô¦À¡Õû ´ ýÈ¢ ý ¾Ç þÂ ì ¸ õ - Ê' « ÄõÀ¡ðÊ ý ¾òÐÅõ
(Plane motion of a Rigid body- D' Alembert's Principle)

$$\sum \underline{F} = m\underline{a};$$

¾¢ ¨ ºÂ¢Ä¢ « ¨ ÁôÀ¢ø

$$\sum F_x = ma_x; \sum F_y = ma_y;$$ ÁüÚõ

$$\sum M\underline{G} = H\underline{G};$$

¾¢ ¨ ºÂ¢Ä¢ « ¨ ÁôÀ¢ø

$$\sum M_G = H_G = I_m \sim;$$

Ê- « ÄõÀ¡ðÊ ý ¾òÐÅõ ¸ðÊÚ ì ¸ô¦À¡Õû ´ ýÈ¢ ý §Áø ¦ºÂøÀ Î õ « ¨ ÉòÐ ÒÈÅ¢ ¨ º ¸ Ù õ.

4.6.6 ¸ðÊÚ ì ¸ô¦À¡ÕÇ¢ ý §Áø ¦ºÂøÀ Î õ §Å ¨ Ä Å¢ ¨ º ($\underline{F}$) ÁüÚõ Å¢ ¨ º þÂ í ¸¢Â ¾¢ ¨ ºÂ¢ø ¿¢ ¸ úó¾ þ¼ô¦ÀÂ÷î º¢ ¬ ¸¢ÂÅüÈ¢ø ¦ÀÕì Ì ò ¦¾¡ ¨ ¸Â¡ø « ÇÅ¢¼ôÀ Î õ.

$$U_{1-2} = \int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

þ í Ì $\underline{F}.d\underline{r}$ ± ý ÀÐ ¾¢ ¨ ºÂ¢Ä¢ô¦ÀÕì ¸ õ « øÄÐ ÒûÇ¢ô¦ÀÕì ¸ Á¡ Ì õ($\underline{F}$) ± ý È Å¢ ¨ º ($\underline{F_1}, \underline{F_2}, ...\underline{F_x}$) ¸ðÊÚ ì ¸ô¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂøÀ Î õ ± É¢ø « ùÅ¢ ¨ º¸Ç¢ ý Å¢ ¨ Ç× Å¢ ¨ ºÂ¡ ¸ ì ¸ Õ¾ôÀ Î õ ± É §Å.

$$U = \int_1^2 \underline{F_1}.d\underline{r_1} + \int_1^2 \underline{F_2}.d\underline{r_2} + ... + \int_1^2 \underline{F_x}.d\underline{r_x}$$

¯ ûÅ¢ ¨ º ¸ Ù ì Ì þ ¨ ¼Â¢ø º¡÷Ò þÂ ì ¸ õ þøÄ¡¾¾¡ø « ¨ Å ¸ û ¿¢ì ¸ôÀ Î ¸¢ ýÈÉ.

4.6.6.1 ¾¢ÕôÒ¾¢ÈÉ¢ ý §Å ¨ Ä

XOY ¾Çò¾¢ø ¸¢ ¨ ¼Â¡É x « î Í ì§ ¸¡ðÊø ¦À¡ÕÇ¢ø ´ ýÈ¢ü¦ ¸¡ ý Ú ºÁÁ¡¸×õ ±¾¢Ã¡É ¾¢¨º¸¨ÇÔõ ¦ÀüÚ þÕÅ¢¨º¸û ¦¾¡¨ÄÅ¢ø «¨ÁÔ¦ÁÉ¢ø

$$du = du_A + du_A = F\left(rd\theta\right) + F\left(rd\theta\right)$$
$$= 2F\left(rd\theta\right)$$
$$\therefore \int_1^2 du = U_{1-2} = Md\overline{\ };$$
$$\int_1^2 du = U_{1-2} = \int_1^2 Md\overline{\ }$$

þ í Ì ¾¢¨ºÂ¢ ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ($\underline{M}$) ¾Ç ÍÆüº¢ì Ì ¦º í Ì ò¾¡¸ ¯ûÇÐ.

4.6.6.2 ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ´ ýÈ¢ý þÂì ¸ ¬üÈø

(dm) ±ýÈ º¢È¢Â ¿¢¨È, ¿¢¨ÄÂ¡É xoy ¾Çò¾¢ø º¡÷Ò ¾¢¨º§Å¸õ ($\underline{V_1}$) ±ýÚûÇÅ¡Ú ¯ûÇ§À¡Ð ¦À¡ÕÇ¢ý ¦Á¡ò¾ þÂì ¸ ¬üÈø

$$T = \frac{1}{2}\int dm\left(V\underline{i}.V\underline{i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int dm\left(V\underline{i}.V\underline{c}\right)\left(V\underline{i}.V\underline{c}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int dm\left(V\underline{i}.V\underline{i}\right) + \frac{1}{2}\int dm\left(V\underline{i}.V\underline{c}\right) + \frac{1}{2}\int dm\left(V\underline{c}.V\underline{i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int dm w^2 r^2 + \frac{1}{2}m\left(V_c\right)^2 + dmV_c\frac{d}{dt}\left(V\underline{i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}w^2 I_c + \frac{1}{2}m\left(V_c\right)^2 + \int dm\left(\left(V_{cx}\right)\underline{i} + \left(V_{cy}\right)\underline{j}\right)\frac{d}{dt}\left(x\underline{i} + y\underline{j}\right)$$
$$= \frac{1}{2}w^2 I_c + \frac{1}{2}m\left(V_c\right)^2 + 0$$

(¾¢½¢× ¨ÁÂõ e-ø, $\int dmx = 0 = \int dmy$]

·T =(T ÍÆüº¢)+ (Tþ¼ô¦ÀÂ÷î º¢)

4.6.6.3 Â¡¾¡¸¦Á¡Õ ¿¢¨ÄÂ¡É «î Í Ì È¢òÐ ÍÆüº¢

m ¿¢¨ÈÔûÇ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ý ¾¢½¢×¨ÁÂõ e- ø xoy ¿¢¨ÄÂ¡É ¸Ç¦Á¡ýÈ¢ø ¯ûÇÐ. O ÌÈ¢òÐ $\left(\underline{OC} = \underline{rc}\right)$ O ÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â ²§¾Ûõ ´Õ «î Í ÌÈ¢òÐ ¦À¡Õû ÍÆøÅ¾¡¸ì¦¸¡û¸ e-ø ¦¾¡Î§¸¡ðÎ §Å¸õ $\left(\underline{VC}\right)$ ±Éì¦¸¡û¸. $\left(\underline{VC} = w\underline{r}c\right)$

$$\therefore T = \frac{1}{2}\sum dmV_c^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum dmr^2w^2 = \frac{w^2}{2}I_0$$

þ í Ì $I_0 = I_c + M_c{}^2$
O ÅÆ¢Â¡¸ « ¨ÁÔõ ¿¢¨ÄÂ¡É « î Í ÀüÈ¢ ¿¢¨È (Mass)-ý º¼òÐÅò ¾¢ÕôÒ¾¢Èý .

$$\therefore T = \frac{1}{2}I_O w^2$$

4.6.6.4 §Å¨Ä ¬üÈø¸Ù ì Ì ¯¡¢Â ¾òÐÅõ

T1 = ¦¾¡¼ì¸ þÂì¸ ¬üÈø

T2 = þÚ¾¢ þÂì¸ ¬üÈø

T12 =¿¢¨Ä 1-Ä¢ÕóÐ I_2 ¿¢¨Äì Ì .

¦À¡Õû þÂí Ì õ§À¡Ð ¦À¡ÕÇ¢ø ¦ºÂøÀ Î õ « ¨ÉòÐÅ¢¨º¸û ÁüÚõ ¾¢ÕôÒ¾¢Èý ¸û ¦ºöÔõ §Å¨Ä ±É §Áü¦¸¡û Ù õ§À¡Ð.

$T_1 + U_{1-2} = T_2$ ±ýÈ ºÁýÀ¡ Î ¸¢¨¼ì¸¢ÈÐ.

4.6.6.5 ¬üÈø ¸¡ôÒ (Conservation of energy)

¸¡ôÒ¿¢¨Äò ¦¾¡ Ì ¾¢ ±ýÀÐ ¦À¡ÕÇ¢ø « ¨ÉòÐ Å¢¨º¸Ç¡Öõ ¦ºöÂôÀð¼ §Å¨Ä ÒûÇ¢1-Ä¢ÕóÐ ÒûÇ¢2-ì Ì î ¦ºøÖõ À¡¨¾ì Ì î º¡÷ÀüÈ¾¡ Ì õ.

$\vartriangle v = -\vartriangle w =$ - ¦ºö¾ §Å¨Ä

$V_{1-2} = V_1 - V_2$ þ¨¾ôÀÂý À Î ò¾¢

$\therefore T_1 + V_{1-2} = T_2$ ±ýÀÐ

$T_1 + V_1 - V_2 = T_2$

$T_1 + V_1 = T_2 + T_2$

±É§Å, ¸¡ôÒ ¿¢¨Äò¦¾¡ Ì ¾¢Â¢ø ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø « ¨ÁÔõ ¦Á¡ò¾ ¬üÈø (þÂí Ì ¬üÈø + ¿¢¨Ä ¬üÈø) þÚ¾¢Â¢ø « ¨ÁÔõ ¦Á¡ò¾ ¬üÈÖì Ì (þÂí Ì ¬üÈø + ¿¢¨Ä ¬üÈø) þ¨Å ´ù¦Å¡ýÚõ Á¡È¢Ä¢Â¡ Ì õ.

4.6.6.6 ¾¢Èý (Power)

§¿Ãõ t Ì È¢òÐ ±Î ì¸ôÀ Î õ ¦ºöÔõ §Å¨ÄÂ¢ý Å¾õ «¾¡ÅÐ §Å¨Ä Á¡Ú Å¾õ ¾¢Èý ±ýÚ Å¨ÃÂÚì¸ôÀ Î õ.

$U = \underline{F}.\underline{r}$

¾¢Èý $\frac{du}{dt} = \underline{F}.\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{F}.\underline{V}$

¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ´ýÚ ($\underline{w}$) ±ýÈ ÍÆø§Å¸ò¾¢Öõ ÍÆÄ¢¨ ½ ´ýÈ¢Öõ ¦ºÂøÀ Î Å¾¡¸¢ø.

¾¢È ý ($= \frac{du}{dt} = \underline{M}.\frac{d\bar{}}{dt} = \underline{M}.\underline{W}$)

¾ÈÉ¢ý «Ä Ì ($= J/s =$)Å¡ð (Watt) $\left[1w = 1.J/S = 1Nm/s\right]$

4.6.7 §¿÷§¸¡ð Î ò ¾¡ì¸ÇÇ¨ ÅÔõ §¿÷§¸¡ð Î ò ¾¢½¢×§Å¸Óõ (Linear Impulse and linear Momentum)

m ¿¢¨ÈÔûÇ ¸ðÊÚì¸ô¦À¡ÕÇ¢ý §¿÷§¸¡ð Î ò ¾¢½¢×§Å¸õ (" $\underline{G}$ ") «ô¦À¡ÕÇ¢ø «¼í¸¢È ¿¢¨È (m_i) - ³ì ¦¸¡ñ¼Ðõ P_i ¾¢¨º§Å¸õ ÒûÇ¢¸Ç¢ý $V\underline{i}$ §¿÷§¸¡ð Î ì ¾¢½¢× §Å¸ í¸Ç¢ý ¾¢¨º«Ç×Õ×¸Ç¢ý Ü Î¾Ä¡ Ìõ. ±É§Å ¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õ Ù ì Ì

$$\underline{G} = \sum_{i=1}^{m} miV\underline{i} = \sum_{i=1}^{m} mi\left(\underline{V_c} - \underline{V_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} mi\left(\underline{V_c} - \underline{V_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} mi\left(\underline{V_c} - W\underline{V}\right)$$

$N\underline{c}$ ±ýÀÐ ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì Ì È¢ôÀ¾¡Öõ ÁüÚõ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_i \underline{r}\right) = 0$$ ±ýÀ¾¡Öõ

$$\underline{G} = \sum m_i V_i = m\underline{V_c}$$

$\underline{V_c}$ ±ýÀÐ ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý ¾¢¨º§Å¸õ ±ýÀ¾¡Öõ ($\underline{g}$) ±ýÀÐ §¿÷§¸¡ð Î ò ¾¢½¢×§Å¸õ ±ýÀ¾¡Öõ ¿¢äð¼É¢ý þÂì¸î ºÁýÀ¡ð¨¼

$$\sum \underline{F} = \sum m_i a_i = ma_c = m\frac{d}{dt}\left(\underline{V_i}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(mV\underline{i}\right)$$

±É§Å

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \underline{F}dt = m\left[(Vc)_2 - (Vc)_1\right]$$

$$\frac{\underline{G_2}}{t_2} - \underline{G_1}$$

. $\underline{G_2} = \underline{G_1} + \int_{t_1}^{t_2} (\sum \underline{F})dt$

þ í Ì $(Vc)_2$ ÁüÚõ $(Vc)_1$

±ýÀ¨Å Ó¨È§Â (- t_2, t_1) §¿Ãí¸Ç¢ø ¾¢½¢× ¨ÁÂò¾¢ý ¾¢¨º§Å¸ í ¨Çì Ì È¢ì¸¢ýÈÉ.

4.6.8 §¸¡½ ¾¡ì¸Ç¨ÅÔõ ÁüÚõ ÍÆø¯ó¾Óõ
(Angular Impulse and Angular Momenturn)

²§¾Û¦Á¡Õ ÌÈ¢ôÀ¢ð¼ ÒûÇ¢ (O) ÌÈ¢òÐ ÍÆø «¨ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. ¦À¡ÕÇ¢ø «¼í¸¢Â «¨ÉòÐ Ð¸Ùì Ì¡¢Â ÍÆø¯ó¾õ.

$$\underline{Ho} = \sum \underline{ri} \wedge mi\underline{Vi}$$

($\underline{ri}$) ÁüÚõ ($\underline{Vi}$) ¬¸¢Â¨Å ´§Ã¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀÎ Å¾¡ø «ÅüÈ¢ý ¾¢¨ºÂ¢ Ì Úì Ìô¦ÀÕì¸¢ âîº¢ÂÁ¡Ì õ §ÁÖõ

$$\left(mi\frac{d}{dt}(\underline{Vi}) = miai\underline{} = Fi\underline{} \right)$$

$$\therefore \frac{d\,\underline{Ho}}{dt} = H\underline{o} = \sum n\underline{i} \wedge F\underline{i} = \sum M\underline{o}$$

$$\int_1^2 dHo = \int_{t_1}^{t_2} \sum M\underline{o}dt;.$$

$$((\underline{Ho})_2 = (\underline{Ho})T\int_{t_1}^{t_2} \sum \underline{Mo}dt;$$

§ÁÖõ $\underline{Ho} = \sum n\underline{i} \wedge miN\underline{i}$

$$= \sum n\underline{i} \wedge mi(\underline{w} \wedge n\underline{i});$$

¾Çò¾¢ø «¨ÁÔõ Å¢É¡ì¸Ùì Ì

$\underline{w} \wedge r\underline{i} = wr \wedge l_r$

($l\underline{N}$) ¬ÉÐ ($\underline{N}$) ¾¢¨ºÂ¢ø «¨ÁÔõ ´§Ã Ìò¾¢¨º «Ç×ÕÅ¡Ì õ

$$\therefore \underline{H_0} = \sum wn_i \left(n_i \wedge m_i \underline{l_r} \right)$$

$$= \sum wm_i r_i \left(r_i \wedge \underline{l_r} \right)$$

$$r_i \wedge \underline{l_r} = r_i \underline{l_r} \wedge \underline{l_r} = r_i \underline{k}$$

$$\therefore \underline{H_0} = w\left(\sum m_i r_i^2 \right)\underline{k}$$

$$= I_0 w\underline{k}$$

$$(H\underline{o})_2 = I_o w_2 \underline{k}$$

$$\left(H_{\underline{o}} \right)_1 = I_0 w_1 \underline{k}$$

±É§Å $\underline{k}(I_o w_2 - I_o w_1) = \underline{k} \int_{t_1}^{t_2} M_o dt$

« øÄÐ $(I_O W_2) = (I_O w_1) + \int_{t_1}^{t_2} M_O dt$

4.6.9. ÍÆø ¯ó¾¸¡ôÒ(Conservation of Angular Momenturn)

¸ðÊÚì¸ô¦À¡Õû ´ýÈ¢ø ÒÈÅ¢¨º¸û ¦ºÂøÀÎõ§À¡Ð ÒÈÒûÇ¢ ÌÈ¢òÐ ¸¡ì¸ôÀÎ ¸¢ÈÐ Å¢¨º¸û ¾¡ì¸Ç¨Å¸û âîº¢ÂÁ¡Ìõ. t_1 §¿Ãò¾¢ø ¦¾¡Ì¾¢ì Ì¡¢Â ¯ó¾í¸û t_2 §¿Ãò¾¢ø ¦¾¡Ì¾¢ì Ì¡¢Â ¯ó¾í¸Ùì Ì º¡¢ºÁÁ¡¸ ¯ûÇÉ. ¦¾¡Ì¾¢Â¢ý «¨ÉòÐ §¿÷§¸¡ð Îò ¾¢½¢×§Å¸õ ±ó¾ ¾¢¨ºÂ¢Öõ §ºÁ¢ì¸ôÀÎ ¸¢ÈÐ. «¨ÉòÐ ÍÆø ¯ó¾í¸Ùõ ²§¾Ûõ ´Õ ÒûÇ¢ ÌÈ¢òÐ ¾¡ì¸ôÀÎ ¸¢ÈÐ.

4.6.10. Á¡¾¢¡¢ì ¸½ì Ì¸û

Á¡¾¢¡¢ 4.6.10.1

´Õ ¿¢¨ÄÂ¡É ÒûÇ¢¨Âì ÌÈ¢òÐ ¾¸Î ´ýÚ ÍÆýÚ þÂí ÌÅ¨¾ $¯ = 6(1+\sim 4t)$ ±ýÈ ºÁýÀ¡Î «È¢Å¢ì¸¢ÈÐ. ¯ ¬¨ÃÂÉ¢Öõ t Å¢É¡ÊÂ¢Öõ «ÇÅ¢¼ôÀÎ ¸¢ýÈÉ. ¾¸ð¼ý §¸¡½ «îÍò¦¾¡¨Ä×¸û ¾¢¨º§Å¸õ ÁüÚõ ÓÎì¸õ ¬¸¢ÂÅü¨È t=0,t=3 Å¢É¡ÊÂ¢¸ ¯ûÇ§À¡Ð ¾¡÷Á¡É¢ì¸×õ.

¾¡÷×:

$$¯ = 6(1+e^{-4t})$$

$$w = \frac{d¯}{dt} = 6(-4)e^{-4t} = -24e^{-4t}$$

$$\sim = \frac{d^2¯}{dt^2} = -24(-4)e^{-4t} = 96e^{-4t}$$

$$¯ = 12 \quad \text{¬¨ÃÂý}$$

(i)t=0 ,w=-24 ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê)

$\sim = 96$ ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê)

(ii) t=3 ,6(1+ e^{-12})

w=-24 e^{-12}

=96 e^{-12}

Á¡¾¢¡¢ 4.6.10.2

ÒûÇ¢¨Â ¨ÁÂÁ¡¸ì¦¸¡ñ¼ ¼ºì¸Ãõ ´ýÈ¢ø ´Õ¸Â¢Ú ÍüÈôÀð Î ûÇÐ. ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø ºì¸Ãõ ¿¢¨ÄÂ¡¸ ¯ûÇÐ. ¸Â¢Ú ¦¾¡í Ì Ú¾¢ ÒûÇ¢Â¢ø Å¢¨º ´ýÚ ÀÂýÀÎò¾ôÀÎ ¸¢ÈÐ. «ùÅ¢¨º ÓÎì¸õ a= (5t) Á£/(Å¢É¡Ê) ^{2} ´ý¨È

« Ç¦ôÀ¾¡ ¸ ì ¦¸¡ ñ Î (i) §¸¡½ ¾¢¨ º§Å¸õ (ii) §¸¡½ þÕôÀ¢¼ò¨¾ OP ±ý È
§¸¡ðÊø ¸ ñ È Î ¸. (P ÒûÇ¢º ì ¸Ãò¾¢ø « ¨ ÁóÐûÇÐ) º ì ¸Ãò¾¢ý ¬Ãõ 0.3 Á¢.

¾£÷×

$$(a_p)_t = \sim r$$

$(5t)$ Á¢/Å¢É¡Ê ^{2} (0.3)Á¢

$$\sim = \frac{5t}{0.3} = \frac{50t}{3}$$ ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê) ^{2}

(i) $$\sim = \frac{dw}{dt} \Rightarrow \frac{50}{3}t = \frac{dw}{dt}$$

$$dw = \frac{50t}{3}dt;$$

$$\int_0^w dw = \int_0^{3t} \frac{50}{3}dt = \frac{50}{3}\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^t$$

$$w = \frac{50}{6}(t^2) = \frac{25}{3}t^2;$$ ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê)

(ii) $$;\frac{d^-}{dt} = w = \frac{25}{3}t^2$$

$$- = \int_0^{-} dt = \int_0^{t} \frac{25}{3}t^2 dt = \frac{25}{9}\left(t^3\right)$$

$$. \quad - = \frac{25}{9}t^3$$ ¬¨ÃÂý

Á¡¾¢¡¢ 4.6.10.3

ÍÆÖõ º ì ¸Ãò¾¢ý ¦¾¡¼ì¸ §¸¡½ ¾¢¨ º§Å¸õ 15 ¬¨ÃÂý/Å¢É¡Ê ±ýÚõ ¿¢¨ÄÂ¡É §¸¡½ Ó Î ì ¸õ 5 ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê)^2 ±É ×õ ¯ûÇ§À¡Ð, §¸¡½ ¾¢¨ º§Å¸õ 20 ¬¨ÃÂý/Å¢É¡Ê « Ç ¨ Å ±ò¾¢ò¾¡ í Ì õ « ÇÅ¢ü Ì ¡¢Â ÍÆüº¢Â¢ý ±ñ ½¢ì ¨ ¸ ¨ Âò ¾£÷Á¡É¢ì ¸.

¾£÷×

$$w^2 = w_o{}^2 + 2\sim(^- - {}^-{}_o)$$

W= 20 ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê)

Wo= 15 ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê)

α= 5 ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê) ^{2}

∴ 400=225 +2(5) $^-$

175 = 10 $^-$ « øÄÐ $^-$ = 17.5 ¬¨ÃÂý

« øÄÐ 2.8 ÍüÚ¸û

$$w = w_o + \sim t$$

20=15+5t 5t=5, t=1 Å¢É¡Ê.

Á¡¾¢¡¢ 4.6.10.4

4Á¦ Å¢ð¼ÓûÇ ¸ôÀ¢ ´ýÈ¢ý §¸¡½§Å¸õ 3 ¬¨ÃÂý/Å¢É¡Ê ¸ôÀ¢Â¢ý Å¢Ç¢õÒôÒûÇ¢Â¢ý ¦Á¡ò¾ Ó÷Îì¸õ 25Á¦/(Å¢É¡Ê)^2 ¸ôÀ¢Â¢ý §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ¸.

¾£÷×

$$a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_t}^2}$$

G = 25Á¦ /(Å¢É¡Ê)^2

$a_n = rw^2 = 2(3)^2$ 18 Á¦/(Å¢É¡Ê)^2

$$a_t = r\sim = 2\sim$$

· 25 = $\sqrt{18^2 + (2)\sim^2}$

$$625 = 324 + 4\sim^2$$

4$\sim^2$=301 $\sim^2$ =75.25

$\sim$ = 8.378 ¬¨ÃÂý/(Å¢É¡Ê)^2.

Á¡¾¢¡¢ 4.6.10.5

M ¿¢¨ÈÔõ, 2a ¿¦ÇÓûÇ ¸õÒ ´ýÚ ¾¨¼Â¢ýÈ¢ Ó¨ÉôÒûÇ ´ý¨Èì ÌÈ¢òÐ ÍÆÄò¾ì¸Ð. ¿¢¨Äì Ìò¾¡¸ ¯Ú¾¢ÂüÈ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø ¯ûÇ ¾Õ½ò¾¢ø ¸õÒ Å¢ÎÅ¢ì¸ôÀÎ¸¢ÈÐ. ¸õÒ «¾ý ¿¢¨Äì ÌòÐì Ì¡¢Â ¸¦Æ¡È þ¼ò¨¾ì ¸¼ì Ìõ ¾Õ½ò¾¢ø «ì¸õÀ¢ý §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸õ $\sqrt{3g/a}$ ±Éì¸¡ð Î¸.

¾£÷×

(þÚ¾¢ þÂì¸ ¬üÈø)- (¦¾¡¼ì¸ þÂì¸ ¬üÈø) = Å¢¨º¦ºö¾§Å¨Ä

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}Ma^2\right)w^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}Ma^2\right)(0) = Mg(2a)$$

« øÄÐ $\frac{2}{3}aw^2 = 2g$

$$w^2 = \frac{3g}{a} \therefore w = \sqrt{3g/a}$$

Á¡¾¢¡¢ 4.6.10.6

a ¬ÃÓûÇ Åð¼ò¾ð Î ´ýÚ ¾¨¼Â¢ýÈ¢ «¾ý Åð¼Å¨ÃÂ¢ø ¯ûÇ O ±ýÈ ÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§Â ¸¢¨¼Â¡¸ «¨ÁÔõ Å¢ð¼ò¨¾ò ÌÈ¢òÐ, ¾Çò¾¢ü Ì ¿¢¨Ä

Ìò¾¡¸ ÍÆÄ¡¸ ÜÊÂ¾¡¸×ûÇÐ. O-ÒûÇ¢ì Ì ÅÆ¢§Â «¨ÁÔõ Å¢ð¼õ O ÒûÇ¢ì Ì §Áø ¦ºí Ìò¾¡¸ «¨ÁÔõ §¿Ãò¾¢ø þÂì ¸õ ¦¾¡¼í Ì¸¢ÈÐ. þò¾¨¸Â Å¢ð¼õ 90° ÍÆýÈ×¼ý, Åð¼ò¾¸ðÊý §¸¡½ ¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ ¸.

¾¢÷×

þ¨½ «îÍò§¾üÈò¾¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ «îÍ ÌÈ¢òÐ ±Î ì ¸ôÀÎõ ¾¢ÕôÒ¾¢Èý.

$$\frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2$$

O ÒûÇ¢Â¢ý ÅÆ¢§ÂÔûÇ Å¢ð¼õ ¦ºí ÌòÐ ¿¢¨ÄÂ¢Ä¢ÕóÐ ¸¢¨¼¿¢¨Äì Ì ÅÕõ§À¡Ð, þÂì ¸ ¬üÈÄ¢ý ÅÇ÷î º¢ ÁüÚõ ¦ºö¾ §Å¨Ä.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Ma^2\right)w^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Ma^2\right)(0)\ \ 2, Mga$$

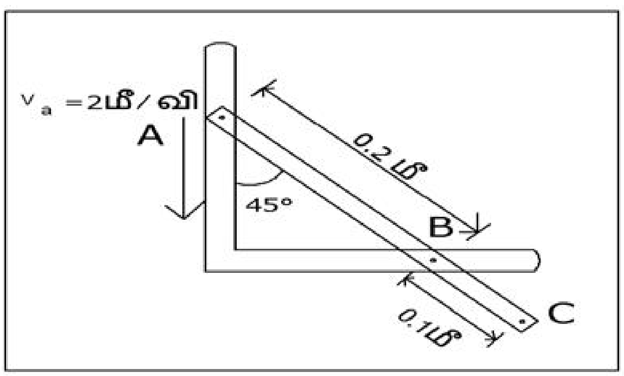
¬ Ìõ. ±É§Å

$$\frac{3}{4}Ma^2w^2 = mga$$

«øÄÐ $W = \sqrt{4g/3a}$

Á¡¾¢¡¢ 4.6.10.7

À¼ò¾¢ø ¸¡ðÊÂÀÊ ¸ ñ ½¢ (Link) ´ýÚ A,B ÒûÇ¢¸Ç¢ø «¨ÁÔõ þÕ¸ð¨¼¸Ç¡ø ÅÆ¢¸¡ð¼ôÀÎ ¸¢ÈÐ. þùÅ¢Õ¸ð¨¼¸ Ùõ ¸¡Ê¸Ç¢ý (Slots) Ð¨½¦¸¡ ñ Î þÂí Ì¸¢ýÈÉ A-ý ¾¢¨º§Å¸õ ¸¢ú§¿¡ì¸¢ÂÅ¡Ú 2Á¡/Å¢É¡Ê ±ýÈ¡ø $\theta = 45°$ ±ýÚûÇ§À¡Ð ¿ý¾¢¨º§Å¸ò¨¾ì ¸¡ñ ¸.



À¼õ 4-6-2

¾¢÷×

¾¨º ÅÊ×Õ×¸¨Ç $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ º¡÷ó¾ ÀÌ¾ì Ü Ú¸Ç¡¸ô À¢¡¢òÐ A ÒûÇ¢¨Â «ÊôÀ¨¼Â¡¸ì ¦¸¡ñ Î A,B ÒûÇ¢ ¾¢¨º§Å¸ í¸ Ùì Ì¡¢Â ºÁýÀ¡Î.

$$\underline{V_B} = \underline{V_A} + \underline{w} \wedge \underline{r}B_A$$

$$\underline{V_B}i = 2\underline{j} + \left[w\underline{k} \wedge 0.2\sin 45°i - 0.2\cos 45°\right]$$

$\underline{V_B} i = -2\underline{j} + 0.2w\sin 45^\circ \underline{j} - 0.2w\cos 45^\circ \underline{i} V_B = 0.2w\cos 45^\circ$

0=-2+0.2w sinw

· W= 14.1 ¬ ¨ ÃÂ ý /(Å¢É ¡Ê)

V_B = 2Á¦/Å¢É ¡Ê

Unit 5
¯Ã¡ö×
(Friction)

´ ý ¨È¦Â¡ ýÚ ¦¾¡ Î õ ¦À¡Õû¸ Ù ì ¸¢ ¨¼§Â ´ Õ ¦À¡ÕÇ¢ ýÁÐ Áü¦È¡Õ ¦À¡Õû ÅØì Ì ¾ ¨Äò ¾ Î ì Ì õ Å¢ ¨º§Â ¯Ã¡ö×Å¢ ¨º ±ÉôÀ Î õ.

5.1 ¯Ã¡ö× Å ¨ÃÂ ¨È

þÕ ¦À¡Õû¸ û ´ ý ¨È¦Â¡ ýÚ ¦¾¡ð Î ì ¦ ¸¡ ñ ÊÕó¾¡ø, ´Õ ¦À¡ÕÇ¡ÉÐ Áü È ¦À¡ÕÇ¢ýÁÐ ÅØì Ì ¾ ¨Äò ¾ Î ôÀ¾ü Ì «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ Î ÒûÇ¢Âø ¿¢ ¸ Øõ Å¢ ¨º ì Ì ì ¸¡Ã½Á¡¸¢ÔûÇ «ùÅ¢Õ ¦À¡Õû¸Ç¢Û ¨¼§Â Ä ñ Ò ¯Ã¡ö× ±ÉôÀ Î õ.

¯Ã¡ö× ±ýÀÐ ¾¡É¡¸§Å º¡¢ì ¸ ð Î õ Å¢ ¨º þÂì ¸ò ¨¾ò ¾ Î ôÀ¾ü Ì §Áø «¾¢ ¸Á¡ ¸ ¯Ã¡ö× ¿¢ ¸úÅ¾¢ø ¨Ä. þÂì ¸ô À ñ Ò¸ Ù ì Ì ¡¢Â ¯Ã¡ö× (Kinectic functional) ºÚì ¸¢ ÅØÅ¾¢ ý ¿¢ ¨Äì Ì ô ÀÈ ì , ¿¢ ¸ úÅ¾ü Ì ²üÈ ¿¢Àó¾ ¨ É ¨ Â ¦ÅÇ¢ôÀ Î òÐ¸¢ÈÐ. þÂì ¸ô À ñ Ò¸ Ù ì Ì ¡¢Â ¯Ã¡ö×Å¢ ¨º ±ô§À¡Ðõ þÂì ¸¿¢ ¨Ä ¯Ã¡ö×Å¢ ¨ºÂ¢ ý ¦ÀÕõ Á¾¢ôÀ¢ü Ì ºüÚ Ì ¨ÈÅ¡¸ ¯ûÇÐ.

ÍÆüº¢Åð¼ À௧ÅüÚ¾Ö ì Ì ¯ðÀð Î ûÇ ¿¢ ¨Ä ¨ÁÂ¢ø ¯ûÇ¢ð Î ¯Ã¡ö× ²üÀ Î ¸¢ÈÐ. Á¢ ¸×õ Á¢û þÂøÒ ¨¼Â ãÄô¦À¡Õð¸ Ù ì Ì þò¾ ¨ ¸Â ¯ûÇ¢ð Î ¯Ã¡ö× ÒÈì ¸ ½¢ì ¸ òì ¸ ¾ì ¸ ¡ ¯ûÇÐ. «§¾§¿Ãò¾¢ø º¢È¢Â¾¡¸ Á¢û þÂøÒ ¨¼Â ãÄô¦À¡Õð¸ Ù ì Ì ¯ûÇ¢ð Î ¯Ã¡ö×Å¢ ¨º Ì È¢ôÀ¢¼òì ¸ «ÇÅ¢ø « ¨ Á¸¢ÈÐ.

þÕ ¦À¡Õû¸ û ´ ý ¨È¦Â¡ ýÚ ¦¾¡ð Î ì ¦ ¸¡ûÙ õ ¿¢ ¨ÄÂ¢ø, «ô¦À¡Õð¸ Ù ì Ì þ ¨¼Â¢ø ¦ºÂøÀ Î õ ¯Ã¡ö×Å¢ ¨º ¾ ¨¼ÂÈ ¦À¡ÕÇ¢ý Å ¨ÃÀ¼ò¾¢ý Å¡Â¢Ä¡¸ ì ¸ ¡ð¼ôÀ Î ¸¢ÈÐ.

¯¼ÉÊÂ¡¸ þÂì ¸ò ¨¾ì ¸ ÆÅ¢Õì ¸¢È «øÄÐ ºÚì ¸¢ÅØ¸¢È ÒûÇ¢ì Ì ì Ì ÅðÀ¡Ã Ì ¾¢ ¨Â þø¨ ¿¢ ¨Ä ¯Ã¡ö×ì Ì ¡¢Â ÅÃõÒ ±ø ¨ÄÂ¡¸ (Range of Static Friction) ¸Õ¾ôÀ Î ¸¢ÈÐ. þó¿¢ ¨Ä ¨Â ¯Ã¡ö×Å¢ ¨ºÂ¢ý Á¾¢ôÒ º¡¢ ¨ Äì Ì ¯¢ÂÅ¡É º¡ýÈ¡Í ¸Ç¡ø ¾÷Á¡É¢ì ¸ôÀ Î õ.

5.2 ¿¢ ¨ÄÂ¢Âø ¯Ã¡ö× Å¢¾¢ ¸ û À¢ý ÅÕÁ¡Ú

Å¢¾¢ 1

þÕ ¦À¡Õû¸ û ´ ý ¨È¦Â¡ ýÚ ¦¾¡ð Î ì ¦ ¸¡ ñ ÊÕó¾¡ø, «ÅüÚû ´ ýÈ¢ ýÁÐ ¦ºÂøÀ Î õ ¯Ã¡öÅ¢ÉÐ ¾¢ ¨º, «ÅüÈ¢ý ¦¾¡ Î ÒûÇ¢ þÂ í ¸ò ¦¾¡¼¼ í ¸ ÓÂÖõ ¾¢ ¨ºì Ì ±¾¢Ã¡ Ì õ.

Å¢¾¢ 2

¦À¡Õû ºÁ¿¢ ¨ÄÂ¢ÖûÇ ¦À¡ØÐ, ¯Ã¡öÅ¢ý «Ç× ¦À¡ÕÇ¢ý þÂì ¸ò ¨¾ò ¾ Î ôÀ¾ü Ì î º¡¢Â¡¸ ô §À¡¾¢Â¾¡¸ Ì õ.

±ø ¨Ä ¯Ã¡ö× (Limiting friction)

Å ¨ÃÂ ¨È

´Õ ¦À¡Õû §Å¦È¡Õ ¦À¡ÕÇ¢ ýÁÐ º¡¢Â¡¸ ÅØì Ì Ú ¿¢ ¨ÄÂ¢ÄÕó¾¡ø «îºÁ¿¢ ¨Ä ±ø ¨ÄÂ ¨¼¸¢ýÈÐ ±ÉôÀ Î õ. «ô§À¡Ð ¿¢ ¸ Øõ ¯Ã¡ö× ±ø ¨Ä ¯Ã¡ö× ±ÉôÀ Î õ.

Å¢¾¢ 3

¦À¡Õû¸ û ¯Ã¡Ôõ¦À¡ØÐ ¸¢ ¨¼ì Ì õ ±ø ¨Ä ¯Ã¡ö×Å¢ ¨º, ¦¾¡ Î ¨ ¸ò ¾Çò¾¢ý ¦ºí Ìò¾ Å¢ ¨ºì Ì §¿÷Å¢¸¢¾ò¾¢ø « ¨ÁÔõ.

Å¢¾¢ 4

« ùÅ¡Ú ²üÀ Î õ ±ø ¨ Ä ¯Ã¡ö×Å¢ ¨ º, ¦À¡Õ û ¸ û ¦¾¡ Î õ §ÁüÀÃôÒ ¸ Ù ¨ ¼Â « Ç ¨ ÅÔõ (size) ÅÊÅò ¨ ¾Ôõ (shape) º¡Ã¡¾¢Õ ì Ì õ.

Å¢¾¢ 5

´Õ ¦À¡Õû §Å¦È¡Õ ¦À¡ÕÇ¢ý Á£Ð ÅØì ¸¢ þÂì ¸õ ¯ ñ ¼¡ì Ì õ§À¡Ð ¯Ã¡öÅ¢ý ¾¢ ¨ º þÂì ¸ò¾¢ ¨ ºì Ì ±¾¢Ã¡ Ì õ. ¯Ã¡öÅ¢ý «Ç× ¦À¡ÕÇ¢ý º¡÷Ò §Å¸ò ¨ ¾ì º¡÷ó¾¾øÄ. ¬ É ¡ø ¯Ã¡öÅ¡ÉÐ ¦º í Ì ò¾¡ ¸ î ¦ºÂøÀ Î õ ±¾¢÷ò ¾¡ì ¸ò§¾¡ Î _ ¦ ¸ ¡û Ù õ Å¢ ¸¢¾õ ¦À¡Õû µöÅ¢Ä¢ÕóÐ þÂí ¸ò ¦¾¡¼í Ì õ ¾Õ ½ò¾¢ø ¯ ûÇ Å¢ ¸¢¾ò¾¢ü Ì î ºüÚ ì Ì ¨ ÈÅ¡ Ì õ.

5.3 ¯Ã¡ö× ì ¦ ¸ Ø (Coefficient of friction)

±ø ¨ Ä ¯Ã¡öÅ¡ÉÐ ¦º í Ì òÐ ±¾¢÷ò¾¡ì ¸ Å¢ ¨ ºÔ¼ý ¦ ¸ ¡û Ù õ Á¡È¡ Å¢ ¸¢¾õ ¯Ã¡ö× ì ¦ ¸ Ø ±ÉôÀ Î õ « ±ý Û õ ±Øò¾¡ø «Ð Ì È¢ì ¸ôÀ Î õ. ºÁ¿¢ ¨ Ä «Æ¢ì ¸ôÀ Î õ ¿¢ ¨ ÄÂÂ¢Ä¢Õ ì Ì õ§À¡Ð F ±ýÀÐ ¯Ã¡ö ¨ ÅÔõ R ±ýÀÐ ¦º í Ì òÐ ±¾¢÷ò¾¡ì ¸ Å¢ ¨ º ¨ ÂÔõ Ì È¢ò¾¡ø,

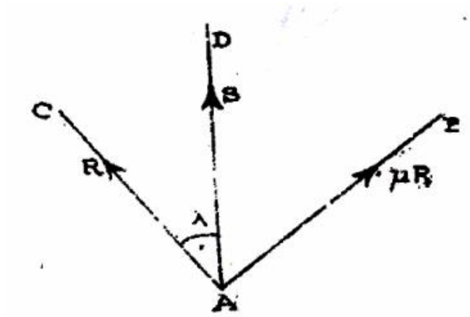
$$\frac{F}{R} = «$$

«¾¡ÅÐ $F = «R$ ¬ Ì õ.

¦À¡Õû ±ø ¨ Ä ºÁ¿¢ ¨ Ä ¨ Â « Ï ¸¡ÁÄ¢Õ ì Ì õ ¿¢ ¨ Ä ¨ Á ¸Ç¢ø, «§¾ Á¾¢ôÒ ¨ ¼Â Rì Ì F ±ý Û õ ¯Ã¡ö×Å¢ ¨ º « R³ Å¢¼ì Ì ¨ ÈÅ¡ Ì õ. §ÁÖõ ´ ý ¨ È¦Â¡ ýÚ ¦¾¡ Î õ ¦ÅùÅÚ ¦À¡Õû§º¡Ê ¸ Ù ì Ì « Å¢Û ¨ ¼Â Á¾¢ôÒ Á¡Èì Ü Î õ.

5.4 ¯Ã¡ö× ì §¸ ¡ ½ õ (Angle of friction)

ºÁ¿¢ ¨ Ä, ±ø ¨ Ä ºÁ¿¢ ¨ Ä ¨ Â « Ï ì Ì õ§À¡Ð ¯Ã¡ö×õ, ¦º í Ì òÐ ±¾¢÷ò¾¡ì ¸Óõ ´§Ã ¾É¢Å¢ ¨ ºÂ¡ ¸ î §º÷ì ¸ì Ì õÀÊ ý ¦º í Ì ò§¾¡ Î þ ùÅ¢ ¨ º ¯ ñ ¼¡ì Ì õ §¸ ¡ ½ õ ¯Ã¡ö×ì§¸ ¡ ½ õ ±ÉôÀ Î õ. «ò¾É¢Å¢ ¨ º Å¢ ¨ Ç¦Å¾¢÷ò¾¡ì ¸õ ±ÉôÀ Î õ.



À¼õ 5-1

± Î ò¾ þÕ¦À¡Õû ¸ Ù õ A ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø ¦¾¡ Î Å¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡û ¸. À¼õ 5-1ø AC, AB ±ý Û õ §¸ ¡ Î ¸ û ¦º í Ì òÐ ±¾¢÷ò¾¡ì ¸ Å¢ ¨ º R, ¯Ã¡ö×Å¢ ¨ º « R ±ýÀÅüÈ¢ý ¦ºÂøÀ Î õ ¾¢ ¨ º ¸ ¨ Çì Ì È¢ì ¸ ð Î õ. þùÅ¢Ã ñ Î Å¢ ¨ º ¸Ç¢ý ¦¾¡ Ì ÀÂý Å¢ ¨ º ¨ Â S ±ýÀÐ Ì È¢ì ¸ ð Î õ. «Ð ¦ºÂøÀ Î õ ¾¢ ¨ º ¨ Â AD ±ý Û õ §¸ ¡ Î Ì È¢ôÀ¾¡ ¸ ì ¦ ¸ ¡û ¸.

«ô¦À¡ØÐ CÂD ±ýÀÐ ¯Ã¡ö× ì §¸ ¡ ½Á¡ Ì õ. « ¨ ¾ ª ±É ì ¦ ¸ ¡û ¸.

$R, «R$ ±ýÀ¨Å Sý À¸¢÷×¸Ç¡Å¾¡ø

$«R = S \sin ª$

$R = S \cos ª$

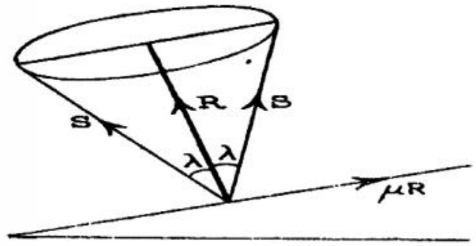
$« = \tan ª$,¬ Ìõ

$\therefore F \leq «R$ ±ýÀÐ

$F \leq \tan ª R$ ¬ Ìõ

5.5 ¯Ã¡ö×ìÜõÒ (Cone of friction)

¯Ã¡öÅ¢ý Á¢¸ô¦À¡¢Â Á¾¢ôÒ « R ¬ Ìõ. ¬¾Ä¡ø Å¢¨Ç¦Å¾¢÷ò ¾¡ì¸ò¾¢ý ¾¢¨º ¦ºí ÌòÐì §¸¡ð Î¼ý ¯ ñ ¼¡ì¸ìÜÊÂ Á¢¸ô¦À¡¢Â §¸¡½õ ª ¬ Ìõ.



A¼õ 5-2

±É§Å $ª = \tan^{-1}(«)$ þÕ¦À¡Õû¸û ´ý¨È¦Â¡ýÚ ¦¾¡ðÎì ¦¸¡ ñ ÊÕìÌÌõ §À¡Ð ¦À¡Ð ¦ºí ÌòÐì§¸¡ð¨¼ «îº¡¸×õ ¦¾¡ÎÒûÇ¢¨Â ¯îº¢Â¡¸×õ ¦¸¡ ñ Î, «¨Ã ¯îº¢ì§¸¡½õ ª ±ýÚûÇ ´Õ Üõ¨À À Å¨Ãó¾¡ø Å¢¨Ç¦Å¾¢÷ò ¾¡ì¸ò¾¢ý ±ò¾¢¨ºÔõ þìÜõÀ¢Ì ¯û§Ç «øÄÐ þìÜõÀ¢ý ÁÐ þÕò¾ø §Å ñ Ìõ.(À¼õ 5-2 ³ô À¡÷ì¸) þìÜõÒ ¯Ã¡ö×ìÜõÒ ±ÉôÀÎõ. ¯Ã¡ö×Å¢¨º¸Ç ¯û«¼ì¸Á¡¸ì ¦¸¡ ñ ÎûÇ ¸½ìÌ¸Ùì ÌÌò ¾¢÷×¸¡½ À¢ýÅÕõ ã ýÚ ¿¢¨Ä¸Ç¢ô À¢ýÀüÚ¾ø Ó¨ÈÂ¡Ìõ.

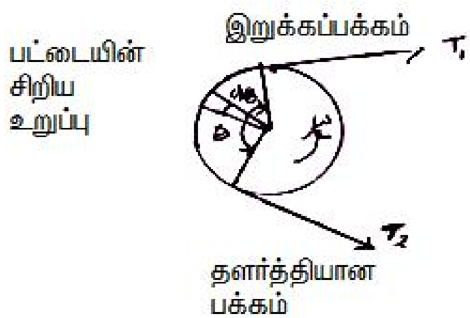
(i) ¦¸¡Îì¸ôÀð¼ Å¢ÅÃí¸Ç¢Ä¢ÕóÐ ¦À¡Õû º¿¢¨ÄÂ¢ø ±ô¦À¡ØÐõ þÕìÌõ ±É «È¢¾ø.

(ii) Å¢ÅÃí¸Ç¢Ä¢ÕóÐ ¯Ã¡ö×Å¢¨º¸û ¦ºÂøÀÎõ ¦¾¡Î ¨¸ô ÀÃôÒ¸Ç¢ø ¦À¡ÕÇ¢ý º¿¢¨Ä ±ø¨Ä º¿¢¨Ä¨Â « Ï ¸¢ þÂí¸ìÜ Îõ ±É «È¢¾ø.

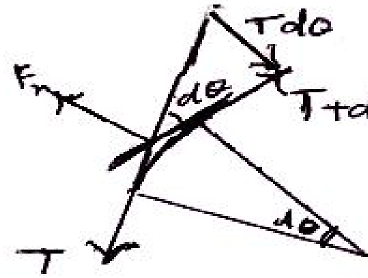
(iii) ¦¸¡Îì¸ôÀð¼ Å¢ÅÃí¸Ç¢Ä¢ÕóÐ ¦À¡Õû þÂí¸§Å ñ ÊÂ ¿¢¨ÄÂ¢ø ¯ûÇÐ ±É «È¢¾ø. À¢Èì «ùÅ¢¾ þÂì¸õ ÅØìÌ¾¨Ä (slipping) «øÄÐ ¸Å¢ú¾¨Ä (tipping) ´ðÊÔûÇÐ ±È «È¢óÐ ¾¢÷× ¸¡ Ï ¾ø.

5.6 ¿¡¼¡ §Å¸ò¾¨¼ÁüÚõ Àð¨¼ ¯Ã¡ö× (Band - brake and Belt friction)

¦¿¸¢Øõ ¾ý ¨Á ¦¸¡ñ¼ Àð¨¼¿¡¼¡ «øÄÐ ¸Â¢Ú ´ýÚ ¿¢Ç ¯Õ¨Ç ¨ÂÂ Íü È¢ô §À¡÷ò¾ôÀÎõ ¿¢¨ÄÂ¡ÉÐ, ¾¢È¨É ®÷òÐì ¦¸¡ûÅ¾ü Ì «øÄÐ Àð¨¼ì¸ÂÚ ´ýÚ ¾¢È¨É ¦ºÖòÐÅ¾üÌ ÀÂýÀÎò¾ôÀÎ¸¢ÈÐ. Å¨ÃÂôÀð Îû Ç À¼ò¾¢ø ¯Õ¨Ç ¨ÂÂ Íü¨È ¦ÀüÈ Àð¨¼ ¦ºí ÌòÐ¿¢¨Ä ÌÚìÌ ¦Åð ÎôÀÎò¾Â¢ø «¨ÁÅ¾¡¸ ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÐ,



À¼õ 5-3



À¼õ 5-4

¯Õ¨Ç¨Âò ¦¾¡ðÎì ¦¸¡ñÎ «¨ÁÔõ Àð¨¼ Åð¼¨ÁÂõ 0ø ¯ §¸¡½ò¨¾ §Áü¦¸¡û¸¢ÈÐ, Àð¨¼Â¢ý º¢È¢ÂÀÌ¾¢ ´ýÚ d¯ §¸¡½ò¨¾ ¯ÕÅ¡ìÌÅ¾¡¸ ¯ûÇÐ. þî º¢ÚôÀÌ¾¢Â¢ý þÕÓ¨Éô 0ûÇ¢¸Ç¢ø T, T+dt þØÅ¢¨º¸û ´§Å §¿÷§¸¡ðÊø ¦ºÂøÀÎÅ¾¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎ¸¢ÈÐ, þØÅ¢¨º¸ÙìÌûÇ Å¢ò¾¢Â¡ºõ ¯Ã¡ö×Å¢¨ºÂ¢ý Á¢ô¦ÀÕõ Á¾¢ôÀ¢É¡ø ¦¿¸¢ØõÀð¨¼ ÁüÚõ ¯Õ¨Ç ¬¸¢ÂÅüÈ¢üÌ þ¨¼§Â þÂì¸õ ¦¾¡¼í¸ôÀÎõ ¿¢¨ÄÂ¢ø ¯ÕÅ¡ì¸ôÀðÎ ¯ûÇ¾¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. «¾¡ÅÐ dt = f = «F_n ¬Ìõ.

þíÌ « = þÕ §ÁüÀÃôÒ¸ÙìÌ Á¢¨¼§Â ¿¢¸Øõ ¿¢¨ÄÂ¢ø ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø

F_n = ¦ºíÌòÐ Å¢¨º = Td¯

±É§Å $dT =$ «Td¯

$$\frac{dT}{T} = «d¯$$

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \int_{o}^{B} «d¯;$$

$$\log_e \frac{T_1}{T_2} = «¯$$

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{«¯}$$

Á¢¨¸Â¡É þØÅ¢¨º T_1 Àð¨¼Â¢ø ¦ºÂøÀÎõ Àì¸ò¨¾ þÚì¸ôÀì¸Á¡¸×õ (Tight side) ¾Ç÷ò¾¢Â¡É þØÅ¢¨º T_2 Àð¨¼Â¢ø ¦ºÂøÀÎõ Àì¸ò¨¾ò ¾Ç÷ò¾¢Â¡É Àì¸Á¡¸×õ (Slack side) ÜÚÅÐ ÅÆì¸õ.

T_1, T_2 ¸ÙìÌ Á¢¨¼§ÂÔûÇ Å¢ò¾¢Â¡º þØÅ¢¨º, ¾¢È¨É (Power) ¦ºÂøÀÎò¾¾ì¸¾¡¸ì ¸Õ¾ôÀÎõ. ¦ºÂøÀÎò¾ôÀð¼ þØÅ¢¨º¨Â «È¢Å¢ìÌõ ºÁýÀ¡Î

¾¢Èý = $(T_1 - T_2)v$

¬ = Àð¨¼Â¢ý þÂíÌõ §Å¸õ

5.7 ¯Ã¡ö×Å¢¨ºÂ¢ý Å¨¸¸û ®ÃÁüÈ «øÄÐ ¯Ä÷ó¾ ¯Ã¡ö× (Dry Friction)

¯öÂÅ¢¼ÁüÈ (Unlubricated) ¿¢¨Ä¨ÁÂ¢ø þÕ¦À¡Õû¸Ç¢É §ÁüÀÃôÒ¸û ¦¾¡Î¨¸Â¢ø ®ÎÀÎõ §¿Ãò¾¢ø, ®ÃÁüÈ «øÄÐ ¯Ä÷ó¾ ¯Ã¡ö× ²üÀÎ¸¢ÈÐ. ¦¾¡Î¨¸ô ÒûÇ¢Â¢ø þÕ§ÁüÀÃôÒ¸Ç¢ø «¨ÁÔõ ¦¾¡Î§¸¡ðÊø ¯Ã¡ö×Å¢¨º ²üÀÎ¸¢ÈÐ. þùÅ¢¨º ¯¼ÉÊÂ¡¸ ¿¢¸ÆÅ¢Õì¸¢È þÂì¸ò¾¢ý ±¾¢÷ò¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ.

þò¾¨¸Â ¯Ä÷ó¾ ¯Ã¡ö¨Å ÜõÀ¢ý ¯Ã¡ö×(Coulomb Friction) ±É×õ ÜÈÄ¡õ.

5.7.1 À¡ö¦À¡Õû ¯Ã¡ö× (Fluid Friction)

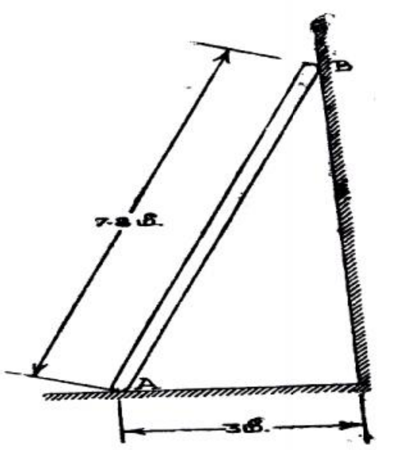
À¡ö¦À¡ÕÇ¢ø «Õ¸¡¨ÁÂ¢ø «¨ÁÔõ «Îì¸Ù¸û (layers) ¦Åù§ÅÈ¡É ¾¢¨º§Å¸í¸Ç¢ø þÂíÌõ §¿Ãò¾¢ø À¡ö¦À¡Õû ¯Ã¡ö× ¿¢¸ú¸¢ÈÐ. §ÁÖõ À¡ö¦À¡Õû ¯Ã¡ö× À¢ÍÀ¢ÍôÒò¾ý¨Á¨ÂÔõ º¡÷óÐûÇÐ.

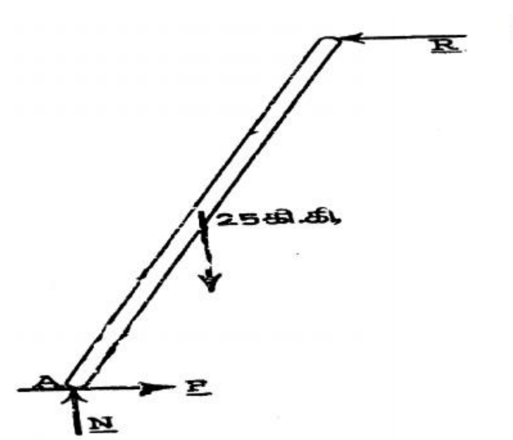
5.7.2 ¯ûÇ¡É ¯Ã¡ö× (Internal Friction)

«¨ÉòÐ ¾¢¼ ãÄô¦À¡Õð¸û þÂì¸ô À ñÀ¢ü Ì¡¢Â ¯Ã¡ö× (Kinetic Friction) ºÚì¸¢ Å¢ØÅ¾¢ý ¿¢¨ÄÌô À¢ÈÌ, ¿¢¸úÅ¾üÌ ²üÈ ¿¢Àó¾¨É¨Â ¦ÅÇ¢ôÀÎòÐ¸¢ÈÐ. þÂì¸ô À ñÀ¢üÌ¡¢Â ¯Ã¡ö×Å¢¨º ±ô§À¡Ðõ þÂì¸¿¢¨Ä ¯Ã¡ö×Å¢¨ºÂ¢ý ¦ÀÚÁ Á¾¢ôÀ¢üÌ ºüÚ Ì¨ÈÅ¡¸ ¯ûÇÐ.

Á¡¾¢¡¢ì ¸½ì Ì¸û

Á¡¾¢¡¢ 5.1 25 ¸¢§Ä¡¸¢Ã¡õ ±¨¼Ôõ 7.8Á£ð¼÷ ¿£ÇÓõ ¯ûÇ AB ±ýÛõ ºÃ¡É ²½¢Â¢ý §ÁøÓ¨É ´Õ ÁÆÁÆôÀ¡É ¿¢¨ÄìÌòÐ ÍÅ¨Ãò ¦¾¡ÎÁ¡Úõ «¾ý ¸£Ó¨É ¾¨ÃÂ¢ø ÍÅ¡¢Ä¢ÕóÐ 3Á£ð¼÷ ¦¾¡¨ÄÅ¢ø À¼õ 5-5ø ¸¡ðÊÂÅ¡Úõ ¨Åì¸ôÀðÎûÇÐ. ¾¨Ãì Ìõ, ²½¢ì Ìõ þ¨¼§ÂÔûÇ ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.30 ±É¢ø A ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø «ó¾ ²½¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎõ ¯Ã¡ö×Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ¸.





À¼õ 5-5 À¼õ 5-6

þÐ Ó¾øÅ¨¸ì Ìõ ±ÎòÐì¸¡ð¼¡¸ ¯ûÇÐ. ²½¢¨Âò ¾É¢ôÀÎòÐõ §À¡Ð ¦ºÂøÀÎõ Å¢¨º¸û À¼õ 5-6ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÉ.

Å¢¨º¸Ù ìÌ ²üÈ ºÁ¿¢¨Äî ºÁýÀ¡Î¸¨Ç Å¨ÃÂÚì¸.

$$\sum F_y = 0 \to N - 25 = 0 \therefore N = 25\text{¸¢.¸¢}\uparrow$$

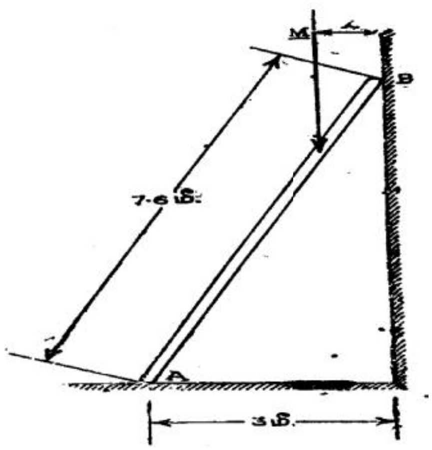
$$\sum M_B = 0 \to 7.2F + 1.5(25) - 3(25) = 0$$

$$F = 5.21\text{¸¢.¸¢}\to$$

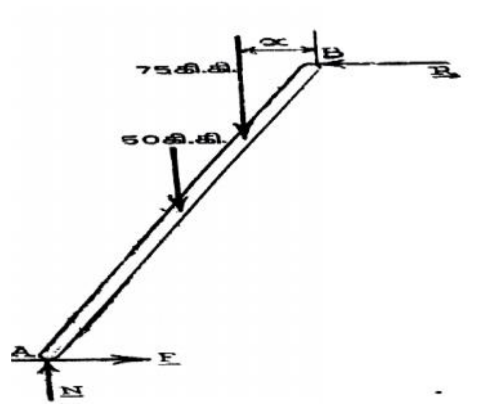
F^1 ±ø ¨ Ä ¯Ã¡ö×Å¢ ¨ º = $«N$

= 0.3 X 25 =7.5 ¸¢.¸¢

þ í Ì $F = 5.21 < 7.5$ ±ýÈ¡Å¾¡ø ²½¢ ºÁ¿¢¨ ÄÂ¢Ä¢Õì Ì õ ±É ¯Ú¾¢Â¡¸ ÜÈÄ¡õ.
Á¡¾¢¡¢ 5-2. §ÁüÜÈ¢Â ¸½ì¸¢ø 75¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ ´Õ ÁÉ¢¾ý ²½¢Â¢ø ²ÚÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.



À¼õ 5-7



À¼õ 5-8 ²½¢

¿¸Ã ¬ÃõÀ¢ì Ì õ ¾Õ½ò¾¢ø ÁÉ¢¾Û ì Ì õ ÍÅüÈ¢ü Ì õ þ¨¼§ÂÔûÇ x ±ý Ûõ ¦¾¡¨Ä¨Åì ¸¡ ñ ¸ (À¼õ 5-7ô À¡÷ì¸×õ)
þô¦À¡ØÐ ²½¢Â¢ø ¦ºÂøÀÎ õ Å¢¨ º¸û À¼õ 5-8ø ¸¡ð¼ôÀð Î ûÇÉ.

þó¾ì¸_½ì Ì þÃ ñ ¼¡ÅÐ Å ¨ ¸ì Ì ±Î òÐì¸¡ð¼¡ Ì õ. þ í Ì 4 ¦¾¡¢Â¡ì ¸½¢Â í ¸û ¯Ç (3 Å¢ ¨ º¸û : N, F, R ; ¦¾¡ ¨Ä× : X) Å¢ ¨ º¸Ç ¨ ÉòÐõ ´Õ ¾Ç Å¢ ¨ º¸Ç¡É¾¡ø ã ýÚ ºÁ¿¢ ¨ Äî ºÁýÀ¡Î ¸ ¨Ç Å ¨ÃÂÂÚì¸ ÓÊÔõ. §ÁÖõ ÅØì Ì ¾Öì Ì ²üÈ¾¡É¢n $F' = «N$ ±ýÈ ºÁýÀ¡Î õ ÀÂýÀÎ ò¾ §Å ñ Ê ÅÕ¸¢ÈÐ. ±É§Å

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - 25 - 75 = 0 \therefore N = 100 ¸¢.¸¢ \uparrow$$

$$F' = «N \rightarrow F' = 0.3 \times (100) = 30 ¸¢.¸¢$$

$$\therefore F = «N = 30 ¸¢.¸¢ \rightarrow$$

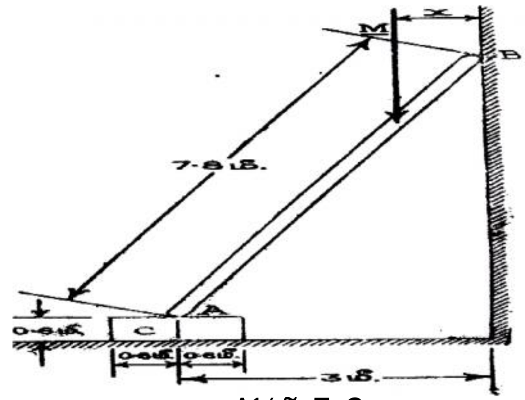
$$\sum M_B = 0 \rightarrow x(75) + 1.5(25) - 3(100) + 7.2(30) = 0$$

$$\therefore x = 1.035 \text{ Á¦}$$

Á¡¾¢¡¢ 5-3 Óý ±Î ò¾ ¸½ì¸¢ø ²½¢Â¢ý ãÄõ þý Ûõ º¢È¢Ð ¦¾¡¨Ä× §Á§Ä ¦ºøÅ¾ü¸¡¸ 50¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇÐõ ¾¨ÃÂ¢Ä¢ÕóÐ 0.6Á¦ð¼÷ ¯ÂÃÓõ ¯ûÇ ¦ÀðÊ¨Â¨Â ¾¨ÃÂ¢ø À¼õ 5-9ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¨ÅòÐ «¾ý§Áø ²½¢Â¢ý ¸¦úÓ¨É « ¨ÁÅ¾¡¸ì ¦¸¡û¸. BÂ¢ø ÍÅüÈ¢ü Ì õ ²½¢ì Ì õ ¯ûÇ ¯Ã¡ö×ì ¦¸Ø 0.20 ±ýÚõ AÂ¢ø ²½¢ì Ì õ ¦ÀðÊì Ì õ ¯ûÇ ¯Ã¡ö×ì ¦¸Ø 0.35 ±ýÚõ ¾¨Ãì Ì õ ¦ÀðÊì Ì õ ¯ûÇ ¯Ã¡ö×ì ¦¸Ø 0.25 ±ýÚõ ¦¸¡û¸. ÁÉ¢¾Û ¨¼Â ±¨¼Ôõ, ²½¢Â¢Û ¨¼Â ±¨¼Ôõ Óó¾¢Â Á¡¾¢¡¢ì ¸½ì¸¢ø ¦¸¡Î òÐûÇ Á¾¢ôÒ¸Ç¡¸ ×õ ¦¸¡û¸. ²½¢Â¢ý þÂì¸õ ÅØ¿¢¨Ä¨Â «¨¼Ó¾¡ø x ±ý Ûõ ¦¾¡¨Ä¨Åì ¸¡ ñ ¸. þÐ ãýÈ¡Å¾¡É ¿¢¨Äì Ì ±Î òÐì¸¡ð¼¡ Ì õ. ²½¢ ¦ÀðÊ ¬¸¢Â¨Å ¾É¢ôÀÎ ò¾ôÀð Î «ÅüÈ¢ø ¦ºÂøÀÎ õ Å¢¨ º¸û 5-9, 5-10

±ýÛõ À¼í¸Ç¢ø ¸¡ð¼ôÀðÎûÇÉ. þíÌ 8 ¦¾¡¢Â¡ì ¸½¢Âí¸û ¯Ç (6Å¢¨º¸û, 2 ¦¾¡¨Ä×¸û) ¾É¢ôÀÎò¾ôÀð¼ ¦À¡Õû ´ù¦Å¡ýÚìÌõ 3 ºÁ¿¢¨ÄÎ ºÁýÀ¡Î¸¨Ç Å¨ÃÂÚì¸ ÓÊÔõ.

BÂ¢ø ÅØì¸õ ¿¢¸úÅ¾¡ø $F'_2 = 0.20N_2$ ¬Ìõ. 8ÅÐ ºÁýÀ¡Î C ±ýÛõ ¦ÀðÊÂ¢ý §Áø¾Çò¾¢ø «øÄÐ ¸¡ú¾Çò¾¢ø ÅØì¸õ ²üÀÎõ ±Éì ¦¸¡ñÎ Å¨ÃÂÚì¸ôÀÎõ. AÂ¢ø ÅØì¸õ ¿¢¸Øõ ±Éì¦¸¡ñÎõ ¦¸¡Ïì¸ôÀð¼ ¸½ì¸¢ü¸¡É ¾£÷× ¸¡½Ä¡õ. þó¿¢¨Ä ±Ç¢¾¡É¾¡ø AÂ¢ø ÅØì¸õ ²üÀÎ¸¢ÈÐ ±Éì ¦¸¡ñÎ ¸úì¸¡ ÏÕ ºÁýÀ¡Î¸û Å¨ÃÂÚì¸ôÀðÎûÇÉ.



À¼õ 5-9

∴ $F_1 = F_1' =$ «$_1 N_1 = 0.35N_1$

$F_2 = F_2' =$ «$_2 N_2 = 0.20N_2$

$\sum F_x = 0 \rightarrow F_1 - N_2 = 0 \rightarrow F_1 = N_2$

$\therefore N_2 = F_1 = F_1' = 0.35N_1$

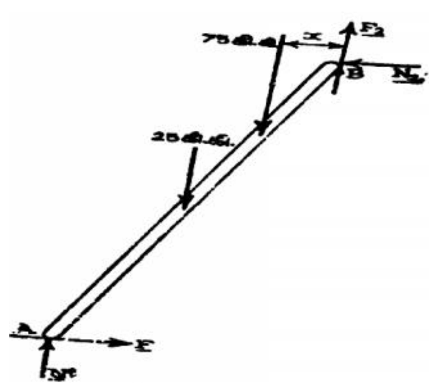
$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 + F_2 - 25 - 75 = 0$

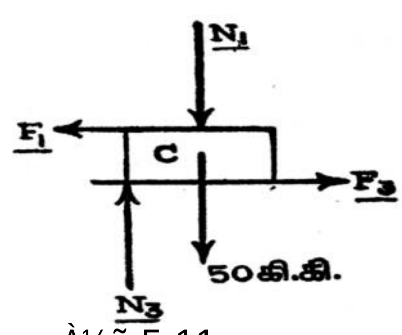
«¾¡ÅÐ $N_1 + 0.20N_2 = 100$

«¾¡ÅÐ, $N_1 + 0.20(0.35)N_2 = 100$

$$N_1 = \frac{100}{1.07} = 93.45 \text{ ¸¢.¸¢}$$

$$F_1 = F_1' = 0.35(93.45) = 32.7 \text{ ¸¢.¸¢}$$





À¼õ 5-10

À¼õ 5-11

¦ÀðÊì Ì ¯¡íÂ ºÁ¿í ¨ Ä ºÁýÀ¡ Î ¸ ¨ ÇÔõ Å ¨ ÃÂÚì ¸

$\sum F_y = 0 \to N_3 - 93.45 - 50 = 0$ « øÄÐ

$N_2 = 143.45 \uparrow$ ¸í.¸í

$\sum F_x = 0 \to F_3 - 32.7 = 0$ « øÄÐ $F_3 = 32.7$ ¸í.¸í

F_3 Âíý ±ø ¨ Ä ¯Ã¡ö× Åí ¨ º

$F_3{}' = «_3 N_3 = 0.25(143.45) = 35.85$ ¸í.¸í

þ í Ì $F_3 < F_3{}'$ ±ýÚ ÅÕÅ¾¡ø C ±ýÛõ ¦ÀðÊì Ìõ ¾Çò¾íü Ìõ þ ¨ ¼§Â ÅØì Ì¾ø ¿í¸Æ¡Ð ±É ¯Ú¾íÂ¡¸ì ÜÈÄ¡õ.

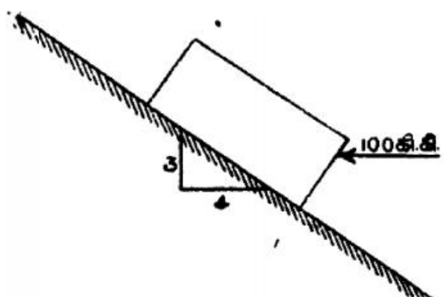
¾ÉíôÀ Î ò¾ôÀð¼ ² ½íì Ì ¯¡íÂ, $\sum M_B = 0$ ±ý Ûõ ºÁýÀ¡ Î

$x(75) + 1.5(25) + 7.2(32.7) - 3(93.45) = 0$ ¬ Ì õ.

$\therefore x = .0987$ Áí.

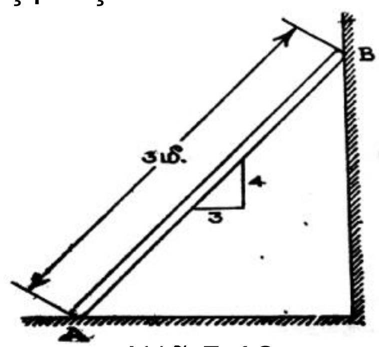
ÀÂíüºí

5.1 125¸í.¸í ±¨¼ÔûÇ ¦ÀðÊ ´ýÚ À¼õ 5-12ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú « ¨ÁóÐûÇÐ. ¦ÀðÊì Ìõ ¾Çò¾íü Ìõ þ ¨ ¼§ÂÔûÇ ¯Ã¡ö×ì ¦¸Ø 0.2 ±Éíø «ô¦ÀðÊÂíý §Áø ¦ºÂøÀ Îõ ¯Ã¡ö×Åí ¨ º ¨ Âì ¸¡ ñ ¸.
(Åí ¨ ¼ 5 ¸í.¸í)



À¼õ 5-12

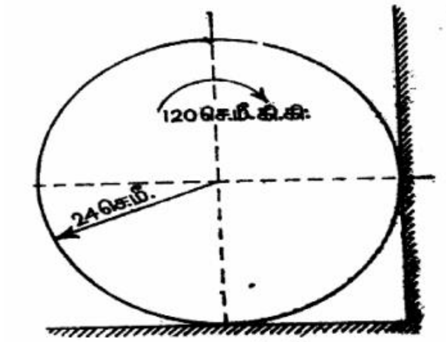
5.2 10¸í.¸í ±¨¼ÔûÇ ²½í ´ýÚ ÁÆÁÆôÀ¡É ¿í ¨ Äì ÌòÐî ÍÅ¡íø À¼õ 5-13ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú º¡öòÐ ¨ Åì ¸ôÀðÊÕì ¸íÈÐ. ²½íì Ìõ ¸í ¨ ¼¾Çò¾íü Ìõ þ ¨ ¼§ÂÔûÇ ¯Ã¡ö×ì ¦¸Ø 0.5 ±Éíø A ±ýÛÁí¼ò¾íø ²½íÂíý §Áø ¦ºÂøÀ Îõ ¯Ã¡ö×Åí ¨ º ¨ Âì ¸¡ ñ ¸.



À¼õ 5-13

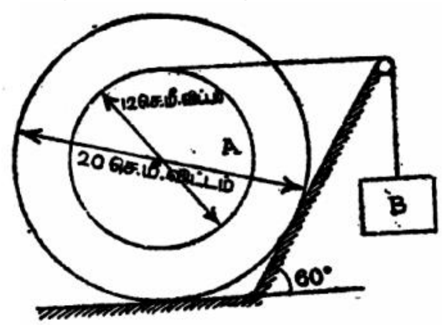
5.3 50¸í.¸í ±¨¼ÔûÇ ºíÃ¡É ºì ¸Ãõ ´ýÚ ÁÆÁÆôÀ¡É ¦º í ÌòÐ ÍÅ ¨ ÃÔõ,

¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.3 ¯ûÇ ¸¢¨¼¾Çò¨¾Ôõ ¦¾¡ð¼Å ñ ½õ À¼õ 5-14ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ÖûÇÐ. ¸¢¨¼¾ÇÁ¡ÉÐ ºì¸Ãò¾¢ý §Áø ²üÀÎòÐõ ¯Ã¡ö×Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ¸.
(Å¢¨¼ ÅÄôÀì¸õ 5 ¸¢.¸¢)



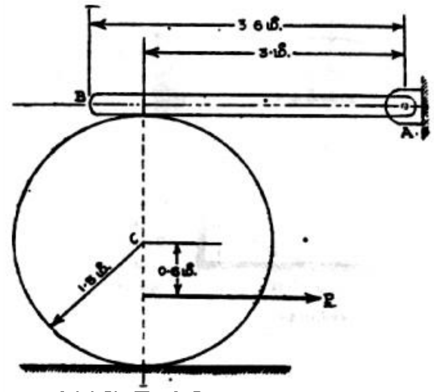
À¼õ 5-14

5.4 À¼õ 5-15ø A ±ýÛõ ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼ 10¸¢.¸¢ ±É×õ B ±ýÛõ ¦À¡ÕÇ¢ý ±¨¼ 5¸¢.¸¢ ±É×õ ¦¸¡Îì¸ôÀðÎûÇÉ. ¾¨Ã ÁÆÁÆôÀ¡ö ¯ûÇÐ. º¡ö×¾Çô ÀÃôÀ¢ý ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.45 ¬Ìõ. ¦¾¡¼ì¸ò¾¢ø ¦À¡Õð¦¼¡Ì¾¢ ºÁ¿¢¨ÄÂ¢ø þÕì¸¢ýÈÐ. A ±ýÛÁ¢¼ò¾¢ø ¾¨ÃÂ¢ý ±¾¢÷ò¾¡ì¸ Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ¸.
(Å¢¨¼ 6.825 ¸¢.¸¢ ¦ºíÌò¾¡¸ §Áø§¿¡ì¸¢Â ¾¢¨ºÂ¢ø)



À¼õ 5-15

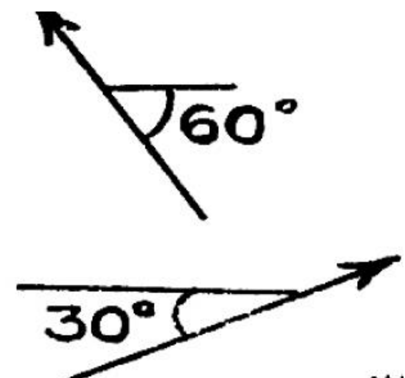
5.5 50 ±¨¼ÔûÇ AB ±ýÛõ º¡É ºð¼õ ´ýÚ 25¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ º¡É ¯Õ¨ÇÂ¢ý §Áø À¼õ 5-16ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨ÁóÐûÇÐ. ABìÌõ ¯Õ¨ÇìÌõ þ¨¼§ÂÔûÇ ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.20 ±ýÚõ ¯Õ¨ÇìÌõ ¾Çò¾¢üÌõ þ¨¼§ÂÔûÇ ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.40 ±ýÚõ ¦¸¡Îì¸ôÀð¼¡ø ¯Õ¨Ç¨Â ¿¸÷ò¾ì ÜÊÂ Á¢¸ìÌ¨ÈóÐ P ±ýÛõ Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ¸.



À¼õ 5-16

AB Â¢ý ¾ÊôÒô ÒÈì¸ ½¢ì¸ôÀð Î ûÇ¾¡¸ì ¦¸¡û¸.
(Å¢¨¼ 20¸¢.¸¢)

5.6 60¸¢.¸¢ ±¨¼Ôû Ç AC ±ý Û õ º¢÷¸§¸¡¦Ä¡ýÚ À¼õ 7-15ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú «¨ÁóÐûÇÐ. A ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø «¨ÁÔõ ¦¾¡Î õ ÀÃôÒ¸û ÁÆÁÆôÀ¡É ¬É¡ø B ±ý ÛÁ¢¼ò¾¢ø ¿¢¨ÄÂ¢Âø ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø (State coefficient of friction) 0.30 ±Éì ¦¸¡Î ì¸ôÀð Î ûÇÐ. BÂ¢ø ¦ºÂøÅÎ õ Å¢¨ºÂ¢ý À¸¢÷×¸¨Çì ¸¡ñ¸.

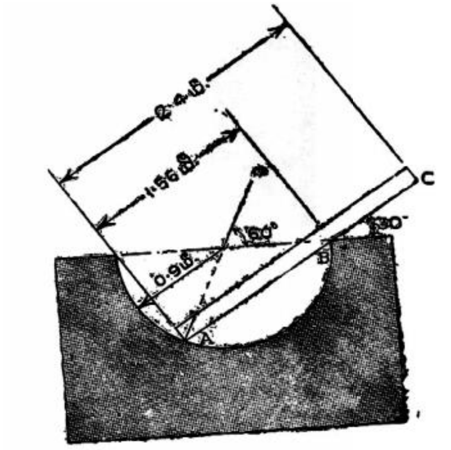


À¼õ 5-17

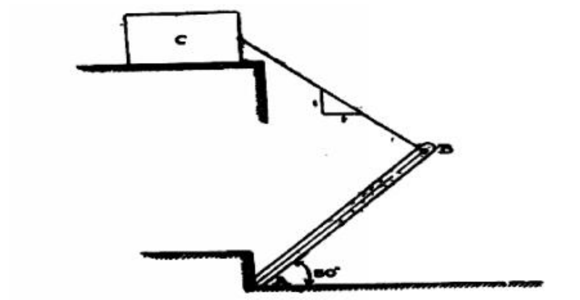
(Å¢¨¼ N = 40¸¢.¸¢)

F = 9.285 ¸¢.¸¢

5.7 AB ±ý Û õ º¡É ºð¼õ C ±ý Û õ ÁÃì¸ð¨¼ ¬¸¢Â¨Å ´ù¦Å¡ýÚõ 5 ¸¢.¸¢. ±¨¼¨Âô ¦ÀüÚûÇÐ. «ÅüÈ¢ý «¨Áôò À¼õ 7-10ø ¸¡ðÊÂÅ¡Ú ¯ûÇÐ. ÁÃì¸ð¨¼ Cì Ì õ, «Ð «¨ÁÔõ ¸¢¨¼ò ¾ÇòÐì Ì õ þ¨¼§ÂÔûÇ ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø 0.2 ±É¢ø ¸¢¨¼ò¾Çõ CÂ¢ý §Áø ²üÀÎ òÐõ ¯Ã¡ö× Å¢¨º¨Âì ¸¡ñ¸.
(Å¢¨¼ 1.14¸¢.¸¢ þ¼ÐÒÈõ)



À¼õ 5-18



À¼õ 5-19

5.8 ´Õ ºÃ¡É ²½, «¾Û ¨¼Â ´Õ Ó¨É ¾¨ÃÂÖõ, ÁÚÓ¨É ¦ºí Ìò¾¡É ÍÅ¡ø ºÁ¿¨ÄÂø ¯ûÇÐ. ¾¨Ã ÁüÚõ ÍÅ÷ þÃ ñ Îõ ¦º¡Ã¦º¡ÃôÀ¡ÉÐ «¨Å¸Çý ¯Ã¡ö× Ì½¸õ Ó¨È§Â « ÁüÚõ «' ²½ þÕÓ¨É¸Çø ¿Ø×õ ¿¨ÄÂÄÕó¾¡ø «Ð ¸¨¼Ì§¸¡ð§¼¡Î ¯ñ¼¡ÌÌõ §¸¡½õ ¯, $\tan \text{¯} = \frac{1-««'}{2«}$ ±ýÈ Å¡öôÀ¡ð¼¡ø ¦¸¡ÎÌ¸ôÀÎõ ±ÉÌ¸¡ðÎ¸.

5.9 ÍÁ¡Ã¡É ¯Ã¡ö× ¦ÀüÈ ¸¨¼¾Çò¾Öõ, «§¾Á¡¾¡Â¡É ¯Ã¡ö× ¦ÀüÈ ¿¨Ä ÌòÐ¾Çò¾Öõ ¯Ã¡ö×Ì¦¸Ø « ±ýÚõ, ¸É¯ÕÅõ ¦¸¡ñ¼ ´Õ «¨ÃÌ§¸¡Çõ, ÅÃôÒ ºÁ¿¨ÄÂø ¯ûÇ¦¾Éø, «¾ý º¡ö×¾Çõ ¸¨¼¾ÇòÐ¼ý

$$\sim = \sin^{-1}\left[\frac{8«\left(1+R\right)}{3\left(1+R^2\right)}\right]$$

±ýÈ §¸¡½ò¨¾Ì ¦¸¡ñ Îû Ç¾¡¸Ì ¸¡ðÎ¸ (R ±ýÀÐ, «¨ÃÌ§¸¡Ç ¬ÃõÀÁ¡Ìõ)

5.10 ´Õ ÅÆÅÆôÀ¡É §¸¡½õ ´Õ ÅÆÅÆôÀ¡É ÍÅ¡ø ¯¨¾òÐ ¦¸¡ñ ÊÕÌ¸È ¿¨ÄÂø ¦¸ðÈÂ¡¸ô ¦À¡Õò¾ôÀðÊÕÌ¸ÈÐ, ¸ú ºÃ¡É ¸ÆÂý ¸úÓ¨É ÍÅ¡ý§Áø ¯¨¾òÐÌ¦¸¡ñ Î «ó¾ §¸¡½ò¨¾ò ¦¾¡ðÎ, ¿ðÊÌ¦¸¡ñ Î «¨ºÅüÈ ¿¨ÄÂÕÌ¸ÈÐ, §¸¡Çò¾ý ¬Ãõ a - ¸ÆÂý ¿Çõ (l) - ¸Æ ÌòÐÌ§¸¡ðÊü Ìî º¡öó¾ÕÌ Ìõ §¸¡½õ ¯ ±Éø $\sim = 2l\sin\frac{\text{¯}}{2}.\cos^3\frac{\text{¯}}{2}$ ±É ¿åÀ.

5.11 100¸.¸ ±¨¼ÔûÇ ¦ÀðÊ ´ýÚ, 20 º¡×ûÇ º¡ö×¾Çò¾ø «¨ÁóÐûÇÐ ¦ÀðÊÂý ÃÌ¸¦Á¡ýÈø ¸¨¼Â¡¸ Ó¾Äø P= 500N, ÁüÚõ þÃ ñ¼¡Å¾¡¸ P=100N ±ýÛõ º¡÷ÀÄ¡Å¨º ¦ºÂøÀÎÁ¡¸ø, ¿¨Ä ¯Ã¡ö×Ì¦¸Ø 0.20 ±É×õ, þÂÌ¸ ¬üÈÖÌ ÌÈÂ ¯Ã¡ö×Ì¦¸Ø 0.17 ±É×õ ¦¸¡ÎÌ¸ôÀðÎûÇÉ ±Éø ¯Ã¡ö×Å¨ºÂý ÀÕÁ¨ÉÔõ, ¦ºÂøÀÎõ ¾¨º¨ÂÔõ ¾÷Á¡ÉÌ¸×õ.

(Å¨¼ : P=500N ±ýÚûÇ§À¡Ð , F= -134.3N
P= 100N ±ýÚûÇ§À¡Ð, F= -1093N

5.12 ¾¢¨º Ó¨È§Â º¡ö¾Çò¾¢ý ¸¡Ã¡É º¡¢Å¢Öõ, º¡ö¾Çò¾¢ý §Áø§¿¡ì¸¢Â º¡¢Å¢Öõ «¨Á¸¢ÈÐ.

5.13 100¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ ¦ÀðÊ ¸¢¨¼Â¡É ¾Çò¾¢ø ¯ûÇÐ, P=700N, ¸¢¨¼¾¢¨ºì Ì 30° ¾¢¨ºÂ¢ø ¦ºÂøÀÎ¸¢ÈÐ $\mu_s = 0.80$, ÁüÚõ $\mu_k = 0.60$ ±É¢ø ¯Ã¡ö×Å¢¨º¨Âò ¾£÷Á¡É¢ì¸×õ.

5.14 ¸¢¨¼Â¡É ¾Çõ ÁüÚõ 105° «ÇÅ¢üÌî º¡¢×¦¸¡ñ¼ ¾Çõ ¬¸¢ÂÅü¨È þÊòÐì¦¸¡ñ Î º¡¢É ÍÁ¢ð¼÷ ¿¢ÇÓûÇ ¸Æ¢ ´ýÚ ¨Åì¸ôÀðÎûÇÐ. $\mu_s = 0.25$ ±É¢ø, ¸Æ¢ì Ìõ ¸¢¨¼¾Çò¾¢üÌõ þ¨¼Â¢ø «¨ÁÔõ ¦ÀÕõ §¸¡½õ ¯³ì ¸¡ñ ¸

(Å¢¨¼ ; 59.9°)

5.15 90¸¢.¸¢ ±¨¼ÔûÇ º¡Âõ â ÍÀÅ÷ 4Á ²½¢ ´ýÈ¢ø ²½¢ ¸¡úÓ¨É ¿ØÅ¡Áø ²Ú¸¢È¡÷, ²½¢Â¢ý ±¨¼ 15¸¢.¸¢ ±É×õ ²½¢Â¢ý ¯îº¢Ó¨É BÂ¢ø ´Õ ÍÆø¯Õ¨Ç ¦À¡Úò¾ôÀðÎûÇÐ, ¿¢Äò¾¢ø ¿¢¨Ä ¯Ã¡ö× $\mu_s = 0.25$ ±É¢ø, ²½¢Â¢ý AÂ¢Ä¢ÕóÐ ±ó¾ ¦¾¡¨ÄÅ¢üÌ º¡Âõ â ÍÀÅ÷, ²½¢ ¿ØÅ¡Áø ²È ÓÊÔõ ±ýÀ¨¾ì ¸¡ñ ¸.

(Å¢¨¼ 2.55 Á)

5.16 10Á ¿¡ÇÓûÇ º¡É 15N ±¨¼ÔûÇ ²½¢ ´ýÚ ¿¢¨ÄÂ¡É ÍÅ÷ ´ýÈ¢ø, ÍÅ¡¢Ä¢ÕóÐ ¸¡úÓ¨É 8Á ¯ûÇÀÊ ¨Åì¸ôÀðÎûÇÐ. ²½¢ ¿Ø×õ ¿¢¨ÄÂ¢ø ¯ûÇ§À¡Ð ¸¢¨¼¾Çõ «Ç¢ì Ìõ ¯Ã¡ö×Å¢¨º¨ÂÔõ, ²½¢ì Ìõ ¸¢¨¼¾Çò¾¢üÌ ÓûÇ ¯Ã¡ö×ì¦¸Ø¨ÅÔõ ¾£÷Á¡É¢ì¸×õ.

(Å¢¨¼ $F_{\sim} = 10N; \quad \mu = 0.67$)

5.17 ¸§Æ ¦¸¡Îì¸ôÀðÎûÇ ¯Úô¦Ùì Ì Å¢Çì¸õ «Ç¢ì¸.
¯Ã¡ö×, ¯Ã¡ö×¸Ç¢ý Å¨¸¸û, ¯Ä÷ó¾ ¯Ã¡ö×, ¿¢¨Ä ¯Ã¡ö×, þÂì¸ ¯Ã¡ö× ¯¼ÉÊÂ¡¸ ¿¢¸ÆÅ¢Õì¸¢È þÂì¸õ ÅÆ¢¸¡ðÎì§¸¡½õ (lead angle) ¾¢Õ Ì¾¡¢Â¢¨¼¦Åª Ãõ (pitch of screw), ¬ô¦À (wings), Àð¨¼ ¯Ã¡ö×.